

Литература

1. Фариау
2. Лихачов А.Н., Самарский А.А.
3. Булигеев С.В., Иванов А.О.

Лекция №1

03.09.20

Основные определения и вводящие понятия

$$u(t, x, y, z)$$

Пример

$u_t = u_{xx}$ - одномерное ур-е теплопроводности

$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ - двумерное волновое ур-е

u - неизвестная ф-я

t, x, y - независимые переменные

Def Уравнение, связывающее исконую ф-ю $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, независимые переменные x_1, \dots, x_n и частные производные u называют д.у.з.п.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n}) = 0 \quad (1)$$

Методы классификации ДУЧТ

I Порядок уравнения

Def Порядком уравнения называется наибольший порядок частных производных, входящих в уравнение

$$u_t = u_{xx} \quad - \text{ур.е 2-го порядка}$$

$$u_t = u_x \quad - \text{ур.е 1-го порядка}$$

II Число переменных

Def Числом переменных наз. число независимых переменных

$$u_t = u_{xx} \quad - \text{ур.е с 2-мя переменными}$$

III Линейность

Def Линейным наз. ур.е, в котором искомая ф-я и ее производные входят линейным образом т.е. они не умножаются друг на друга, не возводятся в степень и т.п.

$$\underbrace{(u_t)} = e^{-t} \underbrace{(u_{xx})} + \sin t \quad - \text{линейное}$$

$$\underbrace{u u_{xx}} = u_t \quad - \text{нелинейное}$$

Def ДУЧТ наз. квазилинейным, если оно линейно относительно старших производн. от искомой ф-ии.

$$u \underbrace{(u_{xx})} + u_t = 0 \quad - \text{квазилинейное}$$

нелинейное

IV Однородность

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G(x, y) \quad (2)$$

$$u(x, y)$$

Def Ур-е (2) наз однородным, если $G(x, y) = 0$,
иначе - неоднородным

V Вид коэф.

Def Если в ур-е (2) коэф. A, B, C, D, E, F - постоянные,
то ур-е наз уравнением с пост. коэф.
иначе - с переменными коэф.

Замечание

ДУЧТ 2-го порядка

1) ур-е гиперболич. типа $B^2 - 4AC > 0$

2) ур-е параболич. типа $B^2 - 4AC = 0$

3) ур-е эллиптич. типа $B^2 - 4AC < 0$

Def Решением ДУЧТ наз. ф-я $u(x_1, \dots, x_n)$,
имеющая непрерывные производные, го
порядка, равного порядку ур-е и обраща-
ющая ДУЧТ в тождество.

Примеры

① $u(x, y)$

$$u_y = y \Rightarrow u(x, y) = \int y dy \Rightarrow u(x, y) = \frac{y^2}{2} + C(x)$$

↑ производ-
ная

2

$$u_{xy} = 0$$

$$u_x = \vartheta$$

$$\vartheta_y = 0 \Rightarrow \vartheta = 0 + C(x)$$

$$u_x = C(x)$$

$$u(x, y) = \int C(x) dx = F(x) + G(y)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{F(x)} \quad \swarrow \quad \searrow$
произв. ф-я

Def Задача об определении ф-ии $u(x, \dots, x_n)$, удовлетворяющей ДУЧП и некоторым мат. условиям, называется задачей Коши.

Def Задача для ДУЧП в которой доп. условие ставится условие на границе(ах) называется краевой (граничной) задачей.