Лекция 4

Начальные условия

$u(0,x)=\varphi(x)$ – начальное смещение струны

$u_t(0,x)=\psi(x)$ – начальные скорости каждой т. струны

Граничные условия

1. I рода (з. Дирихле)

$u(t,0)=\mu_1(t)$
$u(t,l)=\mu_2(t)$ – законы перемещения граничных точек $x=0$ и $x=l$

$u(t,0)=0$
$u(t,l)=0$ – границы струны жестко закреплены

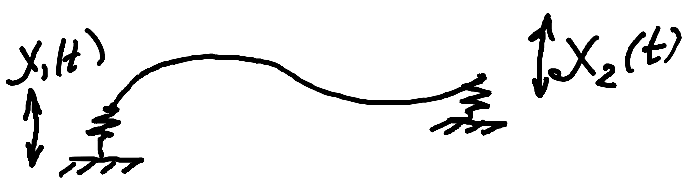
2. II рода (з. Неймана)

$u_x(t,0)=\nu_1(t)$
$u_x(t,l)=\nu_2(t)$ – силы, действующие на концы струны

$u_x(t,0)=0$
$u_x(t,l)=0$ – концы струны перемещаются свободно.

3. III рода (з. Робена)

$u(t,0)+h_1\,u_x(t,0)=\chi_1(t)$
$u(t,l)+h_2\,u_x(t,l)=\chi_2(t)$



Упруго закрепленные концы струны перемещаются по закону $\chi_1(t)$ или $\chi_2(t)$.

$u(t,0)+h_1 u_x(t,0)=0$

$u_x(t,0)=\underbrace{-\frac{1}{h_1}u(t,0)}_{\text{сила упругости}}$

4. Смешанное гр. усл. –
– сочетание гр. усл. разного рода.

Формула Даламбера

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad t>0 \quad x \in R \quad (*) \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

1. Приведем ур-е (*) к I канонич. форме

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = u_\xi a - u_\eta a$$

$$u_{tt} = a(u_\xi - u_\eta)'_t = a(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t - u_{\eta\xi}\xi_t - u_{\eta\eta}\eta_t) =$$

$$= a(u_{\xi\xi}a - u_{\xi\eta}a - u_{\eta\xi}a + u_{\eta\eta}a) =$$

$$= \underbrace{a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})}$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = (u_\xi + u_\eta)'_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x =$$

$$= \underbrace{u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}}$$

подставляем $\underbrace{\quad}$ в (*)

$$\cancel{a^2}(\cancel{u_{\xi\xi}} - 2u_{\xi\eta} + \cancel{u_{\eta\eta}}) = \cancel{a^2}(\cancel{u_{\xi\xi}} + 2u_{\xi\eta} + \cancel{u_{\eta\eta}})$$

$u_{\xi\eta} = 0$ (**) – ур-е (*) в I канонич. форме

2. Решаем (**)

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$\int u_{\xi\eta}\, d\eta = \int 0\, d\eta \Rightarrow u_\xi = f(\xi)$$

$$\int u_\xi\, d\xi = \overbrace{\int f(\xi)\, d\xi}^{F(\xi)} \Rightarrow u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta) -$$

– общее решение (**)

Обратная замена

$$u(t,x) = F(x+at) + G(x-at) \text{ – общее решение } (*)$$

3. Подставляем решение в нач. усл.

$$u(0,x) = F(x) + G(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(0,x) = F'(x)\cdot a + G'(x)(-a) = \psi(x)$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ aF'(x) - aG'(x) = \psi(x) \end{cases} \qquad \int_{x_0}^{x} d\xi$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ \int_{x_0}^{x} F'(\xi) - G'(\xi)\, d\xi = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi \end{cases} \qquad \cancel{\int_{x_0}^{x} f'(\xi)\, d\xi = f(x)}$$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ F(x) - G(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + C \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{C}{2} \quad ✓$$

$$G(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi - \frac{C}{2} \quad ✓$$

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \cancel{\frac{C}{2}} + \frac{\varphi(x-at)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(\xi)\,d\xi-\cancel{\frac{c}{2}}=$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(\xi)\,d\xi=$$

$$\boxed{u(t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi}$$

– ф-ла Даламбера

Т. Коши - Ковалевской (о $\exists!$ з. Коши для ДУЧП)

Существует единственное аналитическое в окрестности т. $(x_1^0 \dots x_n^0)$ решение ДУЧП, разрешенного относительно одной из старших производных

$$\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p}=f\left(x_1,\dots x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots\frac{\partial^p u}{\partial x_2^p},\dots\frac{\partial^p u}{\partial x_n^p}\right)$$

с заданными условиями

$$u(x_1^0,x_2,\dots x_n)=\varphi_0(x_2,\dots x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^0,x_2,\dots x_n)=\varphi_1(x_2,\dots x_n)$$

. . . . - - - - - - -

$$\frac{\partial^{p-1} u(x_1^0,x_2,\dots x_n)}{\partial x_1^{p-1}}=\varphi_{p-1}(x_2,\dots x_n)$$

если

1) ф-ии $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{p-1}$ являются аналитическими ф-ями в окр т. $(x_2^0 \dots x_n^0)$

2) ф-я f является аналит. ф-ей своих аргументов

Def Ф-я $f(x_1, \dots x_n)$ наз. аналитической, если она совпадает с рядом Тейлора в окр. любой т. обл. определения.

Th Устойчивости з. Коши

Для любого промежутка времени $[0, t_0]$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon, t_0)$: любые 2-а решения $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ ур-я

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

будут отличаться меньше, чем на ε

$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| < \varepsilon$, если только нач. условия

$$\begin{cases} u_1(0,x) = \varphi_1(x) \\ (u_1)'_t(0,x) = \psi_1(x) \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_2(0,x) = \varphi_2(x) \\ (u_2)'_t(0,x) = \psi_2(x) \end{cases}$$

отличаются меньше, чем на δ

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta \; ; \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$$

$$u_1(t,x) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(\xi)\, d\xi$$

$$u_2(t,x) = \frac{\varphi_2(x+at) + \varphi_2(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_2(\xi)\, d\xi$$

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| \le \frac{1}{2}|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)| + \frac{1}{2}|\varphi_1(x-at) -$$
$$- \varphi_2(x-at)| + \frac{1}{2a}\left|\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)\, d\xi\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)|\,d\xi <$$

$$< \delta + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \delta\, d\xi = \delta + \frac{1}{2a}\delta\, 2at = \delta(1+t) \leq \delta(1+t_0)$$

$$\varepsilon = \delta(1+t_0) \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0} \Rightarrow |u_1(t,x) - u_2(t,x)| < \varepsilon$$

◄

Св-ва решений гиперболич. уравнений, определенных на ∞ области

Св-во 1° Если нач условия в з. Коши на $(-\infty, \infty)$ являются нечетными ф-ми относительно $x=0$, то $u(t,0)=0$

► $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ $\quad t>0, \quad x \in R$

$$\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \varphi(-x) &= -\varphi(x) \\ \psi(-x) &= -\psi(x) \end{aligned}$$

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi$$

$$u(t,0) = \underbrace{\frac{\varphi(at) + \overset{-\varphi(at)}{\varphi(-at)}}{2}}_{=0} + \frac{1}{2a}\underbrace{\int_{-at}^{at} \psi(\xi)\,d\xi}_{=0} = 0$$

◄

Св-во 2° Если нач. данные в з. Коши на $(-\infty, \infty)$ являются четными ф-ми, то

$u_x(t,0) = 0$

▶ $u_x(t,0) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\varphi'(at) + \overbrace{\varphi'(-at)}^{= -\varphi'(at)}}_{=0}\Big] + \frac{1}{2a}\Big[\underbrace{\psi(at) - \psi(-at)}_{=0}\Big] =$

$\varphi'(z)$ - нечетн. ф-я, т.к. $\varphi(z)$ - четн. ф. | $\psi(-z) = \psi(z)$

$= 0$ ◀