Лекция №2

Решение ДУЧП 1 порядка

Def Лин. дифф. ур. в ч.п. 1-го порядка наз. ур-е вида

$$A_1(x_1, \dots x_n) u_{x_1} + \dots A_n(x_1, \dots x_n) u_{x_n} = G(x_1, \dots x_n, u)$$

A_i – непр. ф-ии, имеющ. ч.п. 1-го порядка, одновр. не обращ. в 0.

Однородные ур-я

$u(x, y)$

$$a u_x + b u_y = 0$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad \text{– ур-е характеристик ОДУ}$$

$g(x, y) = C$ – решение ур-я хар-к

$u(x, y) = G(g(x, y))$ – общее решение исх. задачи.

Замечание 1

a, b – const

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \Rightarrow \int b\,dx = \int a\,dy \Rightarrow bx = ay + C \Rightarrow bx - ay = C$$

$u(x, y) = G(bx - ay)$ – ответ.

Проверка

$$a \cdot G'(bx - ay)'_x + b\,G'(bx - ay)'_y = aG'b + bG'(-a) = 0$$

Замечание 2

НУ и/или ГУ позволяют определить G единств. образом.

Пример

$$\begin{cases} u_x + x u_y = 0 & y \in \mathbb{R},\ x > 0 \\ u(0, y) = 5y \end{cases}$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} \Rightarrow \int x\,dx = \int dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} = y + C \Rightarrow \frac{x^2}{2} - y = C$$

$u(x, y) = G\left(\frac{x^2}{2} - y\right)$ – общее решение

$u(0,y) = G(-y) = 5y$ $\quad$ /* $z=-y \Rightarrow y=-z$ */

$G(z) = -5z$

Ответ $u(x,y) = -5\left(\frac{x^2}{2} - y\right)$.

Неоднородные уравнения

$$\begin{cases} P(x,y,u)u_x + Q(x,y,u)u_y = R(x,y,u) \\ u(x_0,y) = H(y) \end{cases}$$

$F(u\sin x, u^2\cos y) = 0$ – общ. реш.

$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}$ – ур-я характеристик

2-а ОДУ

$$\begin{cases} \psi(x,y,u) = C_1 \\ \varphi(x,y,u) = C_2 \end{cases}$$ – решения ур-ний характеристик

Общее решение ДУЧП в неявном виде

$F(\psi,\varphi) = 0$

Общее решение ДУЧП в явном виде

$$\begin{cases} \psi(x,y) = C_1 \\ \varphi(x,y,u) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \varphi(x,y,u) = f(\psi(x,y))$$

$u(x,y) = \ldots$

Решаем з. Коши

1) подставляем в φ. $x = x_0$

$$\begin{cases} \psi(x_0,y,u) = C_1 \\ \varphi(x_0,y,u) = C_2 \end{cases}$$

2) разрешаем систему отн. y, u

$$\begin{cases} y = \underline{f_1(C_1,C_2)}, \\ u = \underline{f_2(C_1 C_2)}. \end{cases}$$

3) подставляем правые части в нач. усл.

$f_2(C_1 C_2) = H(f_1(C_1 C_2))$

4) Замена $C_1 \to \psi(x, y, u)$
$C_2 \to \varphi(x, y, u)$

$f_2(\psi, \varphi) = H(f_1(\psi, \varphi))$ — решение исх задачи.

Пример

$$\begin{cases} y^2 u_x + xy u_y = x \\ u(0, y) = y^2 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{du}{x}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} \\ \frac{dy}{xy} = \frac{du}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int x\,dx = \int y\,dy \\ \int \frac{dy}{y} = \int du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C \\ \ln y = u + \bar{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{x^2 - y^2}^{\psi} = C_1 \\ \overbrace{u - \ln y}^{\varphi} = C_2 \end{cases}$$

Общее решение в неявн. виде

$F(x^2 - y^2, u - \ln y) = 0$

Общее решение в явном виде

$u - \ln y = f(x^2 - y^2)$

$u(x, y) = \ln y + \underline{\underline{f}}(x^2 - y^2)$

Решаем з. Коши

а). явный вид

$u(0, y) = \ln y + f(-y^2) = y^2$

$f(-y^2) = y^2 - \ln y$ /* $z = -y^2$; $y = \pm\sqrt{-z}$ */

$\underline{\underline{f}}(z) = -z - \ln\sqrt{-z}$

Ответ $u(x, y) = \ln y + y^2 - x^2 - \ln\sqrt{y^2 - x^2}$

б) неявный вид

1) $\begin{cases} -y^2 = C_1 \\ u - \ln y = C_2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = +\sqrt{-C_1} \\ u = C_2 + \ln\sqrt{-C_1} \end{cases}$

3) $C_2 + \ln\sqrt{-C_1} = -C_1$

4) $u - \ln y + \ln\sqrt{y^2 - x^2} = y^2 - x^2$

$u(x,y) = \ln y + y^2 - x^2 - \ln\sqrt{y^2-x^2}$

Приведение ДУЧП 2 порядка к канонич. виду

$u(x,y)$

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1)$$

A, B, C определены в $\Omega \in O_{xy}$, имеют непр. производ. до 2-го порядка. F - непр. ф-я

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases} \qquad (2)$$

ξ, η - дважды непр. диф. и $\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ в Ω

$u(x,y) \to u(\xi,\eta) \Rightarrow u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$

$u_{xx} = (u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \eta_x)'_x = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + u_\xi \xi_{xx} + (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x)\eta_x$

$+ u_\eta \eta_{xx} =$

$= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + \underline{\underline{u_\xi}}\xi_{xx} + \underline{\underline{u_\eta}}\eta_{xx}$

$u_{xy} = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)'_y = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + \underline{\underline{u_\xi}}\xi_{xy} + u_{\eta\xi}\xi_y\eta_x +$

$+ u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \underline{\underline{u_\eta}}\eta_{xy}$

$$u_{yy} = \left(u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\right)'_y = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + \underline{u_{\xi\eta}\eta_y\xi_y} + u_\xi \xi_{yy} +$$

$$+ \underline{u_{\eta\xi}\xi_y\eta_y} + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{\xi\xi}\Big[\underbrace{A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2}_{\bar{A}}\Big] + u_{\xi\eta}\Big[\underbrace{A2\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C2 u_{\eta\xi}\xi_y\eta_y}_{\bar{B}}\Big] +$$

$$u_{\eta\eta}\Big[\underbrace{A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2}_{\bar{C}}\Big] + \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

$$\bar{A} = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$

$$\bar{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\eta_y\xi_y$$

$$\bar{C} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$$\bar{A}u_{\xi\xi} + \bar{B}u_{\xi\eta} + \bar{C}u_{\eta\eta} + \Phi = 0 \qquad (3)$$