

## Принятые обозначения

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \text{ - дельта-функция;} \quad \int f(x)\delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

$$H(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases} \text{ - функция Хевисайда}$$

$$H(a-x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases} \text{ - зеркально отраженная функция Хевисайда}$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\pi} \int_z^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad \text{-интеграл Пуассона}$$

### 1. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$	$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$
$f'(x)$	$i\lambda F(\lambda)$
$f''(x)$	$-\lambda^2 F(\lambda)$
$f^{(n)}(x)$ - n-ая производная	$(i\lambda)^n F(\lambda)$
$f(ax), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\lambda} F(\lambda)$
$f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi$	$F(\lambda)G(\lambda)$
$\frac{a}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a \lambda }$
$\operatorname{Cos}(ax)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\delta(\lambda+a) + \delta(\lambda-a))$
$\operatorname{Sin}(ax)$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\delta(\lambda+a) - \delta(\lambda-a))$
$e^{-a x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\lambda^2}$

Экспоненциальное преобразование Фурье (продолжение)

$\mathfrak{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$	$\mathfrak{F}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$
$H(x+a) - H(x-a) = \begin{cases} 1, &  x  < a \\ 0, &  x  > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{Sin}(a\lambda)}{\lambda}$
$e^{-a^2 x^2}$	$\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}}$
$\delta(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\lambda}$
$xe^{-a x }, \quad a > 0$	$-2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ia\lambda}{(a^2 + \lambda^2)^2}$
$\frac{1}{2} [\delta(x+a) + \delta(x-a)]$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(a\lambda)$

## 2. СИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda$ $0 < x < \infty$	$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx$ $0 < \lambda < \infty$
$f''(x)$	$-\lambda^2 F(\lambda) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda f(0)$
$(f * g)_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) [g(x-\xi) - g(x+\xi)] d\xi$	$F(\lambda)G(\lambda)$
$f(ax)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
$e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}$
$x^{-1}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
$x^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
$H(a-x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} [1 - \cos(\lambda a)]$
$\frac{x}{a^2 + x^2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{- \lambda a}$
$\frac{1}{x(x^2 + a^2)}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - e^{-a\lambda}}{a^2}$
$\arctg\left(\frac{a}{x}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - e^{-a\lambda}}{\lambda}$
$-x^2 f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} F''(\lambda)$

### 3. КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda$ $0 < x < \infty$	$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx$ $0 < \lambda < \infty$
$f''(x)$	$-\lambda^2 F(\lambda) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda f'(0)$
$(f * g)_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) [g( x-\xi ) + g(x+\xi)] d\xi$	$F(\lambda)G(\lambda)$
$f(ax)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
$e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \lambda^2}$
$\delta(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
$x^{-1/2}$	$\sqrt{1/\lambda}$
$H(a-x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\lambda)}{\lambda}$
$e^{-ax^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\lambda^2/4a}$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} H(a-\lambda)$
$\frac{a}{a^2 + x^2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\lambda a}$
$-x^2 f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} F''(\lambda)$

#### 4. Преобразование Лапласа

$$L[f] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = F(s) \quad L^{-1}[F] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = f(t)$$

Основные теоремы	
$f(\alpha \cdot t)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
$f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$	$\alpha \cdot F(\alpha \cdot s)$
$e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t)$	$F(s - \alpha)$
$H(t - \lambda) \cdot f(t - \lambda)$	$e^{-\lambda s} \cdot F(s)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$f^{(n)}(t) -$ <i>n - ая производная</i>	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots$ $\dots - s^0 f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

Таблица некоторых оригиналов и изображений

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
c	$\frac{c}{s}, c - const$	$Sin(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	$Cos(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s + \alpha}}$	$erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}},$
$sh(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > a$	$H(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$ch(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > a$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{s(s-a)}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\delta(t)$	<b>1</b>
$\frac{1}{\sqrt{a}} erf(\sqrt{at})$	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\delta(t - a)$	$e^{-as}$
$t^n, n > 0, \text{целое}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - a e^{a^2 t} erfc(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$
$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{at} erf(\sqrt{at})$	$\frac{1}{\sqrt{s(s-a)}}$	$e^{a^2 t} erfc(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s(\sqrt{s+a})}}$
		$\frac{1}{a^2}(1 - \cos(at))$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$

Операция «свёртка».

$$(f * g) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

## 5. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

1. На плоскости

– Декартова система координат:  $\Delta U = U_{xx} + U_{yy}$

- Полярная система координат:  $\Delta U = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi}$

2. В пространстве –

- Декартова система координат:  $\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$

- Цилиндрическая система координат:  $\Delta U = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} + U_{zz}$

- Сферическая система координат:

$$\Delta U = U_{rr} + \frac{2}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}U_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}U_{\varphi\varphi}$$