Лекция 12   24.11.2020

Уравнения эллиптического типа —

— описывают стационарные процессы

Уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0$$

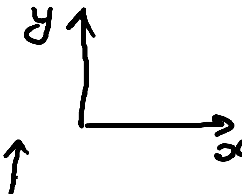
Def Ф-я называется гармонической в области Ω, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Def Неоднородное уравнение Лапласа называют уравнением Пуассона

Оператор Лапласа

2-х мерное пр-во

1. Декартова с.к. $u(x,y)$



$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

2. Полярная с.к. $u(r,\theta)$

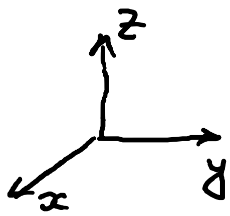
$0 \le \theta < 2\pi$

$r \ge 0$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

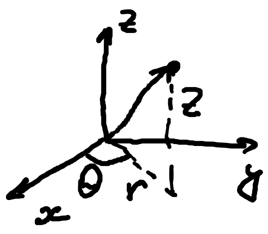
3-х мерное пр-во

1. Декартова с.к. $u(x,y,z)$



$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

2. Цил. с.к. $u(r,\theta,z)$



$0 \le \theta < 2\pi$

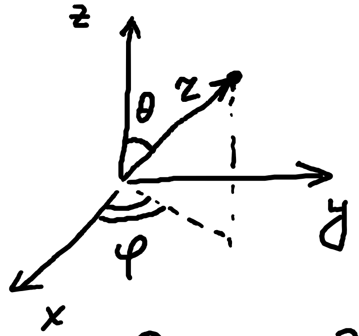
$r \ge 0$

$z \in \mathbb{R}$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}$$

3. Сферич. сист. коорд

$u(r, \theta, \varphi)$



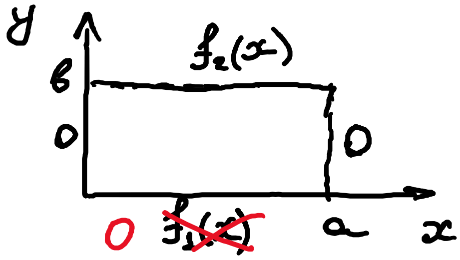
$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi < 2\pi$

$r \geq 0$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Решение уравнения Лапласа в прямоугольной области



$\Delta u = 0$

$u(x, y)$

$0 < x < a$

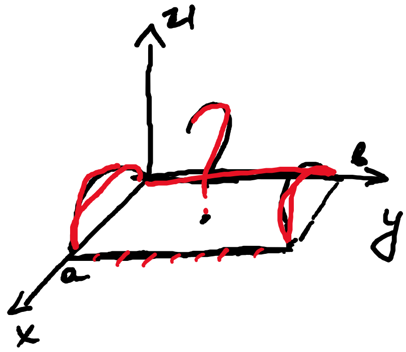
$0 < y < b$

$u_x(x, 0) = \cancel{f_1(x)}\ 0$

$u_x(a, y) = 0$

$u(x, b) = f_2(x)$

$u(0, y) = 0$



$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\Delta u = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$X''Y + Y''X = 0 \quad \Big|: XY$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = C$$

x^* $\quad \forall y \in (0, b)$

$\forall x \in (0, a)$ $\quad y^*$

$X'' = CX$

$Y'' = -CY$

$\lambda^2 = C$!!!

$Y(0) = 0$

$Y(b) = 0$

Г.У

$X(x) \cdot Y(0) = f_1(x)$ $\quad 0$

$X(a) \cdot Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$

$X(x)\, Y(b) = f_2(x)$ $\quad 0$

$X(0)\, Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$$\begin{cases} X'' = CX \\ X(a) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{array}{l} X_n = \sin \lambda_n x \\ \lambda_n = \frac{\pi n}{a}; \quad n = 1, 2, \dots \end{array}$$

Задача для Y

$Y_n'' = \lambda_n^2 Y_n$

$\mu_n^2 = \lambda_n^2 \Rightarrow \mu_n = \pm \lambda_n$

$Y_n = A_n e^{-\lambda_n y} + B_n e^{\lambda_n y}$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_n x \left(A_n e^{-\lambda_n y} + B_n e^{\lambda_n y} \right)$$

$u(x, 0) = f_1(x)$

$u(x, b) = f_2(x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_n x \, (A_n + B_n) = f_1(x) \quad \Bigg| \int_0^a \sin \lambda_k x dx$$

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\lambda_n x \left(A_n e^{-\lambda_n b} + B_n e^{\lambda_n b}\right) = f_2(x)$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2}(A_k + B_k) = \int_0^a f_1(x) \sin\lambda_k x \, dx \\ \frac{a}{2}\left(A_k e^{-\lambda_k b} + B_k e^{\lambda_k b}\right) = \int_0^a f_2(x) \sin\lambda_k x \, dx \end{cases} \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

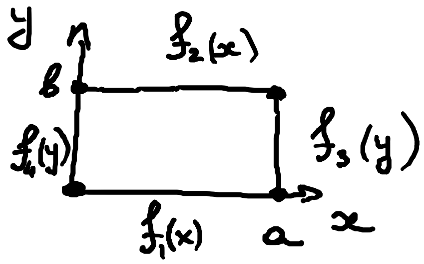
$$\Downarrow$$

Решение алгебраич. системы определяет A_k, B_k $\forall k = 1, 2, \dots$

Ответ $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\lambda_n x \left(A_n e^{-\lambda_n y} + B_n e^{\lambda_n y}\right)$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$; $n = 1, 2, \dots$

Общий случай



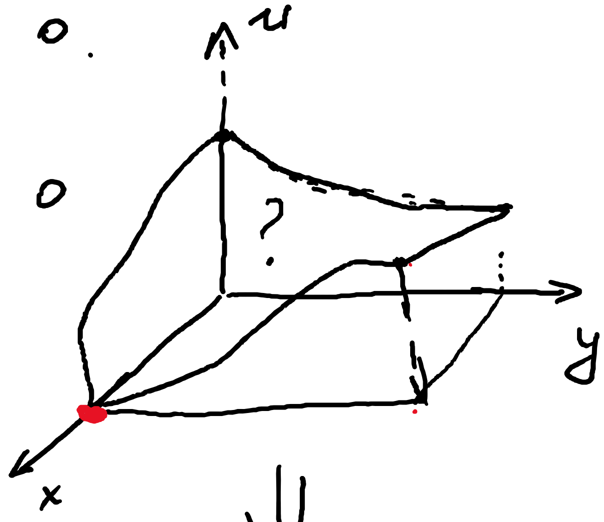
$\Delta u = 0$ $\qquad 0 < x < a$, $0 < y < b$

$u(x,0) = f_1(x)$ $\quad 0$.

$u(a,y) = f_3(y)$ $\quad 0$

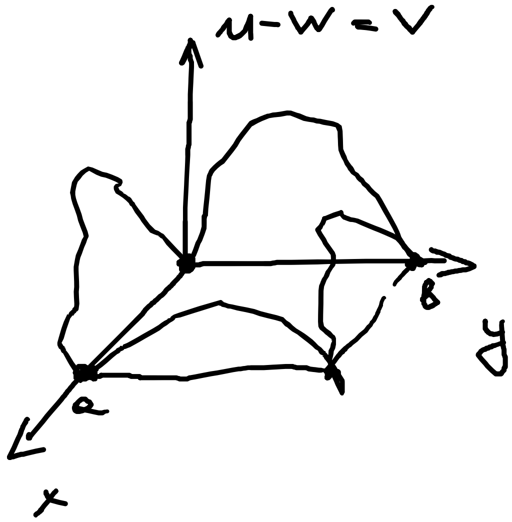
$u(x,b) = f_2(x)$ $\quad 0$

$u(0,y) = f_4(y)$ $\quad 0$



$$\Downarrow$$

$u = V + W$



$$V = V_1 + V_2$$

$$\Delta V_1 = 0$$

$$\Delta V_2 = 0$$