Лекция 3 22.09.2020

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{yy} + C(x,y)u_{xy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1)$$

$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ – замена переменных

$$\bar{A}\, u_{\xi\xi} + \check{\bar{B}}\, u_{\xi\eta} + \bar{C}\, u_{\eta\eta} + \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \qquad (2)$$

$$\bar{A} = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$

$$\bar{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\eta_y\xi_y$$

$$\bar{C} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$\bar{A} = 0$:

$$A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \quad \Big| : \xi_y^2$$

$$A\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + B\frac{\xi_x}{\xi_y} + C = 0 \qquad \boxed{t = \frac{\xi_x}{\xi_y}}$$

$$At^2 + Bt + C = 0$$

$\bar{C} = 0$:

$$A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0 \quad \Big| : \eta_y^2$$

$$A\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2 + B\frac{\eta_x}{\eta_y} + C = 0 \qquad \boxed{t = \frac{\eta_x}{\eta_y}} \Rightarrow At^2 + Bt + C = 0$$

1. Уравнения гиперболич. типа

$D = B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$ (1) – ур-е гипер. типа

$At^2 + Bt + C = 0 \Rightarrow t_1, t_2$ – корни

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{\xi_x}{\xi_y} \\ t_2 = \dfrac{\eta_x}{\eta_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{matrix} \text{ – замена}$$

$(2) \Rightarrow$

$$\bar{B} u_{\xi\eta} + \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

$u_{\xi\eta} = \bar{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ — I канонич. форма гип. ур-я

Замена переменных

$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta \\ \beta = \xi - \eta \end{cases} \Rightarrow$ приходим ко II кан. форме гип. ур-я

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Psi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

Пример

$\underbrace{u_{tt} = u_{xx}}\ + f(t, x)$ — одномерное ур-е колебаний

② Уравнения параболич. типа

$D = B^2 - 4AC = 0$ (1) — параболич. типа

$At^2 + Bt + C = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{B}{2A}$

$\begin{cases} t_0 = \frac{\xi_x}{\xi_y} \\ \eta = \underline{\underline{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{A} = 0 \\ \bar{B} = 0 \end{matrix}$

$$\bar{B} = 2A\xi_x \overset{=1}{\eta_x} + B(\xi_x \overset{=0}{\eta_y} + \xi_y \overset{=1}{\eta_x}) + 2C\overset{=0}{\eta_y}\xi_y = 2A\xi_x + B\xi_y =$$

$$= 2At_0\xi_y + B\xi_y = \xi_y(2At_0 + B) = \xi_y(-B + B) = 0$$

$$\bar{C} u_{\eta\eta} + \Phi(\eta, \xi, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

$u_{\eta\eta} = \bar{\Phi}(\eta, \xi, u, u_\xi, u_\eta)$ — канонич. вид параболич. ур-я

Пример

$u_t = u_{xx}$

③ Уравнения эллиптического типа

$D = B^2 - 4AC < 0$ (1) - эл. типа

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Psi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ - канонич. форма эл. ур-я

Пример

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

Схема приведения эл. ур-я к канонич. форме

$A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$ (*) $t = \frac{\xi_x}{\xi_y}$

$At^2 + Bt + C = 0 \Rightarrow k$ - комплексное решение

$\frac{\xi_x}{\xi_y} = k \Rightarrow$ $\xi_x - k\xi_y = 0$ (**) $\Rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-k}$

$\varphi_1(x,y) + i\varphi_2(x,y) = C$

$\xi = F(\varphi_1 + i\varphi_2)$ - решение (**)

Делаем замену

$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y) \\ \eta = \varphi_2(x,y) \end{cases} \rightarrow$ к канонич. виду

Д-ем

$\gamma = \varphi_1(x,y) + i\varphi_2(x,y)$ - решение (**)

Подставляем γ в (*)

$A[(\varphi_1)'_x + i(\varphi_2)'_x]^2 + B[(\varphi_1)'_x + i(\varphi_2)'_x][(\varphi_1)'_y + i(\varphi_2)'_y] +$

$C[(\varphi_1)'_y + i(\varphi_2)'_y]^2 = 0$

$A(\varphi_1)'^2_x + 2Ai(\varphi_1)'_x(\varphi_2')_x - A(\varphi_2)'^2_x + B(\varphi_1)'_x(\varphi_1)'_y + iB((\varphi_1)'_x(\varphi_2)'_y +$

$+ (\varphi_2)'_x(\varphi_1)'_y) - B(\varphi_2)'_x(\varphi_2)'_y + C(\varphi_1)'^2_y + 2Ci(\varphi_1)'_y(\varphi_2)'_y - C(\varphi_2)'^2_y = 0$

$A(\varphi_1)'^2_x - A(\varphi_2)'^2_x + B(\varphi_1)'_x(\varphi_1)'_y - B(\varphi_2)'_x(\varphi_2)'_y + C(\varphi_1)'^2_y - C(\varphi_2)'^2_y +$

$+ i\{2A(\varphi_1)'_x(\varphi_2)'_x + B(\varphi_1)'_x(\varphi_2)'_y + B(\varphi_2)'_x(\varphi_1)'_y + 2C(\varphi_1)'_y(\varphi_2)'_y = 0$

$$A(\varphi_1)_x'^2 + B(\varphi_1)_x'(\varphi_1)_y' + C(\varphi_1)_y'^2 = A(\varphi_2)_x'^2 + B(\varphi_2)_x'(\varphi_2)_y' + C(\varphi_3)_y'^2$$

$$\underbrace{A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2}_{\bar{A}=0} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

$$2A\xi_x\eta_x + B\xi_x\eta_y + B\eta_x\xi_y + 2C\xi_y\eta_y = \bar{B}$$

Вывод уравнения малых колебаний струны

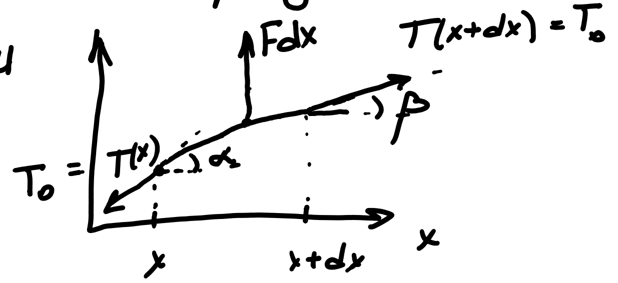
Предположения

1. Концы струны закреплены
2. Струна натянута. Сила натяжения струны T_0
3. Длина струны l
4. В состоянии равновесия, без внешних воздействий, струна вытянута вдоль оси x
5. Перемещение струны опис. ф-ей $u(t,x)$

6. $\rho(x)$ - плотность струны
7. $F(t,x)$ - линейная плотность внешних сил

$F(t,dx)dx \perp Ox$

Выделим произв. малый участок струны



II з. Ньютона

$$\rho(x)dx\, u_{tt} = -T_0\sin\alpha + Fdx + T_0\sin\beta$$

Для малых колебаний справедливо

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = u_x(x)$$

$$\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta = u_x(x+dx)$$

$$\rho(x)\,\cancel{dx}\,u_{tt} = \cancel{dx}\,T_0\left(\frac{u_x(x+dx) - u_x(x)}{dx}\right) + F\,\cancel{dx}$$

$$\rho(x)\,u_{tt} = T_0\,u_{xx} + F$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x)\ ; \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho(x)}\ ; \quad f(t,x) = \frac{F(t,x)}{\rho(x)}$$

уравнение вынужденных колебаний струны.

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$ – ур-е свободных колебаний струны