Решение волнового неоднородного уравнения на отрезке.

(10)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x) \qquad t>0, \quad 0<x<l$$

$$\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,l) = 0 \end{cases}$$

Ищем решение сразу в виде ряда по собств. ф-циям задачи Ш.-Л.

$u(t,x) = \sum\limits_k u_k(t) X_k(x)$, где $X_k(x)$ - собств. ф-ция задачи $X'' = -\lambda^2 X$

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}, \text{ т.е. } X_k(x) = \sin\lambda_k x, \text{ где } \lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \; k=1,2,\dots$$

подставляем вид $u(t,x)$ в исходное ур-ние:

$$\sum_k u_k''(t) X_k(x) = a^2 \sum_k u_k(t) X_k''(x) + f(t,x)$$

$$\sum_k u_k''(t) X_k(x) = -a^2 \sum_k u_k(t) \lambda_k^2 X_k(x) + \sum_k f_k(t) X_k(x)$$

где $f(t,x) = \sum\limits_k f_k(t) X_k(x)$

$$f_k(t) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l f(t,x) X_k(x)\,dx$$

$$u_k''(t) = -a^2\lambda_k^2 u_k(t) + f_k(t)$$

подставляем в Н У

$$\begin{cases} \sum\limits_k u_k(0) X_k(x) = \varphi(x) = \sum\limits_k \varphi_k X_k(x) \\ \sum\limits_k u_k'(0) X_k(x) = \psi(x) = \sum\limits_k \psi_k X_k(x) \end{cases}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^l \varphi(x) X_k(x)\,dx$$

$$\psi_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^l \psi(x) X_k(x)\,dx \qquad \Rightarrow$$

Неоднородные ГУ (продолжение).

Усложним ситуацию:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

НУ $\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$ ГУ $\begin{cases} u(t,0) = \mu(t) \\ u(t,l) = 0 \end{cases}$

Аналогично стр. 6

$u = v + w \qquad w = A - Bx$, но $A = A(t)$, $B = B(t)$

$$\begin{cases} w(t,0) = A = \mu(t) \\ w(t,l) = A - Bl = \mu(t) - Bl = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad B = \frac{\mu(t)}{l}$$

$$w(t,x) = \mu(t) - \frac{\mu(t)}{l} x = \mu(t)\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

подставляем в исходную задачу $u = v + \mu(t)\left(1 - \frac{x}{l}\right)$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} - w_{tt} = a^2 v_{xx} \underbrace{- \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu''(t)}_{f(t,x)}$$

$$\begin{cases} v(0,x) = \varphi(x) - w(0,x) = \varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(0) = \varphi_1(x) \\ v_t(0,x) = \psi(x) - w_t(0,x) = \psi(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu'(0) = \psi_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(t,0) = \mu(t) - w(t,0) = \mu(t) - \mu(t) = 0 \\ v(t,l) = 0 - w(t,l) = 0 \end{cases}$$

т.е. приходим к задаче с неоднородностью в уравнении

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(t,x) \qquad t > 0, \quad 0 < x < l$$

$$\begin{cases} v(0,x) = \varphi_1(x) \\ v_t(0,x) = \psi_1(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} v(t,0) = 0 \\ v(t,l) = 0 \end{cases}$$

Получаем:

$$u_k''(t) = -a^2\lambda_k^2 u_k(t) + f_k(t)$$

$$\begin{cases} u_k(0) = \varphi_k \\ u_k'(0) = \psi_k \end{cases}$$ решаем методом из ОДУ.

Пример:

$u_{tt} = 16 u_{xx}$ $\quad t>0 \quad 0<x<1$

$$\begin{cases} u(t,0) = 4t \\ u(t,1) = -t \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = 32\pi \sin 4\pi x + 4 - 5x \end{cases}$$

ищем решение в виде: $u = v + w$, где

$$\begin{cases} w(t,0) = 4t \\ w(t,1) = -t \end{cases} \qquad w(t,x) = A - Bx$$

$$\begin{cases} w(t,0) = A = 4t \\ w(t,1) = 4t - B = -t \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = 4t \\ B = 5t \end{matrix} \Rightarrow w(t,x) = 4t - 5tx = t(4-5x)$$

$v_{tt} = 16 v_{xx}$

$$\begin{cases} v(t,0) = 0 \\ v(t,1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(0,x) = 0 \\ v_t(0,x) = 32\pi \sin 4\pi x \end{cases}$$

$$v(t,x) = \sum_k T_k(t) X_k(x), \text{ где } X_k(x) = \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{1}, \; k = 1,2,\dots$$

$$T_k(t) = A_k \sin(4\lambda_k t) + B_k \cos(4\lambda_k t)$$

$$\begin{cases} v(0,x) = \sum_k B_k \sin\lambda_k x = 0 \\ v_t(0,x) = \sum_k A_k 4\lambda_k \sin\lambda_k x = 32\pi \sin 4\pi x \end{cases}$$

$B_k = 0$, $k = 1,2,\dots$

$A_k = 0$, $k \neq 4$, $A_4 = \dfrac{32\pi}{4 \cdot 4\pi} = 2$

Ответ: $u(t,x) = 2\sin(16\pi t)\sin(4\pi x) + t(4-5x)$

Пример:

$$u_{tt} = 64 u_{xx} + 16\cos 8t \sin x \qquad t>0, \quad 0<x<\pi$$

$$\begin{cases} u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t,0) = 0 \\ u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

$$u(t,x) = \sum_k u_k(t) X_k(x), \text{ где } X_k(x) = \sin \lambda_k x$$

$$\lambda_k = k, \quad k = 1,2,\dots$$

$$\sum_k u_k''(t) X_k(x) = -64 \sum_k u_k(t) k^2 X_k(x) + 16\cos 8t\, X_1(x)$$

при $k \neq 1$ $\quad u_k''(t) = -64 k^2 u_k(t) \qquad$ I

при $k = 1$ $\quad u_1''(t) = -64 u_1(t) + 16\cos 8t \qquad$ II

I $\quad u_k(t) = A_k \sin(8kt) + B_k \cos(8kt)$

II $\quad u_1''(t) = -64 u_1(t)$

$$u_{1_{oo}} = A_1 \sin 8t + B_1 \cos 8t$$

$$u_{1_{чн}} = t(A\cos 8t + B\sin 8t)$$

$$u_{1_{чн}}' = A\cos 8t + B\sin 8t + t(-8A\sin 8t + 8B\cos 8t)$$

$$u_{1_{чн}}'' = (-8A\sin 8t + 8B\cos 8t) - 8A\sin 8t + 8B\cos 8t +$$

$$+ t(-64A\cos 8t - 64B\sin 8t) = t(-64A\cos 8t - 64B\sin 8t) +$$

$$+16\cos 8t$$

$$-16A\sin 8t + 16B\cos 8t = 16\cos 8t \Rightarrow B = 1, \ A = 0$$

$$u_{чн} = t\sin 8t$$

$$u_1 = A_1\sin 8t + B_1\cos 8t + t\sin 8t$$

Находим коэфф.

$$\begin{cases} \sum_k u_k(0) X_k(x) = 0 \\ \sum_k u_k'(0) X_k(x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_k(0) = 0 \\ u_k'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_k = 0 \\ A_k = 0 \end{cases}$$

Ответ: $u(t,x) = t \sin 8t \sin x$

Модельный пример.

$u_{tt} = u_{xx} + 2\sin^2 x \qquad t>0 \qquad 0<x<\pi$

$$\begin{cases} u_x(t,0) = 1 \\ u_x(t,\pi) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0,x) = x \\ u_t(0,x) = \sin 5x \, \sin x \end{cases}$$

$u = v + w \qquad \begin{matrix} w_x(t,0) = 1 \\ w_x(t,\pi) = 1 \end{matrix} \qquad w(t,x) = x$

$v_{tt} = v_{xx} + 1 - \cos 2x$

$$\begin{cases} v_x(t,0) = 0 \\ v_x(t,\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(0,x) = 0 \\ v_t(0,x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x \end{cases}$$

Используем метод разложения по собственным ф-циям задачи Ш.-Л. $X_n(x) = \cos \lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{\ell} = n$, $n = 0,1,2,\dots$

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cdot n^2 X_n(x) + X_0(x) - X_2(x)$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \frac{1}{2} X_4(x) - \frac{1}{2} X_6(x) \end{cases}$$

1) для $n=0$

$T_0''(t) = 1$

$$\begin{cases} T_0(0) = 0 \\ T_0'(0) = 0 \end{cases}$$

2) для $n=2$

$T_2''(t) = -4T_2(t) - 1$

$$\begin{cases} T_2(0) = 0 \\ T_2'(0) = 0 \end{cases}$$

3) для $n=4$

$$T_4''(t) = -16T_4(t)$$

$$\begin{cases} T_4(0)=0 \\ T_4'(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

4) для $n=6$

$$T_6''(t) = -36\,T_6(t)$$

$$\begin{cases} T_6(0)=0 \\ T_6'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

5) для $n \neq 0,2,4,6$

$$T_n''(t) = -n^2 T_n(t)$$

$$\begin{cases} T_n(0)=0 \\ T_n'(0)=0 \end{cases}$$

Решаем 5 полученных задач:

5) $T_n(t)=0$, $n \neq 0,2,4,6$

4) $T_n''(t) = -n^2 T_n(t)$

$T_n(t) = A_n \cos nt + B_n \sin nt$ ← общее решение

для $n=6$

$$T_6(t) = A_6 \cos 6t + B_6 \sin 6t$$

$$T_6(0) = A_6 = 0$$

$$T_6'(0) = 6B_6 = -\frac{1}{2} \Rightarrow B_6 = -\frac{1}{12}$$

$$T_6(t) = -\frac{1}{12}\sin 6t$$

3) для $n=4$

$$T_4(t) = A_4 \cos 4t + B_4 \sin 4t$$

$$T_4(0) = A_4 = 0$$

$$T_4'(0) = 4B_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow B_4 = \frac{1}{8}$$

$$T_4(t) = \frac{1}{8}\sin 4t$$

2) для $n=2$ надо решить неоднор. ур-ние

$$T_{2_{чн}} = -\frac{1}{4}$$

$$T_2(t) = A_2 \cos 2t + B_2 \sin 2t - \frac{1}{4}$$

$$T_2(0) = A_2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{4}$$

$$T_2'(0) = 2B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$T_2(t) = \frac{1}{4}(\cos 2t - 1)$$

1) для $n=0$

$$T_0'(t) = t + A_0$$

$$T_0(t) = \frac{t^2}{2} + A_0 t + B_0$$

$$T_0(0) = B_0 = 0$$

$$T_0'(0) = A_0 = 0$$

$$T_0(t) = \frac{t^2}{2}$$

Ответ: $u(t,x) = x + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}(\cos 2t - 1)\cos 2x +$
$+ \frac{1}{8}\sin 4t \cos 4x - \frac{1}{12}\sin 6t \cos 6x =$
$= \frac{t^2}{2} - \frac{\sin^2 t}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 4t\cos 4x - \frac{1}{12}\sin 6t \cos 6x$