Лекция 9 03.11.2020

Уравнения пораболического типа

Уравнение диффузии / уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \qquad /* \ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \ */$$

u - концентрация

u - температура

$a^2 = D$ - коэффициент диффузии

$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ - коэф. температуропроводности

λ - коэф. теплопроводности

c - удельная теплоемкость

ρ - плотность вещества

Внутренний источник тепла / концентрации

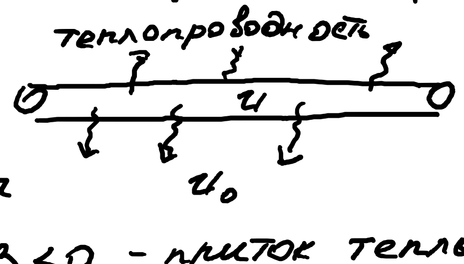
$$u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x) \quad \text{(в одномерном простр-ве)}$$

$f(t,x)$ - плотность потока тепла/конц.

$$u_t = a^2 \Delta u + f(t,x,y,z)$$

Теплообмен ч/з боковую поверхность (обмен концентрации)

$$u_t = a^2 u_{xx} - \beta(u - u_0) \quad \text{(в одномерном пр-ве)}$$



u - температура стержня

u_0 - температуре среды

$\beta > 0$ - отток тепла; $\beta < 0$ - приток тепла

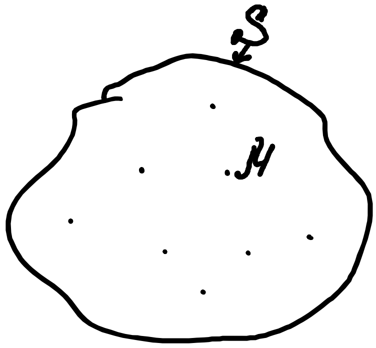
В трехмерном пр-е

$$u_t = a^2 \Delta u - \beta(u - u_0)$$

В частном случае, когда температура/концентрация не меняется со временем

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{— ур-е Лапласа} \\ \Delta u = -f & \text{— ур-е Пуассона} \end{array}\right\} \text{ур-я эл. типа}$$

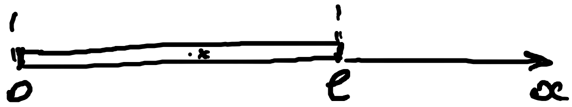
1. Начальные условия



$M(x, y, z)$

$u(0, M) = \varphi(M)$ —

— начальное распред температуры/конц
/* 3-х мерн. об */



$u(0, x) = \varphi(x)$

/* 1-мерн. пр-во */

2. Граничные усл-я

<u>I-рода</u>

На границе поддерживается определенная температура/конц

$u\big|_S = \mu(t, S)$ /* 3-х мерн. пр-во */

$u(t, 0) = \mu_1(t)$

$u(t, l) = \mu_2(t)$

/* 1 мерн. пр-во */

<u>II-рода</u>

Через границу подается тепловой/концентрационный поток.

ν — плотность потока ч/з границу

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \frac{\nu(t, S)}{\lambda}$$ /* 3-х мерн. пр-во */

$$u_x(t, 0) = \frac{\nu_1(t)}{\lambda}$$

$$u_x(t, l) = \frac{\nu_2(t)}{\lambda}$$

/* 1 мерн. пр-во */

III рода

Теплообмен / обмен концентр. с внешней средой, температура / конц которой известна

$Q(t)$ – темп / конц. внешн. среды

H – коэф. теплообмена

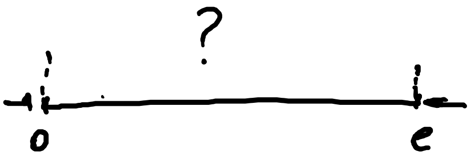
$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{H}{\lambda} u\right)\Big|_S = \frac{H}{\lambda} Q(t)$$ /* 3-х мерн. обл */

$$u_x(t,0) + \frac{H_1}{\lambda} u(t,0) = \frac{H_1}{\lambda} Q_1(t)$$ /* 1-мерн. пр-во */

$$u_x(t,\ell) + \frac{H_2}{\lambda} u(t,\ell) = \frac{H_2}{\lambda} Q_2(t)$$

Решение уравнений параболического типа на отрезке

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad t>0; \quad 0<x<\ell$$



н.у. $u(0,x) = \varphi(x)$

г.у. $u(t,0) = 0$

$u_x(t,\ell) = 0$

Метод разделения переменных

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

$$T'X = a^2 T X'' \qquad \Big|: TXa^2$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = C$$

$t = t_0 \qquad \forall x \in (0,\ell)$

$$X'' = CX \qquad T' = a^2 C T$$

г.у. $T(t)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$T(t)X'(\ell) = 0 \Rightarrow X'(\ell) = 0$

$$X'' = CX$$
$$X(0) = 0 \qquad \text{– задача Ш-Л}$$
$$X'(l) = 0$$

$$X_n = \sin \lambda_n x \qquad n = 0, 1, \dots$$
$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}$$

$$C = -\lambda^2$$
$$X_n = \sin \lambda_n x$$
$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решаем задачу для T

$$T_n' = -a^2 \lambda_n^2 T_n$$
$$\frac{dT_n}{dt} = -a^2 \lambda_n^2 T_n \Rightarrow \int \frac{dT_n}{T_n} = \int -a^2 \lambda_n^2 \, dt$$
$$\ln T_n = -a^2 \lambda_n^2 t + \tilde{C}_n$$
$$T_n = C_n^* e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}$$

Общее решение исходной задачи

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-a^2 \lambda_n t} \overbrace{\sin \lambda_n x}^{X_n}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}}$$

0

Нач. усл.:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \overbrace{\sin \lambda_n x}^{X_n} = \varphi(x)$$

$$\int_0^l \sin \lambda_k x \, dx$$

$$C_n^* \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x) \overbrace{\sin \lambda_n x}^{X_n} \, dx$$

$$\boxed{C_n^* = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \underbrace{\sin \lambda_n x}_{X_n} \, dx} \quad \forall n = 1, \dots$$