Лекция 8 27.10.2020.

# Единственность решения краевых задач для гиперболических уравнений

$u(t,x)$ - определена $G=[0,T]\times[0,l]$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u+f(t,x) \qquad (1)$$

$k(x)\geq k_0>0$; $\rho(x)\geq\rho_0>0$; $q(x)\geq 0$

н.у. $u(0,x)=\varphi(x)$
$u_t(0,x)=\psi(x)$ (2)

г.у. $h_1 u(t,0)-H_1 u_x(t,0)=\mu_1(t)$
$h_2 u(t,l)+H_2 u_x(t,l)=\mu_2(t)$ (3)

$h_1, h_2, H_1, H_2\geq 0$; $h_1+H_1>0$; $h_2+H_2>0$

**Т.** Единственности решения задачи (1)-(3)

Задача (1)-(3) имеет единственное решение, если
1) $u(t,x)$ - непрерывна и имеет непрерывные производные до второго порядка включительно в $G$
2) Коэф-ты $\rho(x)$; $k(x)$; $k'(x)$, $q(x)$ непрерывные ф-ции при $0\leq x\leq l$.

▶ д/п Предположим, что $\exists$ два решения (1)-(3)

$u_1(t,x)$; $u_2(t,x)$ - решения (1)-(3)

$\vartheta=u_1(t,x)-u_2(t,x)$

$u_1$ и $u_2$ подставим в (1)-(3)

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]-q(x)u_1+f(t,x)$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]-q(x)u_2+f(t,x)$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right] - q(x)\vartheta \qquad (4)$$

н.у. $u_1(0,x) = \varphi(x)$ $\qquad u_2(0,x) = \varphi(x)$

$u_{1_t}(0,x) = \psi(x)$ $\qquad u_{2_t}(0,x) = \psi(x)$

$$\vartheta(0,x) = 0 \qquad (5)$$
$$\vartheta_t(0,x) = 0$$

г.у. $h_1 u_1(t,0) - H_1 u_{1x}(t,0) = \mu_1(t)$

$h_2 u_1(t,l) + H_2 u_{1x}(t,l) = \mu_2(t)$

$h_1 u_2(t,0) - H_1 u_{2x}(t,0) = \mu_1(t)$

$h_2 u_2(t,l) + H_2 u_{2x}(t,l) = \mu_2(t)$

$$h_1\vartheta(t,0) - H_1\vartheta_x(t,0) = 0 \qquad (6)$$
$$h_2\vartheta(t,l) + H_2\vartheta_x(t,l) = 0$$

Пр. д-ть (4) - (6) имеет решение $\vartheta \equiv 0 \quad \forall t, x \in G$

Рассмотрим вспомогательную ф-цию

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [\rho(x)\vartheta_t^2 + k(x)\vartheta_x^2 + q(x)\vartheta^2]\,dx \qquad (7)$$

- продифф. по $t$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^l [\rho(x)2\vartheta_t \cdot \vartheta_{tt} + k(x)2\vartheta_x\vartheta_{xt} + q(x)2\vartheta\vartheta_t]\,dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l [\rho(x)\vartheta_t\vartheta_{tt} + k(x)\vartheta_x\vartheta_{xt} + q(x)\vartheta\vartheta_t]\,dx$$

- проинтегрир. среднее слагаемое по частям

$$\int_0^l k(x)\vartheta_x \vartheta_{xt}\,dx = \int_0^l k(x)\vartheta_x\, d\vartheta_t =$$

$$= k(x)\vartheta_x\vartheta_t\Big|_0^l - \int_0^l \vartheta_t\, d(k(x)\vartheta_x) =$$

$$= k(x)\vartheta_x\vartheta_t\Big|_0^l - \int_0^l (k(x)\vartheta_x)'_x\, \vartheta_t\, dx$$

– подставляем в $\frac{dE}{dt}$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \vartheta_t \underbrace{\left[\rho(x)\vartheta_{tt} - (k(x)\vartheta_x)'_x + q(x)\vartheta\right]}_{=0 \text{ в силу } (4)} dx +$$

$$+ k(x)\vartheta_x\vartheta_t\Big|_0^l$$

$$\frac{dE}{dt} = k(x)\vartheta_x\vartheta_t\Big|_0^l$$

– Воспользуемся гран. усл. (6)

$$\frac{dE}{dt} = k(l)\vartheta_x(t,l)\vartheta_t(t,l) - k(0)\vartheta_x(t,0)\vartheta_t(t,0) =$$

$$= /*\ \vartheta_x(t,l) = -\frac{h_2}{H_2}\vartheta(t,l) = -h\vartheta(t,l)$$

$$\vartheta_x(t,0) = \frac{h_1}{H_1}\vartheta(t,0) = H\vartheta(t,0)\ */ =$$

$$= -k(l)h\,\vartheta(t,l)\vartheta_t(t,l) - k(0)H\vartheta(t,0)\vartheta_t(t,0) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[k(l)h\,\vartheta^2(t,l) + k(0)H\,\vartheta^2(t,0)\right]$$

Т.о.

$$E(t) = -\frac{1}{2}\left[k(l)h\,\vartheta^2(t,l) + k(0)H\,\vartheta^2(t,0)\right]$$

$$E(t) \leq 0$$

из (7) $\Rightarrow E(t) \geq 0$

$\Rightarrow E(t) \equiv 0 \Rightarrow$

Подинтегральная ф-я в (7) = 0

$$\rho(x)\vartheta_t^2 + k(x)\vartheta_x^2 + q(x)\vartheta^2 = 0 \Rightarrow$$

$\vartheta_t(t,x) = 0$; $\vartheta_x(t,x) = 0 \Rightarrow \vartheta = const$

Согласно н.у. (5) $\vartheta(0,x) = 0 \Rightarrow \vartheta \equiv 0$

$u_1 = u_2$

## Некоторые св-ва задачи Ш-Л

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u$$

$$\begin{cases} L[X] = -\lambda^2\rho(x)X \\ C_1X(0) - C_2X'(0) = 0 \\ C_3X(\ell) + C_4X'(\ell) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$\underline{x \in [0,\ell]}$

$X(x)$

$C_1 + C_2 > 0$

$C_3 + C_4 > 0$

$C_1, C_2, C_3, C_4 \geq 0$

Вывод ф-лы Грина:

$u(x)$; $\vartheta(x)$ – произвольные ф-ии, дважды непр-диф на $(a,b)$ и имеют непр произв на $[a\ b]$

$$uL[\vartheta] - \vartheta L[u] = u\left[(k(x)\vartheta')' - q(x)\vartheta\right] - \vartheta\left[(k(x)u')' - q(x)u\right] =$$

$$= u(k\vartheta')' - \vartheta(ku')' = u(k'\vartheta' + k\vartheta'') - \vartheta(k'u' + ku'') =$$

$$= k(u\vartheta'' - \vartheta u'') + k'(u\vartheta' - \vartheta u') = \left[k\cdot(u\vartheta' - \vartheta u')\right]'$$

Ф-ла Грина

$$uL[v]-vL[u]=[k(uv'-vu')]'$$

Проинтегрируем по $x$ от $a$ до $b$

$$\boxed{\int_a^b uL[v]-vL[u]\,dx = k(x)(uv'-vu')\Big|_a^b} \qquad (9)$$

1° Собств. ф-ции $\{X_m(x)\}$ задачи Ш-Л (8) ортогональны с весом $\rho(x)$ на $[0,l]$

$$\int_0^l \rho(x)X_m(x)X_k(x)\,dx=0 \qquad m\neq k$$

▶ Положим в формуле (9)

$u(x)=X_m(x)$ ; $v(x)=X_k(x)$

$$\int_0^l X_mL[X_k]-X_kL[X_m]=k(x)\underbrace{\left[X_mX_k'-X_m'X_k\right]}_{A}\Big|_0^l$$

Оценим $A$ для гран. усл. различного типа

I-го рода

$$\begin{cases} X_i(0)=0 \\ X_i(l)=0 \end{cases} \quad i=m,k$$

$$A=\underbrace{X_m(l)}_{=0}X_k'(l)-X_m'(0)\underbrace{X_k(0)}_{=0}=0$$

II-го рода

$$\begin{cases} X_i'(0)=0 \\ X_i'(l)=0 \end{cases} \quad i=m,k$$

$$\mathcal{J}=X_m(l)\underbrace{X_k'(l)}_{=0}-\underbrace{X_m'(0)}_{=0}X_k(0)=0$$

III-го рода

$$\begin{cases} C_1X_i(0)-C_2X_i'(0)=0 \\ C_3X_i(l)+C_4X_i'(l)=0 \end{cases} \quad i=m,k \qquad X_i'(0)=\frac{C_1}{C_2}X_i(0) \quad X_i'(l)=-\frac{C_3}{C_4}X_i(l)$$

$$\mathcal{J}=X_mX_k'-X_m'X_k\Big|_0^l=\left[X_m(l)X_k'(l)-X_m'(l)X_k(l)\right]-$$

$$-\left[X_m(0)X_k'(0)-X_m'(0)X_k(0)\right]=\left[-X_m(l)\frac{C_3}{C_4}X_k(l)+\frac{C_3}{C_4}X_m(l)X_k(l)\right]$$

$$-\left[X_m(0)\frac{C_1}{C_2}X_k(0)-\frac{C_1}{C_2}X_m(0)X_k(0)\right]=0$$

т.о для любых граничн. условий

$$\int_0^l X_mL[X_k]-X_kL[X_m]\,dx=0$$

$$L[X_i]=-\lambda_i^2\rho(x)X_i$$

$$\int_0^l -X_m\lambda_k^2\rho(x)X_k+X_k\lambda_m^2\rho(x)X_m\,dx=$$

$$=\int_0^l X_m\rho(x)X_k(\lambda_m^2-\lambda_k^2)\,dx=(\lambda_m^2-\lambda_k^2)\int_0^l X_m\rho(x)X_k\,dx=0$$

$$\lambda_m\neq\lambda_k \Rightarrow \int_0^l X_mX_k\rho(x)=0$$