Лекция 10 10.11.2020

Решение параболических уравнений на отрезке

$u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x)$ $t>0;\ 0<x<l$

н.у. $u(0,x) = \varphi(x)$

г.у. $u(t,0) = 0$

$u(t,l) = 0$

$u(t,x) = T(t)\cdot X(x)$

1) Находим собств ф-ии и собств. зн-я задачи с однородным уравнением

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} \\ &u(t,0) = 0 \\ &u(t,l) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &X'' = -\lambda^2 X \\ &X(0) = 0 \\ &X(l) = 0 \end{aligned} \text{ - з. Ш-Л.}$$

$X_n = \sin \lambda_n x$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$

2). Разложим $f(t,x)$; $\varphi(x)$ в ряды по собств ф-ям задачи Ш-Л

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \qquad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx$$

$n = 1, 2, \ldots$

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \qquad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x) X_n(x)\,dx$$

$n = 1, 2, \ldots$

3) Подставляем ряды в исходное ур-е и н.у.

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$$

уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n' X_n = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n \underbrace{X_n''}_{=-\lambda_n^2 X_n} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n' X_n = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n^2 T_n X_n + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \left(T_n' + a^2\lambda_n^2 T_n - f_n(t)\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$\forall n = 1, 2 \ldots$

$$T_n' = -a^2\lambda_n^2 T_n + f_n(t) \quad \checkmark$$

н.у

$$u(0,x)=\varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$\forall n = 1, 2 \ldots$

$$T_n(0) = \varphi_n \quad \checkmark$$

4. Решаем задачу для T_n

$$T_n' = -a^2\lambda_n^2 T_n + f_n(t)$$

$$T_n(0) = \varphi_n$$

Решаем однородное ур-е

$$T_n' = -a^2\lambda_n^2 T_n$$

$$\frac{dT_n}{dt} = -a^2\lambda_n^2 T_n \Rightarrow \frac{dT_n}{T_n} = -a^2\lambda_n^2 dt$$

$$\ln T_n = -a^2\lambda_n^2 t + \tilde{A}_n$$

$$T_n(t) = f_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}$$

Решаем неодн. ур-е (Метод вариации постоян)

$$T_n(t) = A_n(t) e^{-a^2\lambda_n^2 t}$$

$$A_n'(t) e^{-a^2\lambda_n^2 t} - \cancel{a^2\lambda_n^2 A_n(t)} e^{-a^2\lambda_n^2 t} = \cancel{-a^2\lambda_n^2 A_n(t)} e^{-a^2\lambda_n t} + f_n(t)$$

$$A_n'(t) = f_n(t) e^{a^2\lambda_n^2 t}$$

$$A_n(t) = \int f_n(t) e^{a^2\lambda_n^2 t} dt + B_n$$

Решение для $T_n(t)$

✓ $T_n(t) = e^{-a^2\lambda_n^2 t}\left(\int f_n(t) e^{a^2\lambda_n t} dt + B_n\right)$ $n = 1, 2 \ldots$

Константа B_n определяется из условия

$$T_n(0) = \varphi_n$$

✓ $B_n = \varphi_n - \left(\int f_n(t) e^{a^2\lambda_n t} dt\right)\Big|_{t=0}$

$T_n(t)$ – полностью определены $\forall n = 1, 2 \ldots$

=> решение исходной задачи

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

Усложняем задачу.

$u_t = a^2 u_{xx} + f(t, x)$ $t > 0$; $x \in (0, l)$

н.у. $u(0, x) = \varphi(x)$

г.у. $u(t, 0) = \mu_1(t)$

$u(t, l) = \mu_2(t)$

$u(t,x) = w(t,x) + v(t,x) \qquad (*)$

$w(t,x)$ подбираем т.ч.

$$\left.\begin{aligned} w(t,0) &= \mu_1(t) \\ w(t,l) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right. \Rightarrow w(t,x) \text{ - известна ф-я}$$

Подставляем $(*)$ в исходную задачу

$$w_t + v_t = a^2 w_{xx} + a^2 v_{xx} + f(t,x) \qquad t>0,\ x\in(0,l)$$

✓ $v_t = a^2 v_{xx} + f_1(t,x)$, $\quad f_1(t,x) = f(t,x) + a^2 w_{xx} - w_t$

н.у. $w(0,x) + v(0,x) = \varphi(x)$

✓ $v(0,x) = \varphi_1(x)$, $\quad \varphi_1(x) = \varphi(x) - w(0,x)$

г.у. $\cancel{w(t,0)} + v(t,0) = \cancel{\mu_1(t)}$

$\cancel{w(t,l)} + v(t,l) = \cancel{\mu_2(t)}$

✓ $v(t,0) = 0$

✓ $v(t,l) = 0$

Задачу для v решать умеем

$\Rightarrow$ найдем v $\Rightarrow$

Решение исходной задачи

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x).$$

Метод интегральных преобразований

$$f \in \{f\} \longleftrightarrow F \in \{F\}$$

$\hat{A}[f] = F$ — прямое преобразование

f - прообраз F (оригинал)

F - образ f (изображение)

$\hat{A}^{-1}[F] = f$ - обратное преобразование

Общий алгоритм

$$\boxed{\text{Исходная задача}} \xrightarrow[\text{преобр}]{\text{интегр}} \boxed{\text{Задача в образах}} \xrightarrow{\text{Решаем}} \boxed{\text{Решение в образах}} \xrightarrow[\text{преобр-е}]{\text{обратное}} \boxed{\text{Решение исходной задачи}}$$

интегральные преобразования ф-ии одной переменной

<u>Def</u> Преобразование, которое каждой ф-ии $f(x)$ ставит в соответствие ф-ии аргумента λ

$$F(\lambda) = \int_a^b \underbrace{K(x,\lambda)}_{\text{ядро}} f(x) \underbrace{\rho(x)}_{\text{весовая ф-я}} dx = \hat{A}[f]$$

называют интегральным преобразованием по переменной x

x - независимая переменная

a, b - пределы преобразования

Def Преобразование, которое восстанавливает $f(x)$ из $F(\lambda)$: $\hat{A}^{-1}[F(\lambda)] = f(x)$

наз. обратным преобразованием.

Преобразование Лапласа

Традиционно применяется по переменной t, но можно проводить преобразование по любой другой переменной, кот. определена на $[0, \infty)$

$$f(t) \xrightarrow{L} F(\lambda)$$ – ф-я комплексного переменного

$\lambda = a + bi$

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty f(t) \underbrace{e^{-\lambda t}}_{\text{ядро}} dt$$ – интегральное преобраз Лапласа

предел преоб

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda$$