Решение волнового уравнения на отрезке.

$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad t>0 \qquad 0<x<l$

НУ $\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \qquad 0<x<l$

ГУ $\begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,l) = 0 \end{cases}$

Метод разделения переменных (метод Фурье)

Условия применения:

1) 2 границы
2) ур-ние линейное и однородное
3) ГУ линейные и однородные.

Суть метода: $u(t,x) = T(t)X(x)$, т.е. надо найти все ненулевые решения $u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x)$, а общее решение — это линейная комбинация таких решений.

Подставляем $u(t,x) = T(t)X(x)$ в ур-ние и ГУ

ур-ние: $T''X = a^2 T X'' \quad / a^2 TX$ ГУ: $\begin{cases} T(t)X(0) = 0 \\ T(t)X(l) = 0 \end{cases}$

$\dfrac{T''}{a^2 T} = \dfrac{X''}{X} = \mathbb{C}$ $\qquad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$

$\Downarrow \qquad \Rightarrow$

$T'' = \mathbb{C} a^2 T$

$$\begin{cases} X'' = \mathbb{C} X \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$ Задача Штурма-Лиувилля

1) $C > 0$

$$X'' - CX = 0$$

$$\lambda^2 - C = 0$$

$$\lambda^2 = C$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{C}$$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{C}x} + Be^{-\sqrt{C}x}$$

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(l) = Ae^{\sqrt{C}l} + Be^{-\sqrt{C}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$$

$\varnothing$

2) $C = 0$

$X'' = 0 \qquad X = Ax + B$

$$\begin{cases} X(0) = B = 0 \\ X(l) = Al = 0 \end{cases} \quad A = B = 0$$

$\varnothing$

3) $C < 0$

$$X'' = -\lambda^2 X$$

$$k^2 + \lambda^2 = 0$$

$$k^2 = -\lambda^2$$

$$k_{1,2} = \pm\lambda i \Rightarrow X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(l) = B\sin\lambda l = 0 \end{cases} \quad B \neq 0 \quad \sin\lambda l = 0 \quad \lambda l = \pi n, \; n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$$

Решение задачи Ш.-Л.

собств. ф-ция $\rightarrow$ $X_n(x) = B_n \sin\lambda_n x \quad , n = 1, 2, \ldots$

собств. число $\rightarrow$ $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$

ряд $\{\sin \lambda_n l\}$ – ортогональный , т.е

$$\langle X_n(x), X_k(x)\rangle = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \|X_n\|^2, & n = k \end{cases} =$$

$$= \int_0^l \sin(\lambda_n x)\cdot \sin(\lambda_k x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{l}{2}, & n = k \end{cases}$$

$$T_n'' = -a^2 \lambda_n^2 T_n \quad \Rightarrow$$

$$T_n(t) = A_n \sin(a\lambda_n t) + B_n \cos(a\lambda_n t)$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin(a\lambda_n t) + B_n \cos(a\lambda_n t)\right) \sin \lambda_n x$$

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n x = \varphi(x)$$

$$u_t(0,x) = \sum A_n a \lambda_n \sin \lambda_n x = \psi(x)$$

$$B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_k x)\,dx$$

$$A_k = \frac{2}{l a \lambda_n} \int_0^l \psi(x) \sin(\lambda_k x)\,dx$$

Пример 1:

$$u_{tt} = 81 u_{xx} \qquad t>0 \qquad 0<x<6$$

$$\begin{cases} u(0,x) = 27\sin 3\pi x + 7\sin 11\pi x \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,6) = 0 \end{cases}$$

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x \quad \text{, где} \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{6}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$T_n(t) = A_n\cos(9\lambda_n t) + B_n\sin(9\lambda_n t) =$$

$$= A_n\cos\frac{9\pi n t}{6} + B_n\sin\frac{9\pi n t}{6}$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{3}{2}\pi n t + B_n\sin\frac{3}{2}\pi n t\right)\sin\frac{\pi n}{6}x$$

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{\pi n}{6}x = 27\sin 3\pi x + 7\sin 11\pi x \\ u_t(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n\frac{3}{2}\pi n\sin\frac{\pi n}{6}x = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$B_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$A_n = 0 \quad n \neq 18, 66$$

$$A_{18} = 27$$

$$A_{66} = 7$$

Ответ: $u(t,x) = 27\cos(27\pi t)\sin(3\pi x) + 7\cos(99\pi t)\sin 11\pi x$

Пример 2

$u_{tt} = 64 u_{xx} \qquad t>0 \qquad 0<x<6$

$$\begin{cases} u(0,x)=0 \\ u_t(0,x) = 8\pi\cos\pi x + \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x(t,0)=0 \\ u_x(t,6)=0 \end{cases}$$

$u(t,x) = T(t)\,X(x)$

задача Ш.-Л.

$X'' = -\lambda^2 X \qquad X_n(x) = A_n\cos\lambda_n x + B_n \sin\lambda_n x$

$$\begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(6)=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &X_n'(0) = B_n\lambda_n = 0 \\ &X_n'(6) = -A_n\lambda_n \sin(6\lambda_n) = 0 \end{aligned}$$

$B_n = 0$

$\sin(\lambda_n \cdot 6) = 0$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{6} \qquad n=0,1,2,\dots$

$X_n(x) = \cos\lambda_n x$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{6} \qquad n=0,1,2,\dots$

решение задачи Ш.-Л.

при $n=0$ $\qquad$ при $n=1,2,\dots$

$T_0(t) = A_0 t + B_0 \qquad T_n(t) = A_n\cos(a\lambda_n t) + B_n\sin(a\lambda_n t)$

$$u(t,x) = (A_0 t + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(8\lambda_n t) + B_n\sin(8\lambda_n t)\right)\cos\lambda_n x$$

$$\begin{cases} u(0,x) = B_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\cos\lambda_n x = 0 \\ u_t(0,x) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n\cdot 8\cdot\lambda_n\cos\lambda_n x = 8\pi\cos\pi x + \pi \end{cases}$$

$B_0 = 0;\ A_n = 0 \quad n=1,2,\dots$

$A_0 = \pi;\ {}_6 = 1;\ B_n = 0,\ n\neq 6$

Ответ: $u(t,x) = \pi t + \sin(8\pi t)\cos\pi x$.

Что делать если ГУ неоднородные?

Например:

$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < \ell, \qquad t > 0$

Н.У. $\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$ Г.У. $\begin{cases} u(t,0) = 1 \\ u(t,\ell) = 0 \end{cases}$

Замена: $u = v + w$, где $w(t,x)$ ищем так:

$w(t,0) = 1 \qquad\qquad w(t,x) = A - Bx \Rightarrow$

$w(t,\ell) = 0 \qquad\qquad A = 1 \ (w(t,0) = A = 1)$

$B = \frac{1}{\ell} \ (w(t,\ell) = 1 - B\ell = 0)$

т.е. $w(t,x) = 1 - \frac{1}{\ell} x$

подставляем в исходную задачу

$u = v + w = v + 1 - \frac{1}{\ell} x$

$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \underbrace{(a^2 w_{xx} - w_t)}_{= f(t,x) = 0}$

Н.У. $\begin{cases} v(0,x) = \varphi(x) - w(0,x) = \varphi(x) - 1 + \frac{1}{\ell} x = \varphi_1(x) \\ v_t(0,x) = \psi(x) - w_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$

Г.У. $\begin{cases} v(t,0) = 1 - w(t,0) = 1 - 1 = 0 \\ v(t,\ell) = 0 - w(t,\ell) = 0 - 1 + 1 = 0 \end{cases}$

Задача для $v(t,x)$ принимает обычный вид и решается методом Фурье.

Пример:

$u_{tt} = 64 u_{xx}$ $\quad t > 0 \quad 0 < x < 3$

Н.У. $\begin{cases} u(0,x) = 7\sin 4\pi x - 2 + 2x \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$

Г.У. $\begin{cases} u(t,0) = -2 \\ u(t,3) = 4 \end{cases}$

① $u = v + w$, где $\begin{cases} w(t,0) = -2 \\ w(t,3) = 4 \end{cases}$

$w(t,x) = A - Bx$

$\begin{cases} w(t,0) = A = -2 \\ w(t,3) = -2 - B\cdot 3 = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} A = -2 \\ B = -2 \end{matrix}$

$w(t,x) = 2x - 2$

② $v_{tt} = 64 v_{xx} + \underbrace{64 w_{xx} - w_{tt}}_{=0}$

$v(0,x) = 7\sin 4\pi x - 2 + 2x - w(0,x) = 7\sin 4\pi x - 2 + 2x - 2x + 2$

$v(0,x) = 7\sin 4\pi x$

$v_t(0,x) = 0 - w_t(0,x) = 0$

Н.У. $\begin{cases} v(0,x) = 7\sin 4\pi x \\ v_t(0,x) = 0 \end{cases}$

Г.У. $\begin{cases} v(t,0) = -2 - w(t,0) = -2 + 2 = 0 \\ v(t,3) = 4 - w(t,3) = 4 - 4 = 0 \end{cases}$

т.е. Задача: $v_{tt} = 64 v_{xx}$

$\begin{cases} v(0,x) = 7\sin 4\pi x \\ v_t(0,x) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v(t,0) = 0 \\ v(t,3) = 0 \end{cases}$

М.Ф. $v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(8\lambda_n t) + B_n \sin(8\lambda_n t)\right) \sin \lambda_n x$

где $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{3}$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$

8

$$\begin{cases} V(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{3} x = 7 \sin 4\pi x \\ V_t(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cdot 8 \cdot \frac{\pi n}{3} \sin \frac{\pi n}{3} x = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$B_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots \ ; \ A_n = 0, \ n \neq 12 \ ; \ A_{12} = 7$$

т.е. $v(t,x) = 7 \cos(32\pi t) \sin(4\pi x)$

Ответ: $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) = 7 \cos 32\pi t \sin 4\pi x + 2x - 2$