Лекция №7

20.10.2020

Л.Г. \ П.Г.	I	II
I	$X_n=\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{\pi n}{l}$, $n=1,2$	$X_n=\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi n}{l}$, $n=0,1,\dots$
II	$X_n=\cos\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi n}{l}$, $n=0,1,\dots$	$X_n=\cos\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{\pi n}{l}$, $n=0,1,\dots$

$$\rho(x)u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u, \quad t>0, \quad 0<x<l$$

$$\rho(x)u_{tt}=L[u]$$

Н.У. $u(0,x)=\varphi(x)$

$u_t(0,x)=\psi(x)$

Г.У. $u(t,0)=0$

$u(t,l)=0$

$k(x), q(x), \rho(x)$ – непрерывны на $0\le x\le l$;

$k(x)>0$; $\rho(x)>0$; $q(x)\ge 0$

$$u(t,x)=T(t)\cdot X(x)$$

подставляем в уравнение

$$\rho(x)T''X=T\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)X'\right)-qTX \quad \Big|:TX\rho(x)$$

$$\frac{T''}{T}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)X'\right)\frac{1}{\rho(x)X}-\frac{q}{\rho(x)}=C=-\lambda^2$$

$$T''=-\lambda^2 T;$$

З. Ш-Л. $\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}\right)-q(x)X=-\lambda^2\rho(x)X\\ X(0)=0\\ X(l)=0\end{cases}$

$$L[X] = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}\right) - q(x)X$$

З. Ш-Л
$$\begin{cases} L[X] + \lambda^2 \rho(x) X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Т. Стеклова (теорема о разложимости ф-ий)

Произвольная ф-я $F(x)$, дважды непр. дифф. и удовл. гран. усл. $F(0)=0$; $F(l)=0$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящ. ряд по собств. ф-ям з. Ш-Л $(*)$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x) \quad ; \quad \{X_n\} \text{ - собств. ф-ии } (*)$$

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l F(x) X_n(x) \rho(x)\, dx$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x)\, dx$$

Решение неоднородных волновых уравнений на отрезке

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x) \qquad t>0; \quad 0<x<l$$

н.у. $u(0,x) = \varphi(x)$

$u_t(0,x) = \psi(x)$

г.у. $u(t,0) = 0$

$u(t,l) = 0$

$u(t,x) = X(x)\,T(t)$

1. Находим собств. ф-ии и собств зн-я з. Ш-Л, соответствующей однородн. ур-ию:

$$X_n'' = -\lambda_n^2 X_n$$
$$X_n(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_n = \sin \lambda_n x$$
$$X_n(l) = 0 \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

2. Раскладываем ф-ии $f(t,x)$; $\varphi(x)$; $\psi(x)$ в ряд по соб. ф-ям з. Ш-Л

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, X_n(x) \quad ; \quad f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l f(t,x) X_n(x)\,dx$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, X_n(x) \quad ; \quad \varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n\, X_n(x) \quad ; \quad \psi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \psi(x) X_n(x)\,dx$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,dx$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x)$$

3. Подставляем в уравнение и нач. усл-е ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'' X_n = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n \underbrace{X_n''}_{=-\lambda_n^2 X_n} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'' X_n = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 T_n X_n + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'' + a^2 \lambda_n^2 T_n - f_n(t)\right) X_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T_n'' + a^2 \lambda_n^2 T_n - f_n(t) = 0, \quad n = 1, 2 \ldots \qquad \checkmark$$

Н.У. $u(0,x) = \varphi(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n(0) - \varphi_n) X_n(x) = 0$$

$$T_n(0) - \varphi_n = 0 \qquad n = 1, 2, \dots$$

✓

$$u_t(0, x) = \psi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(0) - \psi_n\right) X_n(x) = 0$$

✓

$$T_n'(0) - \psi_n = 0, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Т.о. $\forall n = 1, 2 \dots$ имеем задачу

$$\begin{cases} T_n'' + a^2 \lambda_n^2 T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

4. Решаем задачу для $T_n(t)$

Решаем однородное ур-е

$$T_n'' = -a^2 \lambda_n^2 T_n \quad \Rightarrow \mu_n^2 = -a^2 \lambda_n^2 \quad \Rightarrow \mu_n = \pm i a \lambda_n$$

$$T_n(t) = A_n \sin(a\lambda_n t) + B_n \cos(a\lambda_n t) \qquad (**)$$

Вариация постоянных

$$T_n(t) = A_n(t) \sin(a\lambda_n t) + B_n(t) \cos(a\lambda_n t)$$

$$\begin{cases} A_n' \sin(a\lambda_n t) + B_n' \cos(a\lambda_n t) = 0 \\ A_n' a\lambda_n \cos(a\lambda_n t) - B_n' a\lambda_n \sin(a\lambda_n t) = f_n(t) \end{cases}$$

$$B_n' = -A_n' \frac{\sin(a\lambda_n t)}{\cos(a\lambda_n t)}$$

$$A_n' a\lambda_n \cos(a\lambda_n t) + A_n' a\lambda_n \frac{\sin^2(a\lambda_n t)}{\cos(a\lambda_n t)} = f_n(t)$$

$$A_n' a\lambda_n \left(\frac{\cos^2(a\lambda_n t) + \sin^2(a\lambda_n t)}{\cos(a\lambda_n t)} \right) = f_n(t)$$

$$A_n' = \frac{f_n(t)}{a\lambda_n}\cos(a\lambda_n t)$$

$$B_n' = -\frac{f_n(t)}{a\lambda_n}\cos(a\lambda_n t)\,\frac{\sin(a\lambda_n t)}{\cos(a\lambda_n t)} = -\frac{f_n(t)}{a\lambda_n}\sin(a\lambda_n t)$$

$$A_n = \frac{1}{a\lambda_n}\int f_n(t)\cos(a\lambda_n t)\,dt + C_n$$

$$B_n = -\frac{1}{a\lambda_n}\int f_n(t)\sin(a\lambda_n t)\,dt + D_n$$

A_n, B_n подставляем в (**)

$$T_n(t) = \left[\frac{1}{a\lambda_n}\int f_n(t)\cos(a\lambda_n t)\,dt + C_n\right]\sin(a\lambda_n t) +$$

$$+\left[-\frac{1}{a\lambda_n}\int f_n(t)\sin(a\lambda_n t)\,dt + D_n\right]\cos a\lambda_n t$$

– общее решения задач для $T_n(t)$, $n=1,\ldots$

Для определения C_n и D_n подставляем $T_n(t)$ в условия $T_n(0)=\varphi_n$, $T_n'(0)=\psi_n$

$\Rightarrow T_n(t)$ полностью определена $\forall n=1,\ldots$

Ответ: $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,X_n(x)$

Усложняем.

Неоднородные гранич. усл.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x) \qquad t>0; \quad x \in (0, \ell)$$

н.у. $u(0,x) = \varphi(x)$

$u_t(0,x) = \psi(x)$

г.у. $u(t,0) = \mu_1(t)$

$u(t,\ell) = \mu_2(t)$

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$$

$w(t,x)$ – любая функция, удовлетворяющая гран. условиям

$$\left.\begin{array}{l} w(t,0) = \mu_1(t) \\ w(t,\ell) = \mu_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow w(t,x) \text{ – известная ф-я}$$

подставим в исходн. задачу вместо u $v + w \to$ известна

$$v_{tt} + w_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + f(t,x)$$

$$\boxed{v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(t,x);} \qquad \tilde{f}(t,x) = f(t,x) + a^2 w_{xx} - w_{tt}$$

$$t>0; \quad x \in (0, \ell)$$

н.у. $\begin{cases} v(0,x) + w(0,x) = \varphi(x) \\ v_t(0,x) + w_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$

$$\boxed{\begin{cases} v(0,x) = \tilde{\varphi}(x) \\ v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x) \end{cases}} \qquad \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - w(0,x) \\ \tilde{\psi}(x) = \psi(x) - w_t(0,x) \end{array}$$

г.у. $\begin{cases} v(t,0) + \cancel{w(t,0)} = \cancel{\mu_1(t)} \\ v(t,\ell) + \cancel{w(t,\ell)} = \cancel{\mu_2(t)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} v(t,0) = 0 \\ v(t,\ell) = 0 \end{cases}}$

Задачу для v решать умеем.

Ответ: $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$