Интегральные преобразования.

Чем интересен: позволяет от ур-ния с n-переменными перейти к уравнению с $(n-1)$-независимой переменной и заменить сложные операции над функциями простыми.

Суть метода:

Интегральным преобразованием называют преобразование, которое каждой ф-ции $f(t)$ из класса функций $\{f\}$ ставит в соответствие новую функцию $F(s)$ из класса функций $\{F\}$ и в качестве закона соответствия выступает некий интеграл:

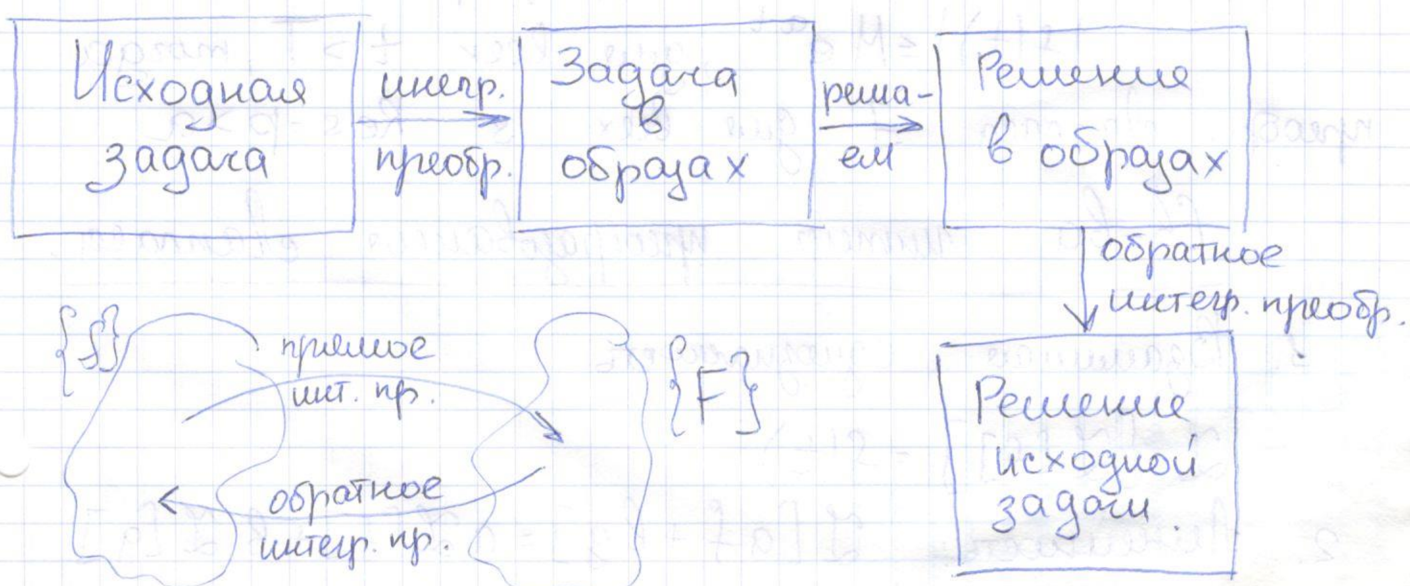
$$F(s)=\int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt$$, где $K(s,t)$ –

– ядро интегрального преобразования (одно преобразование отличается от другого ядром и промежутком интегрирования)

$f(t)$ – наз-ся прообразом

$F(s)$ – наз-ся образом

Схема



Рассмотрим самое мощное интегр. преобразования - интегральное преобразование Лапласа.

По переменной t (традиционно), хотя оно применимо по $\forall$ переменной, которая определена в области $[0, +\infty)$

Интегр. преобразованием Лапласа $f(t)$ наз-ся преобр., которое ставит ей в соответствие ф-цию $F(s)$ комплексного переменного $s = p + i\sigma$ и определяется формулой:

$$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad , a$$

обратное преобразование:

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} F(s) e^{st} ds$$

Когда его можно применять:

1) $f(t)$, $t \geq 0$

2) $f(t)$ кусочно-непр. на $\forall$ конечном интервале t

3) $\exists$ такие конст. M, a, T, что $|f(t)| \leq M e^{at}$, для всех $t > T$, тогда преобр. Лапласа $\exists$ для всех s $\operatorname{Re} s = p > a$.

Св-ва интегр. преобразования Лапласа.

1. Взаимная однозначность

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]] = f(t)$$

2. Линейность: $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$

3. Свертка $f*g = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = $ (24)

$= \int_0^t g(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau$

$$\mathcal{L}^{-1}[F\cdot G] = f*g$$

4. Преобразование частных производных:

$$\mathcal{L}[u_x] = \int_0^\infty u_x e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u e^{-st} dt = \frac{\partial U(s,x)}{\partial x}$$

$$\mathcal{L}[u_{xx}] = \int_0^\infty u_{xx} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty u e^{-st} dt = \frac{\partial^2 U(s,x)}{\partial x^2}$$

$$\mathcal{L}[u_t] = \int_0^\infty u_t e^{-st} dt = \begin{bmatrix} w = e^{-st} & dw = -se^{-st}dt \\ dv = u_t dt & v = u \end{bmatrix} =$$

$$= u e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty u e^{-st} dt = -u(0,x) + sU(s,x)$$

$$\mathcal{L}[u_{tt}] = \int_0^\infty u_{tt} e^{-st} dt = \begin{bmatrix} w = e^{-st} & dw = -se^{-st}dt \\ dv = u_{tt} dt & v = u_t \end{bmatrix} =$$

$$= u_t e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty u_t e^{-st} dt = \begin{bmatrix} w = e^{-st} & dw = -se^{-st}dt \\ dv = u_t dt & v = u \end{bmatrix} =$$

$$= -u_t(0,x) + s\left(ue^{-st}\right)\Big|_0^\infty + s^2\int_0^\infty u e^{-st} dt =$$

$$= -u_t(0,x) - s\,u(0,x) + s^2 U(s,x) =$$

$$= s^2 U(s,x) - s\,u(0,x) - u_t(0,x)$$

4. $U \xrightarrow[s\to\infty]{} 0 \quad \forall x!$ Образ U должен быть огр. на всей области определения.

При помощи метода интегр. преобразований (метод Фурье)

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad t>0 \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$u(0,x) = \varphi(x)$$

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi}$$

ф-ла Пуассона.

Пример 1:

$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}$ $\qquad t > 0 \quad , \; x > 0$

$u(0,x) = \sin 2x$

$u(t,0) = 0$

$-\sin 2x + sU = \frac{1}{2} U_{xx}$

$U(s,0) = 0$

$U_{xx} = -2\sin 2x + 2sU$

решаем однородные ур-ние

$U(t,x) = C_1 e^{\sqrt{2s}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{2s}\,x}$

$U \xrightarrow[s\to\infty]{} 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow C_1 = 0$

$U(t,s) = C_2 e^{-\sqrt{2s}\,x}$

$U_{ч.р} = A \sin 2x$

$-4A\sin 2x = -2\sin 2x + 2sA\sin 2x$

$-4A = -2 + 2As$

$-2 + A(2s+4) = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{s+2}$

$U_{ч.р} = \frac{1}{s+2} \sin 2x$

$U(s,x) = C_2 e^{-\sqrt{2s}\,x} + \frac{1}{s+2}\sin 2x$

$U(s,0) = C_2 = 0 \qquad U(s,x) = \frac{\sin 2x}{2+s}$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2+s}\right] = e^{-2t}$

$\mathcal{L}^{-1}[U] = u(t,x) = \sin 2x\, e^{-2t}$

Пример 2:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + \cos x \qquad t>0, \quad -\infty < x < +\infty$$
$$u(0,x) = 2x^2$$
$$u_t(0,x) = e^x$$

$$s^2\bar{V} - s\,2x^2 - e^x = 9\bar{V}_{xx} + \frac{\cos x}{s}$$

$$\bar{V}_{oo}(s,x) = \tilde{A}e^{\frac{s}{3}x} + \tilde{B}e^{-\frac{s}{3}x} \Rightarrow \tilde{A} = \tilde{B} = 0$$

$$\bar{V}_{ч.р} = Ax^2 + B + Ce^x + D\cos x$$

$$s^2Ax^2 + s^2B + Cs^2e^x + Ds^2\cos x - 2x^2s - e^x =$$
$$= 9\cdot 2A + 9Ce^x - 9D\cos x + \frac{\cos x}{s}$$

$$\begin{cases} s^2A - 2s = 0 \\ s^2B = 18A \\ Cs^2 - 1 = 9C \\ Ds^2 = -9D + \frac{1}{s} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &A = \frac{2}{s} \\ &s^2B = \frac{2\cdot 18}{s} \Rightarrow B = \frac{2\cdot 18}{s^3} \\ &C = \frac{1}{s^2-9} \\ &D = \frac{1}{s(s^2+9)} \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{ч.р} = \frac{2}{s}x^2 + \frac{2\cdot 18}{s^3} + \frac{e^x}{s^2-9} + \frac{\cos x}{s(s^2+9)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] = 2 \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = t^2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2-9}\right] = sh(3t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+9)}\right] = \frac{1}{9}\left[1-\cos(3t)\right]$$

$$u(t,x) = 2x^2 + 18t^2 + \frac{e^x}{3}sh(3t) + \frac{\cos x}{9}\left[1-\cos 3t\right]$$

$$/*\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right] = \frac{1}{a^2}\left[1-\cos(at)\right]\ */$$