Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Институт естественных наук и математики

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ:
постановка задач и методы решения дифференциальных уравнений гиперболического типа

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ: ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся
по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика»,
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»,
01.03.04 «Прикладная математика»,
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»,
02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2024

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.1я73-1
М34

Авторы:
Е. А. Елфимова, А. Б. Добросердова, А. Ю. Соловьева,
А. В. Амбаров, А. Ю. Мусихин, В. С. Зверев, Е. С. Пьянзина

Под общей редакцией Е. А. Елфимовой

Рецензенты:
кафедра теоретической и математической физики
Северо-Кавказского федерального университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
доцент *А. Р. Закинян*);
Д. И. Меркулов, кандидат физико-математических наук, старший
научный сотрудник лаборатории физико-химической гидродинамики
(НИИ механики, Московский государственный университет)

М34 **Математическое** моделирование колебательных процессов: постановка задач и методы решения дифференциальных уравнений гиперболического типа : учебное пособие / Е. А. Елфимова, А. Б. Добросердова, А. Ю. Соловьева и др. ; под общ. ред. Е. А. Елфимовой ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2024. — 264 с. : ил. — 30 экз. — ISBN 978-5-7996-3854-2. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-7996-3854-2

В учебном пособии рассмотрены основные принципы построения математических моделей колебательных процессов, приведены алгоритмы аналитического решения поставленных задач, отдельное внимание уделено численным методам их решения. Даны методические указания по решению краевых задач и задач Коши для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Рекомендуется студентам для самостоятельной работы при изучении дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики».

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.1я73-1

ISBN 978-5-7996-3854-2

Оглавление

От авторов

Описание и прогнозирование процессов, происходящих в физических, биологических, экономических, социальных и других системах, опираются на математические модели, в основе которых лежат дифференциальные уравнения в частных производных. Решение дифференциальных уравнений позволяет предсказать будущие состояния исследуемых процессов, а значит, принять обоснованные решения для их управления. В зависимости от сложности моделируемого процесса и природы рассматриваемого явления в математических моделях используются уравнения различных типов.

В начале данного учебного пособия приведены канонические формы трех типов дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Затем разобраны аналитические методы решения задач для уравнений гиперболического типа с одной пространственной переменной. Эти уравнения описывают колебательные процессы, такие как поперечные колебания струн, движение звуковой или световой волны, продольные колебания упругих стержней и др. Для каждого представленного метода приведены примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения, ответы к которым можно найти в заключительном разделе учебного пособия. Наряду с аналитическими методами решения гиперболических задач рассмотрен также численный метод в форме конечно-разностной схемы, который позволяет получить приближенное решение сложных нелинейных задач, не имеющих аналитического решения.

Данное учебное пособие может использоваться студентами математических и естественно-научных направлений высших учебных заведений в рамках дисциплин, где изучаются дифференциальные уравнения в частных производных.

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для случая двух независимых переменных

В этой главе будет дана классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для случая двух независимых переменных. Будут определены три типа уравнений и представлен алгоритм приведения их к канонической форме. В конце главы будут разобраны примеры.

1.1. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка

Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными x и y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее частными производными до второго порядка включительно:

$$F_1(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Такое дифференциальное уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет следующий вид:

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F_2(u_x, u_y, u, x, y) = 0,$$

где коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ – функции, зависящие от переменных x и y.

Если коэффициенты зависят не только от переменных x и y, а являются функциями, зависящими также от u, u_x, u_y (как и функция $F_2(u_x, u_y, u, x, y)$), то дифференциальное уравнение в частных производных называется *квазилинейным*:

$$a(u_x, u_y, u, x, y)u_{xx} + b(u_x, u_y, u, x, y)u_{xy} +$$
$$+ c(u_x, u_y, u, x, y)u_{yy} + F_2(u_x, u_y, u, x, y) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции u и ее первых производных u_x и u_y:

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} +$$
$$+ d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + g(x,y)u + F_3(x,y) = 0,$$

где коэффициенты $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $e(x,y)$, $g(x,y)$ и $F_3(x,y)$ – функции, зависящие от переменных x и y. Если эти коэффициенты перед функцией u и ее производными не зависят от переменных x и y, то дифференциальное уравнение представляет собой *линейное уравнение с постоянными коэффициентами.* Если функция $F_3(x,y) = 0$, то уравнение называется *однородным.*

1.2. Канонические формы и типы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Запишем общий вид дифференциального уравнения в частных производных, являющегося линейным относительно старших производных:

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + f(u_x, u_y, u, x, y) = 0, \quad (1.1)$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $c(x,y)$ – непрерывные функции, определенные в некоторой области Ω и одновременно не обращающиеся в нуль в Ω; $f(u_x, u_y, u, x, y)$ – непрерывная функция в Ω. В дальнейшем для удобства изложения аргументы у функций будут опущены.

Сделаем следующую невырожденную замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases} \quad (1.2)$$

Невырожденность замены означает, что соответствующий якобиан ($|J|$) отличен от нуля:

$$|J| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0. \quad (1.3)$$

В соответствии с заменой переменных (1.2) преобразуем частные производные первого и второго порядка функции $u(x, y)$ к новым переменным ξ и η:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
u_{xx} &= (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_x =\\
&= (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\xi \xi_x + (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\eta \eta_x =\\
&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\xi}\eta_x \xi_x + u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx} =\\
&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + 2u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx},\\
u_{xy} &= (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_y =\\
&= (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\xi \xi_y + (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\eta \eta_y =\\
&= u_{\xi\xi}\xi_x \xi_y + u_\xi \xi_{xy} + u_{\eta\xi}\eta_x \xi_y +\\
&+ u_{\xi\eta}\xi_x \eta_y + u_{\eta\eta}\eta_x \eta_y + u_\eta \eta_{xy} =\\
&= u_{\xi\xi}\xi_x \xi_y + u_\xi \xi_{xy} + u_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x \eta_y + u_\eta \eta_{xy},\\
u_{yy} &= (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y)_y =\\
&= (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y)_\xi \xi_y + (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y)_\eta \eta_y =\\
&= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_{\eta\xi}\eta_y \xi_y + u_{\xi\eta}\xi_y \eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy} =\\
&= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + 2u_{\xi\eta}\xi_y \eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Подставляя значения частных производных первого и второго порядка функции u в новых переменных ξ и η в исходное уравнение (1.1), получим следующее:

$$A u_{\xi\xi} + B u_{\xi\eta} + C u_{\eta\eta} + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0, \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= a\xi_x^2 + b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2;\\
B &= 2a\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2c\xi_y \eta_y;\\
C &= a\eta_x^2 + b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2;\\
F &= a(u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}) + b(u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}) +\\
&+ c(u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}) + f.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Покажем, что $B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)|J|^2$, используя выражение для якобиана (1.3):

$$
\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= (2(a\xi_x\eta_x + c\xi_y\eta_y) + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x))^2 - \\
&- 4(a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)(a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2) = \\
&= \underline{4a^2\xi_x^2\eta_x^2} + 8ac\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \underline{\underline{4c^2\xi_y^2\eta_y^2}} + 4ab\xi_x^2\eta_x\eta_y + \\
&+ 4ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 + 4bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 + \underline{\underline{\underline{4bc\xi_y^2\eta_x\eta_y}}} + b^2\xi_x^2\eta_y^2 + \\
&+ 2b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + b^2\xi_y^2\eta_x^2 - \underline{4a^2\xi_x^2\eta_x^2} - 4ab\xi_x^2\eta_x\eta_y - \\
&- 4ac\xi_x^2\eta_y^2 - 4ab\xi_x\xi_y\eta_x^2 - 4b^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y - 4bc\xi_x\xi_y\eta_y^2 - \\
&- 4ac\xi_y^2\eta_x^2 - \underline{\underline{\underline{4bc\xi_y^2\eta_x\eta_y}}} - \underline{\underline{4c^2\xi_y^2\eta_y^2}} = \\
&= b^2(\xi_x^2\eta_y^2 - 2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \xi_y^2\eta_x^2) - \\
&- 4ac(\xi_x^2\eta_y^2 - 2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + \xi_y^2\eta_x^2) = \\
&= (b^2 - 4ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 = (b^2 - 4ac)|J|^2.
\end{aligned}
$$

Выберем функции ξ и η таким образом, чтобы некоторые из коэффициентов A, B и C в выражениях (1.5) обратились в нуль. Отметим, что за обращение коэффициентов A и C в нуль отвечает разрешимость следующего дифференциального уравнения в частных производных первого порядка:

$$
az_x^2 + bz_xz_y + cz_y^2 = 0. \tag{1.6}
$$

Разделив уравнение (1.6) на z_y^2, получим следующее квадратное уравнение:

$$
a\left(\frac{z_x}{z_y}\right)^2 + b\frac{z_x}{z_y} + c = 0. \tag{1.7}
$$

Отметим, что такое деление возможно, поскольку $z_y \neq 0$. Если предположить, что $z_y = 0$, то из уравнения (1.6) будет следовать, что и $z_x = 0$, а это будет означать, что искомая функция z

не зависит от x и y вовсе. Также следует отметить, что уравнения (1.6) и (1.7) эквивалентны, то есть решение уравнения (1.6) является решением уравнения (1.7) и, наоборот, решение уравнения (1.7) является решением уравнения (1.6).

Решение квадратного уравнения (1.7) выглядит следующим образом:

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Преобразуем это решение:

$$2az_x + \left(b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right) z_y = 0.$$

В результате получилось однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, которое можно решить методом характеристик. Запишем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Далее запишем решение уравнения характеристик:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) x - 2ay = C_1, \\ \psi(x, y) = \left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right) x - 2ay = C_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Разрешимость уравнения (1.7) зависит от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Очевидно, что возможны три варианта, а именно $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$, которые соответствуют трем типам дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

В случае положительного знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac > 0$ дифференциальное уравнение (1.4) называется *уравнением гиперболического типа*. В этом случае квадратное уравнение (1.7) имеет два различных вещественных решения: $\varphi(x, y) = \left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) x - 2ay = C_1$ и $\psi(x, y) = \left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right) x - 2ay = C_2$.

Положим $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$, тогда ξ и η будут являться решениями уравнения (1.6), то есть $a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0$ и $a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0$, а это, учитывая определения коэффициентов (1.5), означает, что $A = 0$ и $C = 0$. Таким образом, удалось обратить в нуль два коэффициента перед старшими производными в уравнении (1.4). Необходимо проверить, что коэффициент B отличен от нуля, иначе уравнение (1.4) уже не будет являться уравнением второго порядка:

$$B^2 - 4AC = B^2 = (b^2 - 4ac)|J|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad B \neq 0.$$

Таким образом, подставляя $A = C = 0$, $B \neq 0$ в уравнение (1.4), получаем *первую каноническую форму уравнения гиперболического типа*:

$$Bu_{\xi\eta} + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0. \tag{1.8}$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta, \\ \beta = \xi - \eta. \end{cases}$$

Преобразуем производные функции u к новым переменным α и β:

$$\begin{aligned} u_\xi &= u_\alpha + u_\beta, \\ u_\eta &= u_\alpha - u_\beta, \\ u_{\xi\eta} &= (u_\alpha + u_\beta)_\alpha - (u_\alpha + u_\beta)_\beta = \\ &\quad = u_{\alpha\alpha} + u_{\alpha\beta} - u_{\alpha\beta} - u_{\beta\beta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом, *вторая каноническая форма уравнения гиперболического типа* выглядит следующим образом:

$$B(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}) + F_1(u_\alpha, u_\beta, u, \alpha, \beta) = 0. \tag{1.9}$$

В случае если дискриминант равен нулю, то есть $D = b^2 - 4ac = 0$, дифференциальное уравнение (1.4) называется *уравнением параболического типа.* В этом случае квадратное уравнение (1.7) имеет одно вещественное решение:

$$\frac{z_x}{z_y} = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad 2az_x + bz_y = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{2a} = \frac{dy}{b} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x, y) = bx - 2ay = C_1.$$

Положим $\xi = \varphi(x, y)$, тогда ξ будет являться решением уравнения (1.6), то есть коэффициент $A = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0$. В качестве η возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию такую, что якобиан $|J| \neq 0$. Поскольку дискриминант $D = b^2 - 4ac = 0$, то $B^2 - 4AC = B^2 = (b^2 - 4ac)|J|^2 = 0$, то есть коэффициент $B = 0$. Таким образом, в случае уравнения параболического типа в нуль обратились коэффициенты A и B.

Для того чтобы дифференциальное уравнение (1.4) оставалось уравнением второго порядка, коэффициент C должен отличаться от нуля. Проверим это. Предположим, что коэффициент $C = 0$, то есть $a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0$. Из этого можно заключить, что η будет совпадать с единственным вещественным решением уравнения (1.6): $\eta = \varphi(x, y)$. Это означает, что ξ совпадает с η ($\xi = \eta$) и, как следствие, якобиан $|J| = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = 0$, что противоречит выбору η. Таким образом, предположение о том, что коэффициент C обращается в нуль, является ошибочным, то есть $C \neq 0$.

Таким образом, подставляя $A = B = 0$, $C \neq 0$ в уравнение (1.4), получаем *каноническую форму уравнения параболического типа*:

$$Cu_{\eta\eta} + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0. \tag{1.10}$$

Рассмотрим третий случай для знака дискриминанта, когда $D = b^2 - 4ac < 0$. Дифференциальное уравнение (1.4) в случае отрицательного дискриминанта называется *уравнением эллиптического типа.* Квадратное уравнение (1.7) в данном случае будет иметь два комплексно сопряженных решения:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \left(b + i\sqrt{4ac-b^2}\right)x - 2ay = \\ &= bx - 2ay + ix\sqrt{4ac-b^2} = C_1,\\ \psi(x,y) &= \left(b - i\sqrt{4ac-b^2}\right)x - 2ay = \\ &= bx - 2ay - ix\sqrt{4ac-b^2} = C_2.\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения для действительной и мнимой частей функции $\varphi(x,y)$:

$$\alpha = \operatorname{Re}\varphi(x,y) = bx - 2ay,$$
$$\beta = \operatorname{Im}\varphi(x,y) = x\sqrt{4ac-b^2}.$$

В соответствии с этими обозначениями решения квадратного уравнения (1.7) можно записать следующим образом: $\varphi(x,y) = \alpha + i\beta$, $\psi(x,y) = \alpha - i\beta$. Если в качестве функций ξ и η взять эти решения, то мы получим то же самое представление для уравнения эллиптического типа, что и для гиперболического. Поэтому пока что повременим с заменой и подставим решение $\varphi(x,y)$ в уравнение (1.6):

$$\begin{gathered}a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = a(\alpha_x + i\beta_x)^2 + b(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + \\ + c(\alpha_y + i\beta_y)^2 = a\left(\alpha_x^2 + i2\alpha_x\beta_x - \beta_x^2\right) + \\ + b\left(\alpha_x\alpha_y + i\alpha_x\beta_y + i\alpha_y\beta_x - \beta_x\beta_y\right) + c\left(\alpha_y^2 + i2\alpha_y\beta_y - \beta_y^2\right) = \\ = a\alpha_x^2 - a\beta_x^2 + b\alpha_x\alpha_y - b\beta_x\beta_y + c\alpha_y^2 - c\beta_y^2 + \\ + i\left(2a\alpha_x\beta_x + b\alpha_x\beta_y + b\alpha_y\beta_x + 2c\alpha_y\beta_y\right) = 0.\end{gathered}$$

В результате получилось, что некоторое комплексное число равно нулю, а это возможно только в том случае, когда действительная и мнимая части равны нулю:

$$a\alpha_x^2 + b\alpha_x\alpha_y + c\alpha_y^2 = a\beta_x^2 + b\beta_x\beta_y + c\beta_y^2,$$
$$2a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2c\alpha_y\beta_y = 0.$$

Отметим, что в первом равенстве справа и слева стоят выражения, подобные выражениям для коэффициентов A (при $\alpha = \xi$) и C (при $\beta = \eta$) в (1.5), а левая часть второго выражения похожа на коэффициент B (при $\alpha = \xi$ и $\beta = \eta$) из (1.5). Сделаем замену переменных $\xi = \alpha$ и $\eta = \beta$ и получим, что $A = C$ и $B = 0$. Убедимся, что равные коэффициенты A и B не обращаются в нуль, иначе уравнение (1.4) не будет являться уравнением второго порядка:

$$B^2 - 4AC = -4A^2 = (b^2 - 4ac)|J|^2 < 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad C \neq 0.$$

Таким образом, подставляя $A = C \neq 0$, $B = 0$ в уравнение (1.4), получаем *каноническую форму уравнения эллиптического типа*:

$$A(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0. \tag{1.11}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Определить тип уравнения и привести уравнение к каноническому виду:

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0. \tag{1.12}$$

Определим коэффициенты перед старшими производными и функцию f (все аргументы для удобства изложения опущены): $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $f = 0$. Найдем дискриминант и определим его знак: $D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$. Поскольку дискриминант положителен ($D > 0$), уравнение (1.12) является уравнением гиперболического типа. Составим квадратное уравнение (1.7) для уравнения (1.12):

$$\left(\frac{z_x}{z_y}\right)^2 + 3\frac{z_x}{z_y} + 2 = 0.$$

Ввиду того что дискриминант $D = 1$ положителен, данное квадратное уравнение имеет два действительных решения:

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{-3 \pm 1}{2}.$$

Решим полученные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{z_x}{z_y} = -2, \\ \dfrac{z_x}{z_y} = -1; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_x + 2z_y = 0, \\ z_x + z_y = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{2}, \\ \dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1}; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = C_1, \\ x - y = C_2. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = 2x - y, \\ \eta = x - y. \end{cases}$$

Посчитаем первые и вторые частные производные только что введенных функций: $\xi_x = 2$, $\xi_y = -1$, $\eta_x = 1$, $\eta_y = -1$, $\xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0$. Поскольку производные не зависят от x и y, то можно не выражать эти переменные из системы для подстановки в значения производных.

Далее можно действовать двумя способами. Разберем оба.

Первый способ. Посчитаем коэффициенты A, B, C и функцию F, используя выражения (1.5). Поскольку функции ξ и η выбраны таким образом, чтобы коэффициенты A и C обращались в нуль, то остается найти только B и F:

$$\begin{aligned} B &= 2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2c\xi_y\eta_y = \\ &\quad = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1) + \\ &\quad + 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = -1, \\ F &= a(u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}) + b(u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}) + \\ &\quad + c(u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}) + f = 0. \end{aligned}$$

Запишем первую каноническую форму уравнения гиперболического типа (1.12):

$$Bu_{\xi\eta} + F = 0 \quad \Rightarrow \quad -u_{\xi\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\xi\eta} = 0.$$

Второй способ. Посчитаем первые и вторые частные производные функции u в новых переменных ξ и η:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = 2u_\xi + u_\eta,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi - u_\eta,\\
u_{xx} &= (2u_\xi + u_\eta)_x = (2u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_x + (2u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_x =\\
&= 2 \cdot (2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + 1 \cdot (2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) =\\
&= 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\\
u_{xy} &= (2u_\xi + u_\eta)_y = (2u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + (2u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y =\\
&= -2u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} = -2u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta},\\
u_{yy} &= (-u_\xi - u_\eta)_y = (-u_\xi - u_\eta)_\xi \xi_y + (-u_\xi - u_\eta)_\eta \eta_y =\\
&= u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Подставим производные функции u в исходное уравнение и получим первую каноническую форму уравнения гиперболического типа (1.12):

$$\begin{gathered}
4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 6u_{\xi\xi} - 9u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\xi} +\\
+4u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad -u_{\xi\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\xi\eta} = 0.
\end{gathered}$$

Записав первую каноническую форму уравнения (1.12), легко найти его решение:

$$\begin{gathered}
u_{\xi\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\xi = \widetilde{G}_1(\xi) \quad \Rightarrow \quad u(\xi, \eta) = G_1(\xi) + G_2(\eta) \quad \Rightarrow\\
\Rightarrow \quad u(x, y) = G_1(2x - y) + G_2(x - y),
\end{gathered}$$

где $\widetilde{G}_1$, G_1 и G_2 – произвольные функции.

Перейдем ко второй канонической форме уравнения гиперболического типа (1.12) с помощью следующей замены:

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta,\\ \beta = \xi - \eta. \end{cases}$$

Посчитаем необходимые первые и вторые производные функции u в новых переменных α и β:

$$u_\xi = u_\alpha + u_\beta,$$

$$
\begin{aligned}
&u_\eta = u_\alpha - u_\beta,\\
&u_{\xi\eta} = (u_\alpha + u_\beta)_\alpha - (u_\alpha + u_\beta)_\beta = u_{\alpha\alpha} + u_{\alpha\beta} - u_{\alpha\beta} - u_{\beta\beta} =\\
&\quad = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, получим вторую каноническую форму уравнения (1.12):

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 0.$$

Ответ. Уравнение (1.12) является уравнением гиперболического типа. Первая каноническая форма: $u_{\xi\eta} = 0$. Вторая каноническая форма: $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 0$.

Пример 2. Определить тип уравнения и привести уравнение к каноническому виду:

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0. \tag{1.13}$$

Определим коэффициенты перед старшими производными и функцию f (все аргументы для удобства изложения опущены): $a = x^2$, $b = 2xy$, $c = y^2$, $f = 0$. Найдем дискриминант и определим его знак: $D = b^2 - 4ac = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$. Поскольку дискриминант равен нулю ($D = 0$), уравнение (1.13) является уравнением параболического типа. Составим квадратное уравнение (1.7) для уравнения (1.13):

$$x^2 \left(\frac{z_x}{z_y}\right)^2 + 2xy\frac{z_x}{z_y} + y^2 = 0.$$

Ввиду того что дискриминант $D = 0$, данное квадратное уравнение имеет один действительный корень:

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{-2xy}{2x^2} = -\frac{y}{x}.$$

Решим полученное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{z_x}{z_y} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad xz_x + yz_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln x - \ln y = \ln C \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = C.$$

Таким образом, $\xi = \dfrac{x}{y}$. В качестве функции η нужно взять такую дважды непрерывно дифференцируемую функцию, что якобиан $|J| \neq 0$. Пусть $\eta = y$. Убедимся, что якобиан отличен от нуля:

$$|J| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \frac{1}{y} \cdot 1 - \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot 0 = \frac{1}{y} \neq 0.$$

Значит, можно сделать следующую замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{y}, \\ \eta = y. \end{cases}$$

Выразим x и y: $x = \xi\eta$, $y = \eta$. Запишем первые и вторые производные функций ξ и η:

$$\xi_x = \frac{1}{y} = \frac{1}{\eta}, \quad \xi_y = -\frac{x}{y^2} = -\frac{\xi\eta}{\eta^2} = -\frac{\xi}{\eta}, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_y = 1,$$
$$\xi_{xx} = 0, \quad \xi_{xy} = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{\eta^2}, \quad \xi_{yy} = \frac{2x}{y^3} = \frac{2\xi\eta}{\eta^3} = \frac{2\xi}{\eta^2},$$
$$\eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0.$$

Также запишем коэффициенты a, b и c в терминах функций ξ и η: $a = x^2 = \xi^2\eta^2$, $b = 2xy = 2\xi\eta^2$, $c = y^2 = \eta^2$.

Далее можно действовать двумя способами, как и в первом примере. Разберем оба способа.

Первый способ. Посчитаем коэффициенты A, B, C и функцию F, используя выражения (1.5). Функция ξ выбрана таким образом, чтобы коэффициент A обращался в нуль. Из равенства дискриминанта нулю следует, что и коэффициент B обращается в нуль. Поэтому остается найти только C и F:

$$C = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = \xi^2\eta^2 \cdot 0 + 2\xi\eta^2 \cdot 0 \cdot 1 + \eta^2 \cdot 1^2 = \eta^2,$$

$$F = a(u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}) + b(u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}) +$$
$$+ c(u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}) + f = \xi^2 \eta^2 \cdot 0 +$$
$$+ 2\xi\eta^2 \left(u_\xi \cdot \left(-\frac{1}{\eta^2} \right) + u_\eta \cdot 0 \right) + \eta^2 \left(u_\xi \cdot \frac{2\xi}{\eta^2} + u_\eta \cdot 0 \right) = 0.$$

Запишем каноническую форму уравнения параболического типа (1.13):

$$C u_{\eta\eta} + F = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^2 u_{\eta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\eta\eta} = 0.$$

Второй способ. Посчитаем первые и вторые частные производные функции u в новых переменных ξ и η:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \cdot \frac{1}{\eta} + u_\eta \cdot 0 = \frac{1}{\eta} u_\xi,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta} \right) + u_\eta \cdot 1 = -\frac{\xi}{\eta} u_\xi + u_\eta,$$
$$u_{xx} = \left(\frac{1}{\eta} u_\xi \right)_x = \left(\frac{1}{\eta} u_\xi \right)_\xi \xi_x + \left(\frac{1}{\eta} u_\xi \right)_\eta \eta_x =$$
$$= \frac{1}{\eta} u_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{\eta} + \left(-\frac{1}{\eta^2} u_\xi + \frac{1}{\eta} u_{\xi\eta} \right) \cdot 0 = \frac{1}{\eta^2} u_{\xi\xi},$$
$$u_{xy} = \left(\frac{1}{\eta} u_\xi \right)_y = \left(\frac{1}{\eta} u_\xi \right)_\xi \xi_y + \left(\frac{1}{\eta} u_\xi \right)_\eta \eta_y =$$
$$= \frac{1}{\eta} u_{\xi\xi} \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta} \right) + \left(-\frac{1}{\eta^2} u_\xi + \frac{1}{\eta} u_{\xi\eta} \right) \cdot 1 =$$
$$= -\frac{\xi}{\eta^2} u_{\xi\xi} + \frac{1}{\eta} u_{\xi\eta} - \frac{1}{\eta^2} u_\xi,$$
$$u_{yy} = \left(-\frac{\xi}{\eta} u_\xi + u_\eta \right)_y =$$
$$= \left(-\frac{\xi}{\eta} u_\xi + u_\eta \right)_\xi \xi_y + \left(-\frac{\xi}{\eta} u_\xi + u_\eta \right)_\eta \eta_y =$$
$$= \left(-\frac{1}{\eta} u_\xi - \frac{\xi}{\eta} u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} \right) \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta} \right) +$$
$$+ \left(\frac{\xi}{\eta^2} u_\xi - \frac{\xi}{\eta} u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \right) \cdot 1 =$$

$$= \frac{\xi^2}{\eta^2} u_{\xi\xi} - 2\frac{\xi}{\eta} u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2\frac{\xi}{\eta^2} u_{\xi}.$$

Подставим производные функции u в исходное уравнение и получим каноническую форму уравнения параболического типа (1.13):

$$\xi^2\eta^2 \frac{1}{\eta^2} u_{\xi\xi} + 2\xi\eta^2 \left(-\frac{\xi}{\eta^2} u_{\xi\xi} + \frac{1}{\eta} u_{\xi\eta} - \frac{1}{\eta^2} u_{\xi} \right) +$$
$$+ \eta^2 \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} u_{\xi\xi} - 2\frac{\xi}{\eta} u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2\frac{\xi}{\eta^2} u_{\xi} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \eta^2 u_{\eta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\eta\eta} = 0.$$

Записав каноническую форму уравнения (1.13), легко найти его решение:

$$u_{\eta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\eta} = G_1(\xi) \quad \Rightarrow \quad u(\xi, \eta) = \eta G_1(\xi) + G_2(\xi) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u(x, y) = y G_1 \left(\frac{x}{y} \right) + G_2 \left(\frac{x}{y} \right),$$

где G_1 и G_2 – произвольные функции.

Ответ. Уравнение (1.13) является уравнением параболического типа. Каноническая форма: $u_{\eta\eta} = 0$.

Пример 3. Определить тип уравнения и привести уравнение к каноническому виду:

$$3u_{xx} + 12u_{xy} + 39u_{yy} = \cos x - u_y. \tag{1.14}$$

Определим коэффициенты перед старшими производными и функцию f (все аргументы для удобства изложения опущены): $a = 3$, $b = 12$, $c = 39$, $f = u_y - \cos x$. Найдем дискриминант и определим его знак: $D = b^2 - 4ac = 144 - 468 = -324 < 0$. Поскольку дискриминант отрицателен ($D < 0$), уравнение (1.14) является уравнением эллиптического типа. Составим квадратное уравнение (1.7) для уравнения (1.14):

$$3\left(\frac{z_x}{z_y} \right)^2 + 12\frac{z_x}{z_y} + 39 = 0.$$

Ввиду того что дискриминант $D = -324$ отрицателен, данное квадратное уравнение имеет два комплексно сопряженных решения:

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{-12 \pm \sqrt{-324}}{6} = \frac{-12 \pm 18i}{6} = -2 \pm 3i.$$

Решим полученные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{z_x}{z_y} = -2 + 3i, \\ \dfrac{z_x}{z_y} = -2 - 3i; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} z_x + (2 - 3i) z_y = 0, \\ z_x + (2 + 3i) z_y = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{2 - 3i}, \\ \dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{2 + 3i}; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} (2 - 3i)x - y = C_1, \\ (2 + 3i)x - y = C_2; \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - y - i3x = C_1, \\ 2x - y + i3x = C_2. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = \operatorname{Re}(2x - y + i3x) = 2x - y, \\ \eta = \operatorname{Im}(2x - y + i3x) = 3x. \end{cases}$$

Посчитаем первые и вторые частные производные только что введенных функций: $\xi_x = 2$, $\xi_y = -1$, $\eta_x = 3$, $\eta_y = 0$, $\xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0$.

Выразим x, y и f с помощью новых переменных:

$$x = \frac{\eta}{3}, \quad y = 2x - \xi = \frac{2}{3}\eta - \xi,$$
$$f = u_y - \cos x = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y - \cos\frac{\eta}{3} = -u_\xi - \cos\frac{\eta}{3}.$$

Далее, как и ранее, можно действовать двумя способами, которые ниже будут разобраны.

Первый способ. Посчитаем коэффициенты A, B, C и функцию F, используя выражения (1.5). Поскольку функции ξ и η выбраны таким образом, чтобы коэффициенты A и C совпадали, а коэффициент $B = 0$, то остается найти только $A = C \neq 0$ (удобнее подставить выражение для C) и F:

$$\begin{aligned}
&A = C = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 \cdot 0 + 39 \cdot 0 = 27,\\
&F = a(u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}) + b(u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}) +\\
&\quad + c(u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}) + f =\\
&\quad = 3 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 39 \cdot 0 - u_\xi - \cos\frac{\eta}{3} = -u_\xi - \cos\frac{\eta}{3}.
\end{aligned}$$

Запишем каноническую форму уравнения эллиптического типа (1.14):

$$A(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + F = 0 \quad \Rightarrow \quad 27(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - u_\xi - \cos\frac{\eta}{3} = 0.$$

Второй способ. Посчитаем первые и вторые частные производные функции u в новых переменных ξ и η:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = 2u_\xi + 3u_\eta,\\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = -u_\xi,\\
u_{xx} &= (2u_\xi + 3u_\eta)_x = (2u_\xi + 3u_\eta)_\xi\xi_x + (2u_\xi + 3u_\eta)_\eta\eta_x =\\
&\quad = 2 \cdot (2u_{\xi\xi} + 3u_{\eta\xi}) + 3 \cdot (2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}) = 4u_{\xi\xi} + 12u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta},\\
u_{xy} &= (2u_\xi + 3u_\eta)_y = (2u_\xi + 3u_\eta)_\xi\xi_y + (2u_\xi + 3u_\eta)_\eta\eta_y =\\
&\quad = -1 \cdot (2u_{\xi\xi} + 3u_{\eta\xi}) + 0 \cdot (2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}) = -2u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta},\\
u_{yy} &= (-u_\xi)_y = (-u_\xi)_\xi\xi_y + (-u_\xi)_\eta\eta_y =\\
&\quad = -u_{\xi\xi} \cdot (-1) - u_{\xi\eta} \cdot 0 = u_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

Подставим производные функции u в исходное уравнение и получим каноническую форму уравнения эллиптического типа (1.14):

$$\begin{gathered}
3(4u_{\xi\xi} + 12u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}) + 12(-2u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta}) + 39u_{\xi\xi} =\\
= u_\xi + \cos\frac{\eta}{3} \quad \Rightarrow \quad 12u_{\xi\xi} + 36u_{\xi\eta} + 27u_{\eta\eta} - 24u_{\xi\xi} - 36u_{\xi\eta} +
\end{gathered}$$

$$+39u_{\xi\xi} - u_\xi - \cos\frac{\eta}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 27(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - u_\xi - \cos\frac{\eta}{3} = 0.$$

Ответ. Уравнение (1.14) является уравнением эллиптического типа. Каноническая форма: $27(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - u_\xi - \cos\dfrac{\eta}{3} = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Определить тип уравнения и привести уравнение к каноническому виду.

1.1. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$.

1.2. $5u_{xx} + 7u_y + 13u = 3u_{xy} - 4u_{yy} + \sin y$.

1.3. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0$.

1.4. $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \cos x$.

1.5. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$.

1.6. $(\sin^2 x)u_{xx} - 2y(\sin x)u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$.

1.7. $u_{tt} - 3u_x + 5u_{xx} = 8u_{tx} + e^{-t}x$.

1.8. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 32u$.

1.9. $2u_{xx} - 8xu_{xy} + 8x^2 u_{yy} = 3u_x + e^x$.

1.10. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4 u = 0$.

1.11. $11u_{tt} - e^{-tx^2} + u_t = 16u_{tx} - 9u_{xx}$.

1.12. $3u_{xx} - 18u_{xy} + 27u_{yy} - 5u_y = \sin 5x$.

1.13. $2u_{xx} - u_{xy} - 3u_{yy} = \cos 2x$.

1.14. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - 2u = 0$.

1.15. $4u_{xx} - 12xu_{xy} + 9x^2 u_{yy} = 2u_x - u_y - \ln x + 5y$.

1.16. $3u_{xx} + 7u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$

1.17. $2u_{xx} + 4xu_{xy} + 2\left(x^2 + 1\right) u_{yy} + 5u_y = u_x - \cos 7x.$

1.18. $u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0.$

1.19. $9u_{xx} - 6xyu_{xy} + x^2y^2u_{yy} - 2\ln y = 4u_x.$

1.20. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0,\ x > 0,\ y > 0.$

1.21. $4u_{xx} - 12yu_{xy} + 9y^2u_{yy} = -4u_{yy} + u_y - 2x.$

1.22. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$

1.23. $2u_{xx} + u_{xy} - 10u_{yy} = u_x - u_y - 5y^2 + 3e^x.$

1.24. $(1 + x^2)^2u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0.$

1.25. $25u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} + u_y + 2u = 5y + 2x.$

2. Уравнения колебаний. Начальные и граничные условия

В окружающем нас мире множество явлений имеют черты колебательных и волновых процессов, например, колебания маятника, колебания твердых тел (струны, стержня, мембраны), волны на поверхности жидкости, звуковые волны, электромагнитные волны, тепловые волны и пр. Несмотря на большое разнообразие и различную природу колебательных и волновых процессов, можно выделить ряд закономерностей при их описании.

2.1. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны

Рассмотрим натянутую и закрепленную на концах струну длины l. Введем следующие обозначения и предположения:

1. В состоянии равновесия без внешних воздействий струна вытянута вдоль оси Ox.
2. Будем рассматривать только малые поперечные колебания струны.
3. Будем рассматривать плоские поперечные колебания струны, полагая, что движение происходит в одной плоскости и все точки перемещаются в направлении, перпендикулярном положению равновесия. Обозначим через $u(t, x)$ отклонение точки струны с координатой x от положения равновесия в момент времени t.
4. Струна свободно изгибается и не оказывает сопротивления изменению формы. Следовательно, напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательной к ее профилю и струна оказывает сопротивление только растяжению. Силу натяжения струны обозначим T_0. Будем предполагать, что сила натяжения не зависит от времени и координаты.

5. Струна рассматривается как тонкая нить, поэтому толщиной струны можно пренебречь. Обозначим через ρ плотность струны.
6. На струну действуют внешние силы, перпендикулярные оси Ox. Обозначим через $f(t, x)$ линейную плотность внешних сил.

Выделим произвольный малый участок струны δx и запишем для него второй закон Ньютона. Поскольку мы рассматриваем поперечные колебания, то нас будет интересовать только проекция сил на ось Ou (рис. 1):

$$\rho \int\limits_{x}^{x+\delta x} u_{tt}(t, s)\, ds = -T_0 \sin\alpha + T_0 \sin\beta + \rho \int\limits_{x}^{x+\delta x} f(t, s)\, ds. \quad (2.1)$$

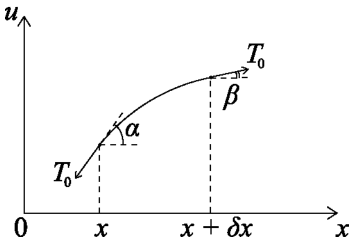

Рис. 1. Схематичное изображение малого участка струны длиной δx

Для малых колебаний справедливо следующее:

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = u_x(t, x),$$
$$\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta = u_x(t, x + \delta x).$$

Следовательно, (2.1) можно переписать в виде

$$\rho \int\limits_{x}^{x+\delta x} u_{tt}(t, s)\, ds = T_0[u_x(t, x + \delta x) - u_x(t, x)] + \rho \int\limits_{x}^{x+\delta x} f(t, s)\, ds.$$

Вспомним теорему о среднем [1, с. 334; 2, с. 113], согласно которой если функция $g(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\exists \xi \in [a, b] : \int\limits_a^b g(s)\,ds = g(\xi)(b-a). \tag{2.2}$$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$\rho u_{tt}(t, \xi_1)\delta x = T_0[u_x(t, x+\delta x) - u_x(t, x)] + \rho f(t, \xi_2)\delta x,$$

где $\xi_1, \xi_2 \in [x, x+\delta x]$. Разделим левую и правую части этого уравнения на δx:

$$\rho u_{tt}(t, \xi_1) = T_0 \frac{u_x(t, x+\delta x) - u_x(t, x)}{\delta x} + \rho f(t, \xi_2).$$

Устремим к нулю δx, принимая во внимание, что в этом случае $\xi_1 \to x$, $\xi_2 \to x$ и

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{u_x(t, x+\delta x) - u_x(t, x)}{\delta x} = u_{xx}(t, x),$$

окончательно получаем

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) называется *уравнением вынужденных колебаний струны*. Примеры внешних сил:

- гравитационная сила mg, где m – масса струны; g – ускорение свободного падения;
- сила сопротивления $\beta u_t(t, x)$, где β – коэффициент пропорциональности;
- сила упругости $\gamma u(t, x)$, где γ – коэффициент пропорциональности.

В отсутствие внешних воздействий колебание струны описывается *уравнением свободных колебаний*:

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x). \tag{2.4}$$

2.2. Малые продольные колебания стержня

Рассмотрим прямой упругий стержень длины l, колебания в котором являются достаточно малыми, то есть не вызывают заметных внешних деформаций и подчиняются закону Гука. Расположим стержень вдоль оси Ox (рис. 2).

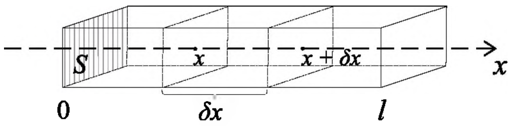

Рис. 2. Схематичное изображение прямого стержня длиной l

Стержень характеризуется следующими параметрами: S – площадь поперечного сечения, ρ – плотность, E – модуль Юнга. Функция $u(t,x)$ задает продольное смещение каждого сечения стержня из положения равновесия в момент времени t. Рассмотрим малый участок стержня $[x, x+\delta x]$ и запишем для него второй закон Ньютона в проекции на ось Ox:

$$\rho S \int\limits_{x}^{x+\delta x} u_{tt}(t,s)\,ds = F(t,x+\delta x) - F(t,x) + \rho S \int\limits_{x}^{x+\delta x} f(t,s)\,ds,$$

где $F(t,x)$ – сила растяжения/сжатия, действующая со стороны соседнего участка стержня; $f(t,x)$ – линейная плотность внешней силы, которая направлена параллельно оси Ox. Заметим, что сила растяжения/сжатия пропорциональна относительной деформации стержня в точке x: $F(t,x) = ESu_x(t,x)$. Тогда уравнение принимает вид

$$\rho S \int\limits_{x}^{x+\delta x} u_{tt}(t,s)ds = ES\left(u_x(t,x+\delta x) - u_x(t,x)\right) +$$

$$+ \rho S \int\limits_{x}^{x+\delta x} f(t,s)ds.$$

При $\delta x \to 0$ окончательно получаем

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t, x), \quad c^2 = \frac{E}{\rho}. \tag{2.5}$$

Сравнив полученное *уравнение продольных колебаний стержня* (2.5) с *уравнением поперечных колебаний струны* (2.3), приходим к выводу, что колебательные процессы различной природы в одномерном пространстве описываются одинаково с помощью *одномерного волнового уравнения гиперболического типа.*

В общем случае *колебательные процессы в многомерном пространстве* описываются следующим уравнением:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, \Omega), \tag{2.6}$$

где Δu – оператор Лапласа функции u; Ω – координаты пространства, в котором решается уравнение. В декартовой системе координат в двумерном пространстве $\Omega = \{x, y\}$ оператор Лапласа имеет вид $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, в трехмерном пространстве $\Omega = \{x, y, z\}$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

2.3. Начальные и граничные условия для одномерного волнового уравнения

Одномерное волновое уравнение не содержит информации о начальном профиле объекта (струны или стержня), о характере закрепления его концов. Совершенно очевидно, что эти факторы оказывают существенное влияние на колебательный процесс в целом. Само по себе волновое уравнение имеет множество решений. Для однозначного определения искомой функции $u(t, x)$ необходимо дополнительно поставить начальные и граничные условия. Рассмотрим, какие особенности волнового процесса задают начальные и граничные условия на примере задачи о колебании струны длины l.

Начальные условия:

$$u(0, x) = \varphi(x),$$

$$u_t(0, x) = \psi(x).$$

Функция $\varphi(x)$ имеет физический смысл начального смещения струны, а $\psi(x)$ определяет начальную скорость каждой точки струны.

Граничные условия:

1. *Условия первого рода (задача Дирихле)* задают закон перемещения граничных точек струны:

$$u(t, 0) = \mu_1(t),$$
$$u(t, l) = \mu_2(t),$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – функции, описывающие смещение точек $x = 0$ и $x = l$ соответственно.

Если концы струны жестко закреплены, то они остаются неподвижными в любой момент времени, следовательно,

$$u(t, 0) = 0,$$
$$u(t, l) = 0.$$

2. *Условия второго рода (задача Неймана)* определяют силы, действующие на концы струны.

Рассмотрим участок струны $[0,\ \delta x]$. Положим, что в точке $x = 0$ на струну действует сила $\tilde{\nu}_1(t, 0)$. Тогда уравнение движения участка струны $[0,\ \delta x]$ можно записать в виде

$$\rho u_{tt}(t, \xi)\delta x = T_0 u_x(t, 0 + \delta x) + \tilde{\nu}_1(t, 0), \quad \xi \in [0,\ \delta x],$$
$$\delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = T_0 u_x(t, 0) + \tilde{\nu}_1(t, 0) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u_x(t, 0) = -\frac{\tilde{\nu}_1(t, 0)}{T_0} = \nu_1(t).$$

Проводя аналогичные рассуждения для участка $[l - \delta x,\ l]$ струны, получаем

$$\rho u_{tt}(t, \xi)\delta x = -T_0 u_x(t, l - \delta x) + \tilde{\nu}_2(t, l), \quad \xi \in [l - \delta x,\ l],$$
$$\delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -T_0 u_x(t, l) + \tilde{\nu}_2(t, l) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_x(t,l) = \frac{\tilde{\nu}_2(t,l)}{T_0} = \nu_2(t).$$

Таким образом, в неоднородных граничных условиях второго рода

$$u_x(t,0) = \nu_1(t),$$
$$u_x(t,l) = \nu_2(t)$$

функции $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ задают силы, действующие на концы струны $x = 0$ и $x = l$ соответственно. Если никакие силы не действуют на концы струны, то концы струны свободно перемещаются, что описывается однородными граничными условиями второго рода:

$$u_x(t,0) = 0,$$
$$u_x(t,l) = 0.$$

3. *Условия третьего рода (задача Робена)* описывают законы смещения струны, на которую одновременно действуют силы упругой и неупругой природы.

Пусть на левый конец струны $x = 0$ действуют упругая сила $ku(t,0)$ и дополнительно сосредоточенная сила неупругой природы $\tilde{\kappa}_1(t,0)$. Запишем для участка струны $[0,\ \delta x]$ уравнение движения для переменной $\xi \in [0,\ \delta x]$:

$$\rho u_{tt}(t,\xi)\delta x = T_0 u_x(t, 0+\delta x) - ku(t,0) + \tilde{\kappa}_1(t,0),$$
$$\delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = T_0 u_x(t,0) - ku(t,0) + \tilde{\kappa}_1(t,0) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u_x(t,0) - \frac{k}{T_0}u(t,0) = -\frac{\tilde{\kappa}_1(t,0)}{T_0} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u_x(t,0) - hu(t,0) = \kappa_1(t), \quad h = \frac{k}{T_0} > 0, \quad \kappa_1(t) = \frac{\tilde{\kappa}_1(t,0)}{T_0}.$$

Теперь запишем уравнение движения участка струны $[l-\delta x,\ l]$, на правый конец $x = l$ которого действуют упругая сила $Ku(t,l)$ и дополнительно сосредоточенная сила неупругой природы $\tilde{\kappa}_2(t,l)$. Если переменная $\xi \in [l-\delta x,\ l]$, то:

$$\rho u_{tt}(t,\xi)\delta x = -T_0 u_x(t, l-\delta x) - Ku(t,l) + \tilde{\kappa}_2(t,l),$$

$$\delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -T_0 u_x(t,l) - Ku(t,l) + \tilde{\kappa}_2(t,l) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u_x(t,l) + \frac{K}{T_0} u(t,l) = \frac{\tilde{\kappa}_2(t,l)}{T_0} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u_x(t,l) + Hu(t,l) = \kappa_2(t), \quad H = \frac{K}{T_0} > 0, \quad \kappa_2(t) = \frac{\tilde{\kappa}_2(t,l)}{T_0}.$$

Таким образом, если на упруго закрепленные концы струны одновременно действуют сосредоточенные силы упругой и неупругой природы, то этот процесс описывается неоднородными граничными условиями третьего рода:

$$u_x(t,0) - hu(t,0) = \kappa_1(t),$$
$$u_x(t,l) + Hu(t,l) = \kappa_2(t).$$

Однородные граничные условия третьего рода означают упругое закрепление концов струны:

$$u_x(t,0) - hu(t,0) = 0,$$
$$u_x(t,l) + Hu(t,l) = 0.$$

Если в задаче на каждой границе заданы граничные условия разного рода, то эта задача называется задачей со смешанными граничными условиями.

Примеры решения задач

Пример 1. Поставить задачу о малых колебаниях струны длины l, если в начальный момент времени она имеет форму параболы, симметричной относительно середины струны. Начальные скорости точек струны равны нулю. Концы струны закреплены.

Математическая модель сформулированной выше задачи содержит уравнение свободных колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

начальные условия

$$u(0,x) = \alpha x(x-l),$$
$$u_t(0,x) = 0$$

и граничные условия первого рода:

$$u(t,0) = 0,$$
$$u(t,l) = 0.$$

В начальных условиях α – произвольная константа, характеризующая профиль параболы.

Пример 2. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях полуограниченной струны, на которую действует постоянная распределенная сила $f(t,x)$. На границу струны действует сила упругости. Начальные условия нулевые.

В этой задаче математическая модель включает уравнение вынужденных колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,$$

нулевые начальные условия

$$u(0,x) = 0,$$
$$u_t(0,x) = 0$$

и одно граничное условие третьего рода:

$$u_x(t,0) - hu(t,0) = 0,$$

где h – константа, характеризующая упругие силы.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Поставить задачу о малых поперечных колебаниях струны $0 < x < l$, конец $x = 0$ которой свободен, а конец $x = l$ закреплен жестко. Начальные отклонения описываются функцией $f(x)$, начальная скорость равна $g(x)$.

2.2. Поставить задачу о малых поперечных колебаниях струны $0 < x < l$, один конец $x = 0$ которой закреплен жестко, а конец $x = l$ – упруго. Начальные отклонения и скорости точек струны произвольные.

2.3. Струна с жестко закрепленными концами возбуждается ударом жесткого выпуклого молоточка, сообщающего ей начальное распределение скоростей, равное $\cos\dfrac{\pi(x-x_0)}{2l}$. Поставить задачу о колебании струны, если начальное отклонение равно нулю (x_0 – константа).

2.4. Поставить задачу о колебаниях струны $0 < x < \pi$ в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости движения струны, если левый конец закреплен упруго, а правый закреплен жестко. Начальные скорости равны нулю, а смещения произвольные.

2.5. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня, левый конец которого закреплен жестко, а к правому с момента $t = 0$ приложена сила $F_0 = const$. Начальные условия произвольные.

2.6. Поставить задачу о малых поперечных колебаниях струны $0 < x < l$ с жестко закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое и точкам ее участка $[a, b]$ $(0 < a < b < l)$ сообщена постоянная начальная скорость v_0.

2.7. Поставить задачу о поперечных колебаниях струны с произвольными начальными условиями. На левую границу струны действуют сила упругости и известная внешняя сила. Правая граница двигается по известному закону $\mu(t)$.

2.8. Поставить задачу о поперечных колебаниях струны в упругой среде, сила реакции которой пропорциональна смещению струны, если левый конец закреплен упруго, а на правый действует известная внешняя сила. Начальные условия произвольные.

2.9. Поставить задачу о продольных колебаниях упругого однородного стержня, жестко закрепленного на обоих концах. На стержень действуют распределенная внешняя сила и сила сопротивления, пропорциональная скорости движения стержня. Начальные условия произвольные.

2.10. Поставить задачу о малых колебаниях упругого однородного стержня длины 2 $(0 < x < 2)$, левый конец которого закреплен упруго, а правый конец свободен. Начальные отклонения и скорости произвольные.

2.11. Поставить задачу о продольных колебаниях упругого однородного стержня, на левую границу которого действуют известная внешняя сила и сила упругости. На правую границу действует только известная сила. Начальные условия нулевые.

2.12. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости движения струны, предполагая, что концы струны закреплены жестко. Начальные отклонения произвольные, начальные скорости нулевые.

2.13. К струне, концы которой закреплены неподвижно, приложена непрерывно распределенная поперечная сила, линейная плотность которой равна $F(t, x)$. Поставить краевую задачу для определения поперечных отклонений точек струны при $t > 0$. Начальные условия произвольные.

2.14. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным деформации струны, предполагая, что концы закреплены неподвижно. Начальные условия произвольные.

2.15. Поставить задачу о поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости движения струны, если левый конец закреплен упруго, а на правый действует известная внешняя сила $F(t)$. Начальные условия произвольные.

2.16. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длины 3 $(0 < x < 3)$, правый конец которой закреплен упруго, а левый – двигается свободно. К струне приложена непрерывно распределенная поперечная сила, линейная плотность которой равна $G(t, x)$. Начальные смещение и скорость точек струны равны нулю.

2.17. На левый и упруго закрепленный правый концы струны длины 5 $(0 < x < 5)$ действуют различные известные внешние силы. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, если начальное смещение точек струны описывается функцией $p(x)$, начальная скорость – функцией $q(x)$.

2.18. Поставить задачу о продольных колебаниях упругого однородного стержня длины 4, на который действует сила, плотность которой описывается функцией $g(t, x)$. Левый конец стержня жестко закреплен, на правый конец действует известная внешняя сила. Начальные условия произвольные.

2.19. Поставить задачу о продольных колебаниях упругого однородного стержня длины 7, жестко закрепленного на правом конце. На левый конец стержня действуют силы упругой и неупругой природы (сила неупругой природы считается известной). На стержень действует сила сопротивления, пропорциональная скорости движения стержня. Начальные условия нулевые.

3. Уравнения гиперболического типа на бесконечной прямой

В этой главе будут рассмотрены гиперболические задачи на бесконечной прямой. Случай бесконечной прямой соответствует, например, поперечным плоским колебаниям бесконечной струны или продольным колебаниям бесконечного упругого стержня. Колебания могут быть свободными, что соответствует однородным гиперболическим уравнениям, и вынужденными, что описывается неоднородным уравнением. Для однозначного определения решения задачи о колебаниях струны или стержня должны быть заданы начальные условия, а именно начальный профиль струны или стержня и начальные скорости движения точек струны или стержня. Начальные условия могут быть как однородными, так и неоднородными.

Сначала будет рассмотрена задача с однородным гиперболическим уравнением и неоднородными начальными условиями, решение которой определяется формулой Даламбера. Затем будет решена задача с неоднородным уравнением и однородными начальными условиями. В заключение будет рассмотрен общий случай, сочетающий неоднородности в уравнении и начальных условиях. Следует отметить, что случай с однородными уравнением и начальными условиями имеет только тривиальное решение, поэтому такие случаи здесь и далее отдельно не рассматриваются.

3.1. Свободные колебания струны. Формула Даламбера

Изучение методов решения гиперболических уравнений начнем с задачи, описывающей свободные колебания неограниченной струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(0,x) &= \varphi(x), \\ u_t(0,x) &= \psi(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Приведем уравнение (3.1) к первой канонической форме. Для этого сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x - at. \end{cases}$$

Частные производные u_{tt} и u_{xx} в новых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{\xi\xi}\xi_t^2 + u_\xi \xi_{tt} + u_{\eta\eta}\eta_t^2 + u_\eta \eta_{tt} + 2u_{\xi\eta}\xi_t\eta_t = \\ &= a^2 u_{\xi\xi} + a^2 u_{\eta\eta} - 2a^2 u_{\xi\eta}, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx} + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x = \\ &= u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.1), получаем

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3.3}$$

Интегрирование по переменной η дает

$$u_\xi(\xi, \eta) = f(\xi),$$

где $f(\xi)$ – произвольная функция, зависящая только от ξ. Интегрирование по ξ приводит к следующему результату:

$$u(\xi, \eta) = \int f(\xi)\, d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta), \tag{3.4}$$

где $G(\eta)$ – произвольная функция, зависящая только от аргумента η. Выражение (3.4) является общим решением уравнения (3.3). Проводя обратную замену, получаем решение исходного уравнения (3.1) в переменных t и x:

$$u(t, x) = F(x + at) + G(x - at). \tag{3.5}$$

Подставляем общее решение в начальные условия:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x), \\ aF'(x) - aG'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Проинтегрируем второе уравнение системы в пределах от x_0 до x:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x), \\ \int\limits_{x_0}^{x} \big(F'(\xi) - G'(\xi)\big)\, d\xi = \dfrac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi. \end{cases}$$

Пользуясь свойством интегралов с переменным верхним пределом, получаем

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x), \\ F(x) - G(x) = \dfrac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi) d\xi. \end{cases}$$

Из последней системы определяем функции $F(x)$ и $G(x)$:

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi, \tag{3.6}$$

$$G(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{3.7}$$

Подставляя функции $F(x)$ и $G(x)$ в (3.5), приходим к общему решению исходной задачи (3.1), (3.2):

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{3.8}$$

Выражение (3.8) называется *формулой Даламбера.* Она определяет решение задачи Коши для волнового уравнения, описывающего свободные колебания бесконечной струны.

3.2. Вынужденные колебания струны

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях бесконечной струны, движение которой происходит за счет действия внешних сил, линейная плотность которых задается функцией $f(t,x)$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

начальные смещения и скорости точек струны отсутствуют:

$$\begin{aligned} u(0,x) &= 0, \\ u_t(0,x) &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Сформулируем вспомогательную задачу:

$$w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} w(t=\tau,x,\tau) &= 0, \\ w_t(t=\tau,x,\tau) &= f(\tau,x). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Докажем, что решение исходной задачи (3.9), (3.10) определяется по формуле

$$u(t,x) = \int\limits_0^t w(t,x,\tau)\,d\tau, \tag{3.13}$$

где $w(t,x,\tau)$ – решение вспомогательной задачи (3.11), (3.12). То есть требуется доказать, что подстановка (3.13) в (3.9), (3.10) приведет к вспомогательной задаче (3.11), (3.12), решение которой может быть определено с помощью формулы Даламбера.

Вычислим частные производные $u(t,x)$:

$$u_{xx}(t,x) = \int\limits_0^t w_{xx}(t,x,\tau)\,d\tau,$$

$$u_t(t,x) = \int\limits_0^t w_t(t,x,\tau)\,d\tau + w(t,x,\tau=t) = \int\limits_0^t w_t(t,x,\tau)\,d\tau.$$

Здесь мы воспользовались условием $w(t=\tau, x, \tau) = 0$ из (3.12) и правилом дифференцирования определенных интегралов [3, с. 146]:

$$I(\alpha) = \int\limits_{c(\alpha)}^{b(\alpha)} g(\alpha, \xi)\, d\xi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I'(\alpha) = \int\limits_{c(\alpha)}^{b(\alpha)} g'_\alpha(\alpha, \xi)\, d\xi + g(\alpha, b(\alpha))b'(\alpha) - g(\alpha, a(\alpha))c'(\alpha).$$

Вторая производная по переменной t вычисляется аналогично:

$$u_{tt}(t, x) = \int\limits_0^t w_{tt}(t, x, \tau)\, d\tau + w_t(t, x, \tau = t) =$$

$$= \int\limits_0^t w_{tt}(t, x, \tau)\, d\tau + f(t, x).$$

Подставляя u_{xx}, u_{tt} в (3.9), (3.10) и проводя элементарные преобразования, приходим к соотношению

$$\int\limits_0^t w_{tt}(t, x, \tau)\, d\tau = \int\limits_0^t a^2 w_{xx}(t, x, \tau)\, d\tau,$$

из которого следует, что подынтегральные выражения равны:

$$w_{tt}(t, x, \tau) = a^2 w_{xx}(t, x, \tau).$$

Получившееся уравнение совпадает с уравнением из вспомогательной задачи (3.11), причем для его вывода были использованы условия (3.12). Таким образом, решение исходной задачи (3.9), (3.10) свелось к решению вспомогательной задачи (3.11), (3.12).

Для решения вспомогательной задачи проведем замену переменных $t^* = t - \tau$. В новых переменных вспомогательная задача имеет вид

$$w_{t^*t^*} = a^2 w_{xx}, \quad t^* > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} &w(t^* = 0, x, \tau) = 0, \\ &w_{t^*}(t^* = 0, x, \tau) = f(\tau, x), \end{aligned} \tag{3.15}$$

а ее решение определяется формулой Даламбера:

$$w(t^*, x, \tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at^*}^{x+at^*} f(\tau, \xi)\, d\xi. \tag{3.16}$$

Подставляя (3.16) в (3.13) и переходя обратно от переменной t^* к t, получаем решение исходной задачи

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi)\, d\xi d\tau, \tag{3.17}$$

описывающей вынужденные колебания бесконечной струны.

3.3. Общий случай: неоднородные уравнение и начальные условия

В самом общем случае задача о колебаниях бесконечной струны может быть описана неоднородным гиперболическим уравнением с неоднородными начальными условиями:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &u(0, x) = \varphi(x), \\ &u_t(0, x) = \psi(x). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Для ее решения представим функцию $u(t, x)$ в виде суммы двух функций:

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x), \tag{3.20}$$

которые являются решениями следующих задач:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} &v(0,x) = 0, \\ &v_t(0,x) = 0; \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} &w(0,x) = \varphi(x), \\ &w_t(0,x) = \psi(x). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Очевидно, что в сумме задачи (3.21)–(3.24) дают исходную задачу (3.18), (3.19), следовательно, в силу единственности решения, задача Коши $u(t,x)$ может быть представлена в виде (3.20).

Решение задачи (3.21), (3.22) определяется формулой (3.17), а решение задачи (3.23), (3.24) находится по формуле Даламбера (3.8). В итоге решение исходной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u(t,x) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau + \\ + \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Решить задачу:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &u(0,x) = \cos 2x, \\ &u_t(0,x) = 0. \end{aligned}$$

Для решения задачи воспользуемся формулой Даламбера (3.8):

$$u(t,x) = \frac{\cos(2x+6t) + \cos(2x-6t)}{2} = \cos 2x \cos 6t.$$

Пример 2. Решить задачу:

$$\begin{aligned}&u_{tt} = 16u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},\\&u(0,x) = \exp\left(-x^2\right),\\&u_t(0,x) = \sin 3x.\end{aligned}$$

Для решения задачи воспользуемся формулой Даламбера (3.8):

$$u(t,x) = \frac{\exp\left(-(x+4t)^2\right) + \exp\left(-(x-4t)^2\right)}{2} + \frac{1}{8}\int\limits_{x-4t}^{x+4t} \sin 3\xi \, d\xi =$$

$$= \frac{\exp\left(-(x+4t)^2\right) + \exp\left(-(x-4t)^2\right)}{2} -$$

$$- \frac{\cos(3x+12t) - \cos(3x-12t)}{24} =$$

$$= \frac{\exp\left(-(x+4t)^2\right) + \exp\left(-(x-4t)^2\right)}{2} + \frac{\sin 3x \sin 12t}{12}.$$

Пример 3. Решить задачу:

$$\begin{aligned}&u_{tt} = 4u_{xx} + 2tx, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},\\&u(0,x) = \sin x,\\&u_t(0,x) = \cos x.\end{aligned}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы двух функций – $v(t,x)$ и $w(t,x)$:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}&v_{tt} = 4u_{xx} + 2tx, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},\\&v(0,x) = 0,\\&v_t(0,x) = 0;\\&w_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

$$w(0,x) = \sin x,$$
$$w_t(0,x) = \cos x.$$

Решение задачи для $v(t,x)$ находим по формуле (3.17):

$$v(t,x) = \frac{1}{4}\int\limits_0^t \int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} 2\tau\xi\, d\xi d\tau =$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^t \left[(x+2(t-\tau))^2 - (x-2(t-\tau))^2\right]\tau\, d\tau = \frac{xt^3}{3}.$$

Решение задачи для $w(t,x)$ находим по формуле Даламбера (3.8):

$$w(t,x) = \frac{\sin(x+2t)+\sin(x-2t)}{2} + \frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} \cos\xi\, d\xi =$$
$$= \frac{3\sin(x+2t)+\sin(x-2t)}{4}.$$

Окончательно имеем

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) = \frac{3\sin(x+2t)+\sin(x-2t)}{4} + \frac{xt^3}{3}.$$

Пример 4. Решить задачу и дать графическое представление профилей струны в разные моменты времени:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1,1), \\ 0, & x \notin (-1,1), \end{cases}$$
$$u_t(0,x) = 0.$$

Разобьем плоскость Oxt на области с разными значениями функции $u(t,x)$ (рис. 3).

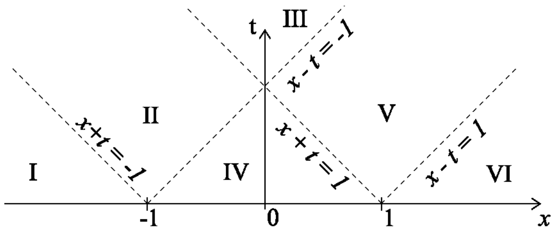

Рис. 3. Разбиение плоскости Oxt на области с разными значениями функции $u(t, x)$

Пользуясь формулой Даламбера (3.8), определим значения функции $u(t,x)$ в областях I–VI. Согласно формуле Даламбера значение функции $u(t,x)$ $\forall t > 0$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ определяется начальными условиями $u(0,x)$ и $u_t(0,x)$. В областях I, III, VI $\forall x$ функции $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$, следовательно, $u(t,x) = 0$. Рассмотрим области II, IV, V:

$$\text{II}: \quad u(t,x) = \frac{0+1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} 0\,d\xi = \frac{1}{2},$$

$$\text{IV}: \quad u(t,x) = \frac{1+1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} 0\,d\xi = 1,$$

$$\text{V}: \quad u(t,x) = \frac{1+0}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} 0\,d\xi = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция $u(t,x)$ определена в каждой области. Построим профили струны в моменты времени $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 1$ и $t = 2$ (рис. 4).

Пример 5. Решить задачу и дать графическое представление профилей струны в разные моменты времени:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &u(0,x) = 0, \end{aligned}$$

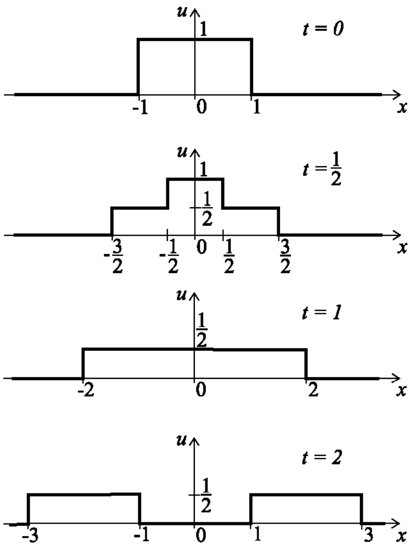

Рис. 4. Профили струны в моменты времени $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 1$ и $t = 2$

$$u_t(0, x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Разобьем плоскость Oxt на области с разными значениями функции $u(t, x)$ (рис. 5). Пользуясь формулой Даламбера (3.8), определим значения функции $u(t, x)$ в областях I–VI:

$$\mathrm{I}: \quad u(t, x) = \frac{0 + 0}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} 0 \, d\xi = 0;$$

$$\mathrm{II}: \quad u(t, x) = \frac{0 + 0}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{-1} 0 \, d\xi + \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{x+t} 1 \, d\xi = \frac{x + t + 1}{2};$$

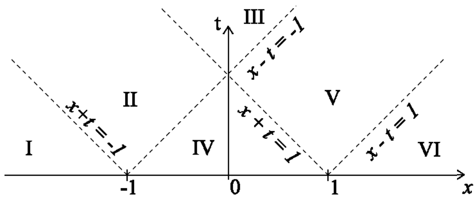

Рис. 5. Разбиение плоскости Oxt на области с разными значениями функции $u(t,x)$

$$\text{III}: \quad u(t,x) = \frac{1}{2}\left(0 + \int\limits_{x-t}^{-1} 0\,d\xi + \int\limits_{-1}^{1} 1\,d\xi + \int\limits_{1}^{x+t} 0\,d\xi\right) = 1;$$

$$\text{IV}: \quad u(t,x) = \frac{0+0}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} 1\,d\xi = t;$$

$$\text{V}: \quad u(t,x) = \frac{0+0}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{1} 1\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{x+t} 0\,d\xi = \frac{1-x+t}{2};$$

$$\text{VI}: \quad u(t,x) = \frac{0+0}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} 0\,d\xi = 0.$$

Построенные профили струны в моменты времени $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 1$ и $t = 2$ представлены на рис. 6.

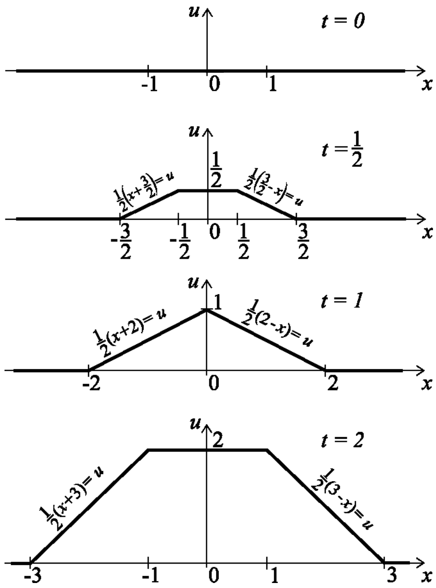

Рис. 6. Профили струны в моменты времени $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 1$ и $t = 2$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Решить задачу:

$$u_{tt} = 25u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = 3^x,$$
$$u_t(0, x) = 0.$$

3.2. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = \sin x.$$

3.3. Решить задачу:

$$u_{tt} = 36u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = \ln|x|,$$
$$u_t(0, x) = x.$$

3.4. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + 1, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = 0.$$

3.5. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + \cos x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = 0.$$

3.6. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = e^x.$$

3.7. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + 6, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = x^{10} + x + 2,$$
$$u_t(0, x) = xe^{-x^2}.$$

3.8. Решить задачу:

$$u_{tt} = 25u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u(0, x) = \sin \omega x,$$
$$u_t(0, x) = x \cos x,$$

ω – параметр.

3.9. Решить задачу:

$u_{tt} = u_{xx} + e^t, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$

$u(0, x) = x^2 \cos x + 3,$

$u_t(0, x) = x^2 \cos 3x^3.$

3.10. Решить задачу:

$u_{tt} = 9u_{xx} - x^2 t^3 + 10, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$

$u(0, x) = e^{x+2},$

$u_t(0, x) = x^{10} + e^x.$

3.11. Решить задачу:

$u_{tt} = 9u_{xx} + \sin \omega t, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$

$u(0, x) = 0,$

$u_t(0, x) = 0,$

ω – параметр.

3.12. Решить задачу:

$u_{tt} = u_{xx} - e^{2t}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$

$u(0, x) = 2 + \sin 5x,$

$u_t(0, x) = \cos x.$

3.13. Решить задачу:

$u_{tt} = u_{xx} - \sin 2t, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$

$u(0, x) = \cos x + 3,$

$u_t(0, x) = \sin x.$

3.14. Решить задачу:

$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$

$u(0, x) = \sin^2 x - x^3,$

$u_t(0, x) = x^2.$

3.15. Решить задачу и дать графическое представление профилей струны в разные моменты времени:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(0,x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \in (-2,2), \\ 0, & x \notin (-2,2), \end{cases}$$

$$u_t(0,x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2,2), \\ 1, & x \notin (-2,2). \end{cases}$$

3.16. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + t^2 x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(0,x) = \sin x,$$

$$u_t(0,x) = \cos x.$$

3.17. Решить задачу:

$$u_{tt} = 25u_{xx} - 2e^{-3t}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(0,x) = \sin 3x,$$

$$u_t(0,x) = x \cos x^2.$$

3.18. Решить задачу:

$$u_{tt} = 36u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(0,x) = 3 - \cos 2x,$$

$$u_t(0,x) = 2e^{-5x}.$$

4. Уравнения гиперболического типа на полуограниченной прямой

В этой главе будут рассмотрены гиперболические задачи, определенные на полуограниченной прямой. Появление в задаче границы изменения пространственной переменной приводит к необходимости задать на ней граничное условие первого, второго или третьего рода. Разные типы граничных условий вносят свою специфику в решение задачи. Кроме того, решение задачи чувствительно к наличию неоднородности в уравнении, начальных и граничных условиях. В дальнейшем для удобства восприятия однородные уравнения, начальные и граничные условия мы будем обозначать Ур $= 0$, НУ $= 0$ и ГУ $= 0$ соответственно; неоднородные уравнения, начальные и граничные условия будем определять следующим образом: Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$ и ГУ $\neq 0$ соответственно.

В начале главы будут решены три задачи с неоднородными граничными условиями и однородными уравнением и начальными условиями, соответствующие трем типам граничных условий. Затем неоднородность будет предполагаться в начальных условиях, при этом уравнение и граничное условие будут однородными. В рамках этого случая будут рассмотрены также три задачи для трех видов граничных условий. Следующий блок из трех задач будет содержать неоднородность в уравнениях, при этом начальные и граничное условия будут однородными. В заключение будет разобран общий случай, когда уравнение, начальные и граничное условия содержат неоднородности.

4.1. Неоднородное граничное условие, однородные уравнение и начальные условия

4.1.1. Ур $= 0$, НУ $= 0$, ГУ $\neq 0$: граничное условие первого рода

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях полуограниченной струны, которая находится в состоянии равновесия в начальный момент времени. Колебания струны происходят за счет того, что граница струны перемещается по известному закону $\mu(t)$. Такая задача соответствует следующей математической модели:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = 0, \\ &u_t(0,x) = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$u(t,0) = \mu(t). \tag{4.3}$$

Согласно (3.5) общее решение уравнения (4.1) определяется суммой двух функций:

$$u(t,x) = F(x+at) + G(x-at), \tag{4.4}$$

где функции $F(x+at)$ и $G(x-at)$ находятся из начальных условий (см. параграф 3.1, формулы (3.6), (3.7)). Однако в задаче, рассматриваемой в данном параграфе, начальные условия определены только для $x \geqslant 0$, следовательно, функции $F(x+at)$ и $G(x-at)$ можно найти, используя формулы (3.6), (3.7), только для неотрицательных значений аргументов $x + at \geqslant 0$ и $x - at \geqslant 0$. Следовательно, задача разбивается на две области:

- в области $x-at \geqslant 0$ функции $F(x+at) = 0$, $G(x-at) = 0$, тогда $u(t,x) = 0$;
- в области $x - at < 0$ функция $F(x+at) = 0$, тогда $u(t,x) = G(x-at)$.

То есть задача свелась к определению функции $G(x-at)$ для отрицательных значений аргумента $x - at$. Подставим решение в области $x - at < 0$ в граничное условие (4.3):

$$u(t,0) = G(-at) = \mu(t). \tag{4.5}$$

Тогда

$$G(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right), \quad z < 0. \tag{4.6}$$

Таким образом, решение задачи (4.1)–(4.3) имеет вид

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at, \\ \mu\left(-\dfrac{x-at}{a}\right), & x < at. \end{cases} \tag{4.7}$$

После упрощения записи получаем решение задачи (4.1)–(4.3):

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & x < at. \end{cases}$$

4.1.2. Ур $= 0$, НУ $= 0$, ГУ $\neq 0$: граничное условие второго рода

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях полуограниченной струны, которая находится в состоянии равновесия в начальный момент времени. Колебания струны происходят за счет того, что на границу струны $x = 0$ действует известная сила, которая описывается законом $\nu(t)$. Сформулируем математическую модель этой задачи:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = 0, \\ &u_t(0,x) = 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$u_x(t,0) = \nu(t). \tag{4.10}$$

Общее решение уравнения (4.8) можно определить как сумму двух функций (см. формулы (3.6), (3.7)):

$$u(t,x) = F(x+at) + G(x-at). \tag{4.11}$$

Проводя аналогичные рассуждения, как в 4.1.1, приходим к выводу, что:

- в области $x - at \geqslant 0$ функции $F(x+at) = 0$, $G(x-at) = 0$, тогда $u(t,x) = 0$;

- в области $x - at < 0$ функция $F(x + at) = 0$, тогда $u(t, x) = G(x - at)$.

Подставляем решение в области $x - at < 0$ в граничное условие (4.10):

$$u_x(t, 0) = G'(-at) = \nu(t). \tag{4.12}$$

Тогда

$$G(z) = \int\limits_0^z \nu\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi. \tag{4.13}$$

Окончательно решение задачи (4.8)–(4.10) имеет вид

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at, \\ \int\limits_0^{x-at} \nu\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi, & x < at. \end{cases}$$

Сделав замену переменной, можно получить следующий вид решения:

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at, \\ -a \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \nu(\tau)\, d\tau, & x < at. \end{cases} \tag{4.14}$$

4.1.3. Ур $= 0$, НУ $= 0$, ГУ $\neq 0$: граничное условие третьего рода

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях полуограниченной струны, которая находится в состоянии равновесия в начальный момент времени. На упруго закрепленную границу струны $x = 0$ действует сосредоточенная известная сила, которая описывается законом $\kappa(t)$. Сформулируем математическую модель этой задачи:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{4.15}$$

$$
\begin{aligned}
&u(0,x) = 0,\\
&u_t(0,x) = 0,
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

$$
u_x(t,0) - hu(t,0) = \kappa(t). \tag{4.17}
$$

Общее решение уравнения (4.15) можно определить как сумму двух функций (см. параграф 3.1, формулы (3.6), (3.7)):

$$
u(t,x) = F(x+at) + G(x-at). \tag{4.18}
$$

Проводя аналогичные рассуждения, что и в 4.1.1, получаем:

- в области $x - at \geqslant 0$ функции $F(x+at) = 0$, $G(x-at) = 0$, тогда $u(t,x) = 0$;
- в области $x - at < 0$ функция $F(x+at) = 0$, тогда $u(t,x) = G(x-at)$.

Подставляем решение в области $x - at < 0$ в граничное условие (4.17):

$$
u_x(t,0) - hu(t,0) = G'(-at) - hG(-at) = \kappa(t).
$$

Сделаем для удобства замену: $z = -at$ $(z < 0)$. Тогда

$$
G'(z) - hG(z) = \kappa\left(-\frac{z}{a}\right).
$$

Полученное выражение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое является неоднородным. Решим сначала соответствующее однородное дифференциальное уравнение:

$$
G'(z) - hG(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(z) = Ce^{hz}.
$$

Для решения неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации произвольной постоянной [4, с. 18; 5, с. 20], при котором $G(z) = C(z)e^{hz}$ и

$$
C'(z)e^{hz} + hC(z)e^{hz} - hC(z)e^{hz} = \kappa\left(-\frac{z}{a}\right) \quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad C'(z) = e^{-hz}\kappa\left(-\frac{z}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad C(z) = \int\limits_0^z e^{-h\xi}\kappa\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi + C_1.
$$

Тогда

$$G(z) = e^{hz}\left(\int\limits_0^z e^{-h\xi}\kappa\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi + C_1\right) =$$
$$= e^{hz}\int\limits_0^z e^{-h\xi}\kappa\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi + C_1e^{hz}.$$

Для определения значения произвольной постоянной C_1 воспользуемся условием $u(0,0) = G(0) = 0$:

$$G(0) = C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad G(z) = e^{hz}\int\limits_0^z e^{-h\xi}\kappa\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi.$$

Решение задачи для функции $u(t,x)$ в области $x < at$ имеет вид

$$u(t,x) = G(x-at) = e^{h(x-at)}\int\limits_0^{x-at} e^{-h\xi}\kappa\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi.$$

В результате решение задачи (4.15)–(4.17) имеет вид

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at, \\ e^{h(x-at)}\displaystyle\int\limits_0^{x-at} e^{-h\xi}\kappa\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi, & x < at. \end{cases}$$

Сделав замену переменной, можно получить следующий вид решения:

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at, \\ -ae^{h(x-at)}\displaystyle\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} e^{ah\tau}\kappa(\tau)\,d\tau, & x < at. \end{cases} \tag{4.19}$$

4.2. Неоднородные начальные условия, однородные уравнение и граничное условие

4.2.1. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничное условие первого рода

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях полуограниченной струны, которая в начальный момент времени имеет профиль $\varphi(x)$, скорости точек определяются законом $\psi(x)$. Граница струны $x = 0$ жестко закреплена. Такая задача соответствует следующей математической модели:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = \varphi(x), \\ &u_t(0,x) = \psi(x), \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$u(t,0) = 0. \tag{4.22}$$

Решение задачи основывается на методе дополнения. Доопределим задачу (4.20)–(4.22) на отрицательную область $x < 0$:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} &U(0,x) = \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ \varphi^*(x), & x < 0, \end{cases} \\ &U_t(0,x) = \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ \psi^*(x), & x < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$U(t,0) = 0. \tag{4.25}$$

В неотрицательной области $x \geqslant 0$ начальные условия доопределенной задачи совпадают с исходной задачей, в отрицательной области $x < 0$ положим их равными неизвестным функциям $\varphi^*(x)$ и $\psi^*(x)$. Решение задачи (4.23)–(4.24) определяется по формуле Даламбера:

$$U(t,x) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\, d\xi \tag{4.26}$$

и является единственным в силу единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных в бесконечной области [6, с. 52]. Исходная задача (4.20)–(4.22) совпадает с доопределенной задачей (4.23)–(4.25) в области $x \geqslant 0$, следовательно, и решения этих задач совпадают при $x \geqslant 0$ в силу единственности решения.

В области определения исходной задачи (4.20)–(4.22) аргумент $x - at$ функций Φ и Ψ может принимать отрицательные значения, следовательно, необходимо определить неизвестные функции $\varphi^*(x)$ и $\psi^*(x)$ в (4.24). Для этого подставим (4.26) в условие (4.25):

$$U(t,0) = \frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \Psi(\xi)\, d\xi = 0.$$

Полученное равенство означает, что сумма двух независимых функций равна нулю на всей области определения этих функций. Это возможно только в том случае, если каждая из этих функций обращается в нуль. Следовательно,

$$\frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} = 0, \qquad \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \Psi(\xi)\, d\xi = 0.$$

Эти равенства позволяют сделать вывод о нечетности функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ и доопределить их в отрицательной области через известные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi^*(x) = -\varphi(-x), \qquad \psi^*(x) = -\psi(-x).$$

Таким образом, общее решение исходной задачи имеет вид

$$u(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, & x\geqslant at,\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(-x+at)}{2}+ & \\ +\dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int\limits_{x-at}^{0}(-\psi(-\xi))\,d\xi+\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right), & x<at.\end{cases}$$

Преобразовав получившееся выражение для $u(t,x)$, можно получить решение в следующем виде:

$$u(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, & x\geqslant at,\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, & x<at.\end{cases} \tag{4.27}$$

4.2.2. Ур $=0$, НУ $\neq 0$, ГУ $=0$: граничное условие второго рода

В данном подпараграфе будет рассмотрена задача о свободных колебаниях полуограниченной струны, которая в начальный момент времени имеет профиль $\varphi(x)$, скорости точек определяются законом $\psi(x)$. Граница струны $x=0$ свободно перемещается. Такая задача соответствует следующей математической модели:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad t>0,\quad x>0, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}&u(0,x)=\varphi(x),\\ &u_t(0,x)=\psi(x),\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$u_x(t,0)=0. \tag{4.30}$$

Для решения этой задачи используем метод, подробно описанный в 4.2.1.

1. Доопределим исходную задачу на отрицательную область по переменной x:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.31}$$

$$\left.\begin{aligned} U(0,x) = \Phi(x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ \varphi^*(x), & x < 0, \end{cases} \\ U_t(0,x) = \Psi(x) &= \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ \psi^*(x), & x < 0, \end{cases} \end{aligned}\right. \tag{4.32}$$

$$U_x(t,0) = 0. \tag{4.33}$$

2. Запишем решение доопределенной задачи (4.31)–(4.32), используя формулу Даламбера:

$$U(t,x) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\, d\xi. \tag{4.34}$$

3. Подставим решение (4.34) в условие (4.33):

$$U_x(t,0) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{\Psi(at) - \Psi(-at)}{2a} = 0. \tag{4.35}$$

Анализируя уравнение (4.35), приходим к выводу, что сумма двух независимых функций равна нулю на всей области определения этих функций только в том случае, если каждая из этих функций обращается в нуль:

$$\frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} = 0, \qquad \frac{\Psi(at) - \Psi(-at)}{2a} = 0.$$

Из последних равенств следует, что $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ – четные функции.

4. Доопределяем функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ в (4.32) в отрицательной области по четности:

$$\varphi^*(x) = \varphi(-x), \qquad \psi^*(x) = \psi(-x).$$

5. Записываем решение исходной задачи:

$$u(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, & x\geqslant at,\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(-x+at)}{2}+ & \\ +\dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int\limits_{x-at}^{0}\psi(-\xi)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right), & x<at.\end{cases}$$

Преобразовав получившееся выражение для $u(t,x)$, можно получить решение в следующем виде:

$$u(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, & x\geqslant at,\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+ & \\ +\dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int\limits_{0}^{at-x}\psi(\xi)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right), & x<at.\end{cases} \tag{4.36}$$

4.2.3. Ур $=0$, НУ $\neq 0$, ГУ $=0$: граничное условие третьего рода

В данном подпараграфе будет рассмотрена задача о свободных колебаниях полуограниченной струны, которая в начальный момент времени имеет профиль $\varphi(x)$, скорости точек определяются законом $\psi(x)$. Граница струны $x=0$ упруго закреплена. Такая задача соответствует следующей математической модели:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad t>0,\quad x>0, \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}&u(0,x)=\varphi(x),\\ &u_t(0,x)=\psi(x),\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$u_x(t,0) - hu(t,0) = 0. \tag{4.39}$$

Для решения этой задачи используем метод, подробно описанный в 4.2.1, 4.2.2.

1. Доопределим исходную задачу на отрицательную область по переменной x:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.40}$$

$$\begin{gathered} U(0,x) = \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ \varphi^*(x), & x < 0, \end{cases} \\ U_t(0,x) = \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ \psi^*(x), & x < 0, \end{cases} \end{gathered} \tag{4.41}$$

$$U_x(t,0) - hU(t,0) = 0. \tag{4.42}$$

2. Запишем решение доопределенной задачи (4.40)–(4.41), используя формулу Даламбера:

$$U(t,x) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\, d\xi. \tag{4.43}$$

3. Подставим решение (4.43) в условие (4.42):

$$U_x(t,0) - hU(t,0) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{\Psi(at) - \Psi(-at)}{2a} -$$

$$- h\frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} - \frac{h}{2a} \int\limits_{-at}^{at} \Psi(\xi)\, d\xi = 0. \tag{4.44}$$

Анализируя выражение (4.44), приходим к выводу, что сумма двух независимых функций равна нулю на всей области определения этих функций только в том случае, если каждая из этих функций обращается в нуль:

$$\frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} - h\frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} = 0, \tag{4.45}$$

$$\frac{\Psi(at)-\Psi(-at)}{2a}-\frac{h}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\Psi(\xi)\,d\xi=0. \tag{4.46}$$

Далее необходимо определить условия доопределения функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ в отрицательной области $x<0$. Сначала рассмотрим условия для функции $\Phi(x)$. Учитывая, что $\forall\, x \geqslant 0\ \Phi(x)=\varphi(x)$, перепишем выражение (4.45) в следующем виде:

$$\frac{\varphi'(at)+\Phi'(-at)}{2}-h\frac{\varphi(at)+\Phi(-at)}{2}=0.$$

Сделаем замену $z=-at$ $(z<0)$:

$$\Phi'(z)-h\Phi(z)=-(\varphi'(-z)-h\varphi(-z)).$$

Для определения функции $\Phi(x)$ в отрицательной области $x<0$ получили обыкновенное дифференциальное уравнение, которое является неоднородным. Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение:

$$\Phi'(z)-h\Phi(z)=0 \quad\Rightarrow\quad \Phi(z)=Ce^{hz}.$$

Далее с помощью метода вариации произвольной постоянной [4, с. 18; 5, с. 20] найдем общее решение неоднородного уравнения в виде

$$\Phi(z)=C(z)e^{hz} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad C'(z)e^{hz}+hC(z)e^{hz}-hC(z)e^{hz}=-(\varphi'(-z)-h\varphi(-z)) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad C'(z)=-e^{-hz}(\varphi'(-z)-h\varphi(-z)) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad C(z)=-\int\limits_0^z e^{-h\eta}(\varphi'(-\eta)-h\varphi(-\eta))\,d\eta+C_1.$$

С помощью формулы интегрирования по частям [1, с. 343; 2, с. 130] можно преобразовать получившийся интеграл для $C(z)$:

$$C(z)=-\int\limits_0^z e^{-h\eta}\varphi'(-\eta)\,d\eta+h\int\limits_0^z e^{-h\eta}\varphi(-\eta)\,d\eta+C_1=$$

$$= -\left(-e^{-h\eta}\varphi(-\eta)\Big|_0^z - h\int\limits_0^z e^{-h\eta}\varphi(-\eta)\,d\eta \right) +$$

$$+ h\int\limits_0^z e^{-h\eta}\varphi(-\eta)\,d\eta + C_1 =$$

$$= e^{-hz}\varphi(-z) - \varphi(0) + 2h\int\limits_0^z e^{-h\eta}\varphi(-\eta)\,d\eta + C_1 =$$

$$= e^{-hz}\varphi(-z) - \varphi(0) - 2h\int\limits_0^{-z} e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi + C_1.$$

Тогда в отрицательной области $z < 0$ функция $\Phi(z)$ имеет следующий вид:

$$\Phi(z) = e^{hz}\left(e^{-hz}\varphi(-z) - \varphi(0) - 2h\int\limits_0^{-z} e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi + C_1 \right) =$$

$$= \varphi(-z) - e^{hz}\varphi(0) - 2he^{hz}\int\limits_0^{-z} e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi + C_1 e^{hz}.$$

Значение произвольной постоянной C_1 может быть найдено из условия $\Phi(0) = \varphi(0)$:

$$\Phi(0) = \varphi(0) - \varphi(0) + C_1 = \varphi(0) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \varphi(0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(z) = \varphi(-z) - e^{hz}\varphi(0) - 2he^{hz}\int\limits_0^{-z} e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi + \varphi(0)e^{hz} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(z) = \varphi(-z) - 2he^{hz}\int\limits_0^{-z} e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Теперь рассмотрим условия для функции $\Psi(x)$. В выражении (4.46) сделаем замену переменной $z = -at$ $(z < 0)$:

$$\frac{\Psi(-z) - \Psi(z)}{2a} - \frac{h}{2a}\int\limits_{z}^{-z}\Psi(\xi)\,d\xi = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \Psi(-z) - \Psi(z) - h\int\limits_{z}^{-z}\Psi(\xi)\,d\xi = 0.$$

Продифференцируем полученное выражение по переменной z, воспользовавшись правилом дифференцирования определенных интегралов [3, с. 146]:

$$-\Psi'(-z) - \Psi'(z) - h(-\Psi(-z) - \Psi(z)) = 0.$$

Учитывая, что $\forall x \geqslant 0$ $\Psi(x) = \psi(x)$, перепишем полученное выражение в следующем виде:

$$-\psi'(-z) - \Psi'(z) - h(-\psi(-z) - \Psi(z)) = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \Psi'(z) - h\Psi(z) = -(\psi'(-z) - h\psi(-z)).$$

В результате для функции $\Psi(z)$ получено точно такое же дифференциальное уравнение, что и для функции $\Phi(z)$, поэтому можно сразу же написать решение:

$$\Psi(z) = \psi(-z) - 2he^{hz}\int\limits_{0}^{-z}e^{h\zeta}\psi(\zeta)\,d\zeta.$$

4. Доопределяем функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ в (4.41) в отрицательной области следующим образом:

$$\varphi^*(x) = \varphi(-x) - 2he^{hx}\int\limits_{0}^{-x}e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

$$\psi^*(x) = \psi(-x) - 2he^{hx}\int\limits_{0}^{-x}e^{h\zeta}\psi(\zeta)\,d\zeta.$$

5. Записываем решение исходной задачи:

$$u(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, & x\geqslant at,\\ u_{x<at}(t,x), & x<at,\end{cases}$$

где

$$u_{x<at}(t,x)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(at-x))+$$
$$+\frac{1}{2}\left(-2he^{h(x-at)}\int\limits_{0}^{at-x}e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\right)+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{0}\left(\psi(-\xi)-2he^{h\xi}\int\limits_{0}^{-\xi}e^{h\zeta}\psi(\zeta)\,d\zeta\right)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi.$$

Преобразовав получившееся выражение для $u_{x<at}(t,x)$, можно получить решение в следующем виде:

$$u(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, & x\geqslant at,\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi-\\ -he^{h(x-at)}\displaystyle\int\limits_{0}^{at-x}e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi+\\ +\dfrac{e^{h(x-at)}}{a}\displaystyle\int\limits_{0}^{at-x}e^{h\xi}\psi(\xi)\,d\xi, & x<at.\end{cases}\tag{4.47}$$

4.3. Неоднородное уравнение, однородные начальные и граничное условия

4.3.1. Ур $\neq 0$, НУ $=0$, ГУ $=0$: граничное условие первого рода

Рассмотрим задачу:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x),\quad t>0,\quad x>0,\tag{4.48}$$

$$\left.\begin{aligned}&u(0,x)=0,\\ &u_t(0,x)=0,\end{aligned}\right.\tag{4.49}$$

$$u(t,0)=0.\tag{4.50}$$

Уравнения (4.48)–(4.50) описывают колебание полуограниченной струны, конец которой закреплен; в начальный момент времени струна находилась в состоянии покоя, а ее колебания происходят за счет действия внешней силы, линейная плотность которой задана функцией $f(t,x)$.

Доопределим исходную задачу на область $x < 0$:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} &U(0,x) = 0, \\ &U_t(0,x) = 0, \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$U(t,0) = 0, \tag{4.53}$$

где функция $F(t,x)$ совпадает с $f(t,x)$ в области $t > 0$ и $x \geqslant 0$, в области $t > 0$ и $x < 0$ она определяется неизвестной функцией $f^*(t,x)$:

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & x \geqslant 0, \\ f^*(t,x), & x < 0. \end{cases}$$

Задача (4.51)–(4.52) описывает вынужденные колебания бесконечной струны. Ее решение подробно разобрано в параграфе 3.2. Воспользуемся формулой (3.17) для определения решения этой задачи:

$$U(t,x) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\tau,\xi)\, d\xi d\tau. \tag{4.54}$$

Подставим (4.54) в (4.53) для определения ограничений, накладываемых на функцию $F(t,x)$:

$$U(t,0) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} F(\tau,\xi)\, d\xi d\tau = 0. \tag{4.55}$$

Сначала рассмотрим внешний интеграл. Поскольку он определен на произвольном промежутке и равен нулю, то подынтегральная функция равна нулю:

$$\int\limits_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} F(\tau,\xi)\, d\xi = 0. \tag{4.56}$$

Интеграл по симметричному промежутку равен нулю, если подынтегральная функция является нечетной по переменной ξ. Таким образом, $F(t,x)$ можно доопределить в области $x<0$:

$$F(t,x)=\begin{cases} f(t,x), & x\geqslant 0,\\ -f(t,-x), & x<0.\end{cases}$$

В области определения исходной задачи (4.48)–(4.50) нижний предел $x-a(t-\tau)$ интеграла в выражении (4.54) может принимать отрицательные значения для некоторых значений τ. Найдем эти значения τ:

$$x-a(t-\tau)<0 \quad \Rightarrow \quad \tau<t-\frac{x}{a}.$$

Таким образом, решение исходной задачи (4.48)–(4.50) в области $x\geqslant at$ определяется выражением

$$u(t,x)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau, \quad x\geqslant at.$$

В области $x<at$ решение записывается следующим образом:

$$u(t,x)=\frac{1}{2a}\left(\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{0}(-f(\tau,-\xi))\,d\xi d\tau+\right.$$
$$+\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\int\limits_0^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau+$$
$$\left.+\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\right), \quad x<at.$$

После преобразования получившегося выражения для области $x < at$ окончательное решение задачи (4.48)–(4.50) выглядит следующим образом:

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau, & x \geqslant at, \\ \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{-x+a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau + & \\ + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau, & x < at. \end{cases} \tag{4.57}$$

4.3.2. Ур $\neq 0$, НУ $= 0$, ГУ $= 0$: граничное условие второго рода

Рассмотрим задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = 0, \\ &u_t(0,x) = 0, \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$u_x(t,0) = 0. \tag{4.60}$$

Уравнения (4.58)–(4.60) описывают колебание полуограниченной струны, конец $x = 0$ которой свободен; в начальный момент времени струна находилась в состоянии покоя, а ее колебания происходят за счет действия внешней силы, линейная плотность которой задана функцией $f(t,x)$.

Доопределим задачу (4.58)–(4.60) на область $x < 0$:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned} &U(0,x) = 0, \\ &U_t(0,x) = 0, \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$U_x(t,0) = 0, \tag{4.63}$$

где функция $F(t,x)$ совпадает с $f(t,x)$ в области $t > 0$ и $x \geqslant 0$, в области $t > 0$ и $x < 0$ она определяется неизвестной функцией $f^*(t,x)$:

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & x \geqslant 0, \\ f^*(t,x), & x < 0. \end{cases}$$

Решение задачи (4.61)–(4.62) определяется формулой (4.54). Подставим решение в условие (4.63):

$$U_x(t,0) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(F(\tau, a(t-\tau)) - F(\tau, -a(t-\tau))\right) d\tau = 0, \tag{4.64}$$

откуда следует, что подынтегральное выражение равно нулю:

$$F(\tau, a(t-\tau)) - F(\tau, -a(t-\tau)) = 0.$$

Полученное равенство устанавливает четность функции $F(t,x)$ по переменной x. Таким образом, $F(t,x)$ можно доопределить в области $x < 0$ следующим образом:

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & x \geqslant 0, \\ f(t,-x), & x < 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что при $\tau < t - \dfrac{x}{a}$ предел интегрирования $x - a(t-\tau)$ является отрицательным, запишем решение (4.54) для двух областей $x \geqslant at$ и $x < at$.

Решение исходной задачи (4.58)–(4.60) в области $x \geqslant at$ определяется следующим выражением:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau, \quad x \geqslant at.$$

В области $x < at$ решение имеет вид

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{0} (f(\tau,-\xi))\,d\xi d\tau + \right.$$

$$+\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\int\limits_{0}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau +$$

$$\left. +\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\right), \quad x < at.$$

После преобразования получившегося выражения для области $x < at$ окончательное решение задачи (4.58)–(4.60) выглядит следующим образом:

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau, & x \geqslant at, \\ \dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\int\limits_{0}^{a(t-\tau)-x} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau + \right. & \\ \displaystyle +\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\int\limits_{0}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau + & \\ \left. \displaystyle +\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\right), & x < at. \end{cases} \tag{4.65}$$

4.3.3. Ур $\neq 0$, НУ $= 0$, ГУ $= 0$: граничное условие третьего рода

Рассмотрим задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = 0, \\ &u_t(0,x) = 0, \end{aligned} \tag{4.67}$$

$$u_x(t,0) - hu(t,0) = 0. \tag{4.68}$$

Уравнения (4.66)–(4.68) описывают колебание полуограниченной струны, конец $x = 0$ которой закреплен упруго; в начальный момент времени струна находилась в состоянии покоя, а ее колебания происходят за счет действия внешней силы, линейная плотность которой задана функцией $f(t,x)$.
Доопределим задачу (4.66)–(4.68) на область $x < 0$:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} &U(0,x) = 0, \\ &U_t(0,x) = 0, \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$U_x(t,0) - hU(t,0) = 0, \tag{4.71}$$

где функция $F(t,x)$ совпадает с $f(t,x)$ в области $t > 0$ и $x \geqslant 0$, в области $t > 0$ и $x < 0$ она определяется неизвестной функцией $f^*(t,x)$:

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & x \geqslant 0, \\ f^*(t,x), & x < 0. \end{cases}$$

Решение задачи (4.69)–(4.70) определяется формулой (4.54).

Подставим решение в условие (4.71):

$$
\begin{gathered}
U_x(t,0) - hU(t,0) = \\
= \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(F(\tau, a(t-\tau)) - F(\tau, -a(t-\tau))\right) d\tau - \\
- \frac{h}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} F(\tau,\xi)\, d\xi d\tau = \\
= \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(F(\tau, a(t-\tau)) - F(\tau, -a(t-\tau))\right) d\tau - \\
- \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(-h \int\limits_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} F(\tau,\xi)\, d\xi\right) d\tau = 0,
\end{gathered}
\tag{4.72}
$$

откуда следует, что подынтегральное выражение равно нулю:

$$
F(\tau, a(t-\tau)) - F(\tau, -a(t-\tau)) - h \int\limits_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} F(\tau,\xi)\, d\xi = 0.
$$

Сделаем следующую замену переменной в полученном выражении:

$$
z = -a(t-\tau) < 0 \Rightarrow F(\tau, -z) - F(\tau, z) - h\int\limits_z^{-z} F(\tau,\xi)\, d\xi = 0.
$$

Продифференцируем полученное выражение по аргументу z:

$$
-F'_z(\tau, -z) - F'_z(\tau, z) - h(-F(\tau,-z) - F(\tau,z)) = 0.
$$

Здесь и далее по текущему параграфу знак производной функции двух переменных будет означать дифференцирование по второму аргументу ($F'_z(\tau, z) = F'(\tau, z)$).

Учитывая, что $\forall\, x \geqslant 0$ $F(t,x) = f(t,x)$, перепишем полученное выражение в следующем виде:

$$F'(\tau,z) - hF(\tau,z) = -\left(f'(\tau,-z) - hf(\tau,-z)\right).$$

В результате для функции $F(\tau,z)$ получено точно такое же дифференциальное уравнение, что и для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в 4.2.3, поэтому можно сразу же написать решение:

$$F(\tau,z) = f(\tau,-z) - 2he^{hz}\int\limits_0^{-z} e^{h\zeta} f(\tau,\zeta)\,d\zeta.$$

Таким образом, функцию $F(t,x)$ в области $x<0$ необходимо определить следующим образом:

$$f^*(t,x) = f(t,-x) - 2he^{hx}\int\limits_0^{-x} e^{h\zeta} f(t,\zeta)\,d\zeta.$$

Принимая во внимание, что при $\tau < t - \dfrac{x}{a}$ предел инегрирования $x - a(t-\tau)$ является отрицательным, запишем решение (4.54) для двух областей $x \geqslant at$ и $x < at$.

Решение исходной задачи (4.66)–(4.68) в области $x \geqslant at$ определяется следующим выражением:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau, \quad x \geqslant at.$$

В области $x < at$ решение записывается следующим образом:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\left(\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{0} \left(f(\tau,-\xi)\right) d\xi d\tau - \right.$$

$$- \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{0} \left(2he^{h\xi} \int\limits_0^{-\xi} e^{h\zeta} f(\tau,\zeta)\, d\zeta \right) d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_0^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau +$$

$$\left. + \int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau \right), \quad x < at.$$

После преобразования получившегося выражения для области $x < at$ окончательное решение задачи (4.66)–(4.68) выглядит следующим образом:

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_0^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau, & x \geqslant at, \\ u_{x<at}(t,x), & x < at, \end{cases} \tag{4.73}$$

где

$$u_{x<at}(t,x) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{-x+a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{1}{a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} e^{h(x-a(t-\tau))} \int\limits_0^{-x+a(t-\tau)} e^{h\xi} f(\tau,\xi)\, d\xi d\tau.$$

4.4. Общий случай: неоднородные уравнение, начальные и граничное условия

Под общим случаем понимаются задачи, в которых уравнение, начальные и граничные условия являются неоднородными. Для решения таких задач используется следующий метод. Необходимо разбить исходную задачу на три, каждая из которых будет иметь в математической постановке только одну неоднородность либо в уравнении, либо в начальных условиях, либо в граничном условии. Безусловно, этот метод разбиения исходной задачи на несколько работает и в том случае, если исходная задача содержит две какие-то неоднородности. Количество неоднородностей в исходной задаче будет совпадать с количеством задач в разбиении исходной задачи. Ниже будут рассмотрены задачи с неоднородностями в уравнении, начальных и граничном условиях для всех трех типов граничных условий.

4.4.1. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничное условие первого рода

Рассмотрим задачу колебания полубесконечной струны, конец $x = 0$ которой двигается по известному закону $\mu(t)$, начальный профиль струны описывается функцией $\varphi(x)$, начальные скорости точек движения струны задаются функцией $\psi(x)$, на струну действует внешняя сила, плотность которой определена функцией $f(t,x)$. Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0, \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = \varphi(x), \\ &u_t(0,x) = \psi(x), \end{aligned} \tag{4.75}$$

$$u(t,0) = \mu(t). \tag{4.76}$$

Разобьем исходую задачу на три части, а решение представим в виде суммы трех функций – $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) +$

$+\, q(t,x)$:

$$\begin{aligned}
&v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,\\
&v(0,x) = 0,\\
&v_t(0,x) = 0,\\
&v(t,0) = \mu(t);\\
&w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,\\
&w(0,x) = \varphi(x),\\
&w_t(0,x) = \psi(x),\\
&w(t,0) = 0;\\
&q_{tt} = a^2 q_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,\\
&q(0,x) = 0,\\
&q_t(0,x) = 0,\\
&q(t,0) = 0.
\end{aligned}$$

Методы решения задач для функций $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$ подробно разобраны в 4.1.1, 4.2.1 и 4.3.1, а функции $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$ определяются формулами (4.7), (4.27) и (4.57) соответственно. В силу единственности решением $u(t,x)$ краевой задачи (4.74)–(4.76) является сумма функций $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$:

$$u(t,x) = \begin{cases} u_{x\geqslant at}(t,x), & x \geqslant at,\\ u_{x<at}(t,x), & x < at,\end{cases}$$

где

$$u_{x\geqslant at}(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau,$$

$$u_{x<at}(t,x) = \mu\left(t-\frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} +$$

$$
+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\int\limits_{-x+a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau+
$$

$$
+\frac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau.
$$

4.4.2. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничное условие второго рода

Рассмотрим задачу о колебаниях полубесконечной струны, которые происходят из-за того, что на струну действует внешняя сила, плотность которой определяется функцией $f(t,x)$. На границу струны $x=0$ действует известная сила, которая описывается законом $\nu(t)$; струна имеет начальный профиль, который можно описать функцией $\varphi(x)$; функция $\psi(x)$ задает начальные скорости движения точек струны.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$
u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x),\quad t>0,\quad x>0, \tag{4.77}
$$

$$
\begin{aligned}
&u(0,x)=\varphi(x),\\
&u_t(0,x)=\psi(x),
\end{aligned} \tag{4.78}
$$

$$
u_x(t,0)=\nu(t). \tag{4.79}
$$

Разобьем исходную задачу на три части, а решение представим в виде суммы трех функций – $u(t,x)=v(t,x)+w(t,x)+$ $+\,q(t,x)$:

$$
\begin{aligned}
&v_{tt}=a^2v_{xx},\quad t>0,\quad x>0,\\
&v(0,x)=0,\\
&v_t(0,x)=0,\\
&v_x(t,0)=\nu(t);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,\\
&w(0, x) = \varphi(x),\\
&w_t(0, x) = \psi(x),\\
&w_x(t, 0) = 0;\\
&q_{tt} = a^2 q_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0,\\
&q(0, x) = 0,\\
&q_t(0, x) = 0,\\
&q_x(t, 0) = 0.
\end{aligned}
$$

Методы решения задач для функций $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$ подробно разобраны в 4.1.2, 4.2.2 и 4.3.2, а функции $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$ определяются формулами (4.14), (4.36) и (4.65) соответственно. В силу единственности решением $u(t,x)$ краевой задачи (4.77)–(4.79) является сумма функций $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$:

$$
u(t, x) = \begin{cases} u_{x \geqslant at}(t, x), & x \geqslant at,\\ u_{x < at}(t, x), & x < at, \end{cases}
$$

где

$$
u_{x \geqslant at}(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi +
$$

$$
+ \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi)\, d\xi d\tau,
$$

$$
u_{x < at}(t, x) = -a \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \nu(\tau)\, d\tau + \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} +
$$

$$
+ \frac{1}{2a} \left(\int\limits_0^{at-x} \psi(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \right.
$$

$$+\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\left(\int\limits_0^{a(t-\tau)-x} f(\tau,\xi)\,d\xi+\int\limits_0^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\right)d\tau+$$

$$\left.+\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau\right).$$

4.4.3. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничное условие третьего рода

Рассмотрим задачу о колебаниях полубесконечной струны, которые происходят из-за того, что на струну действует внешняя сила, плотность которой определяется функцией $f(t,x)$; на упруго закрепленную границу струны $x=0$ действует сосредоточенная известная сила, которая описывается законом $\kappa(t)$; струна имеет начальный профиль, который можно описать функцией $\varphi(x)$; функция $\psi(x)$ задает начальные скорости движения точек струны. Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x),\quad t>0,\quad x>0, \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x)=\varphi(x),\\ &u_t(0,x)=\psi(x), \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$u_x(t,0)-hu(t,0)=\kappa(t). \tag{4.82}$$

Разобьем исходную задачу на три части, а решение представим в виде суммы трех функций – $u(t,x)=v(t,x)+w(t,x)+q(t,x)$:

$$\begin{aligned} &v_{tt}=a^2v_{xx},\quad t>0,\quad x>0,\\ &v(0,x)=0,\\ &v_t(0,x)=0,\\ &v_x(t,0)-hv(t,0)=\kappa(t); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,\\
&w(0,x) = \varphi(x),\\
&w_t(0,x) = \psi(x),\\
&w_x(t,0) - hw(t,0) = 0;\\
&q_{tt} = a^2 q_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,\\
&q(0,x) = 0,\\
&q_t(0,x) = 0,\\
&q_x(t,0) - hq(t,0) = 0.
\end{aligned}
$$

Методы решения задач для функций $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$ подробно разобраны в 4.1.3, 4.2.3 и 4.3.3, а функции $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$ определяются формулами (4.19), (4.47) и (4.73) соответственно. В силу единственности решением $u(t,x)$ краевой задачи (4.80)–(4.82) является сумма функций $v(t,x)$, $w(t,x)$ и $q(t,x)$:

$$
u(t,x) = \begin{cases} u_{x\geqslant at}(t,x), & x \geqslant at,\\ u_{x<at}(t,x), & x < at, \end{cases}
$$

где

$$
u_{x\geqslant at}(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi +
$$

$$
+\ \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau,
$$

$$
u_{x<at}(t,x) = -ae^{h(x-at)} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} e^{ah\tau}\kappa(\tau)\,d\tau +
$$

$$
+\ \frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi -
$$

$$
\begin{aligned}
&- he^{h(x-at)} \int\limits_0^{at-x} e^{h\xi}\varphi(\xi)\,d\xi + \\
&+ \frac{e^{h(x-at)}}{a} \int\limits_0^{at-x} e^{h\xi}\psi(\xi)\,d\xi + \\
&+ \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{-x+a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau + \\
&+ \frac{1}{2a} \int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau + \\
&+ \frac{1}{a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} e^{h(x-a(t-\tau))} \int\limits_0^{-x+a(t-\tau)} e^{h\xi} f(\tau,\xi)\,d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Примеры решения задач

Пример 1. Решить задачу:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,\\
&u(0,x) = 0,\\
&u_t(0,x) = 0,\\
&u(t,0) = \cos t + te^t.
\end{aligned}
$$

Общее решение задачи Коши определяется формулой

$$
u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t,\\ G(x-2t), & x < 2t, \end{cases}
$$

где G – произвольная функция. Для ее определения подставим общее решение в граничное условие:

$$
u(t,0) = G(-2t) = \cos t + te^t.
$$

Из последнего равенства получаем, что функция $G(z)$ произвольного аргумента z имеет вид

$$G(z) = \cos\frac{z}{2} - \frac{z}{2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right).$$

Окончательно получаем

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t, \\ \cos\dfrac{x-2t}{2} - \dfrac{x-2t}{2}\exp\left(\dfrac{2t-x}{2}\right), & x < 2t. \end{cases}$$

Пример 2. Решить задачу:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx} + 6x^2, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ &u(0,x) = \cos 5x, \\ &u_t(0,x) = e^x, \\ &u(t,0) = 0. \end{aligned}$$

Представим решение исходной задачи в виде суммы двух функций:

$$u(t,x) = w(t,x) + q(t,x),$$

для которых выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &w_{tt} = 9w_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ &w(0,x) = \cos 5x, \\ &w_t(0,x) = e^x, \\ &w(t,0) = 0; \\ &q_{tt} = 9q_{xx} + 6x^2, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ &q(0,x) = 0, \\ &q_t(0,x) = 0, \\ &q(t,0) = 0. \end{aligned}$$

Сначала решим задачу для $w(t,x)$. Доопределим ее на область $x < 0$:

$$W_{tt} = 9W_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$W(0,x) = \begin{cases} \cos 5x, & x \geqslant 0, \\ -\cos 5x, & x < 0, \end{cases}$$

$$W_t(0,x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ -e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Условие $W(t,0) = 0$ использовано для определения продолжения функций $W(0,x)$ и $W_t(0,x)$ в области $x < 0$.

Решение задачи для $W(t,x)$ определяется формулой Даламбера. Используя полученные выше продолжения функций, определяющих начальные условия задачи, получаем

$$w(t,x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 5(x+3t) + \cos 5(x-3t)}{2} + \dfrac{1}{6}\displaystyle\int\limits_{x-3t}^{x+3t} e^{\xi}\, d\xi, & x \geqslant 3t, \\ \dfrac{\cos 5(x+3t) - \cos 5(x-3t)}{2} + & \\ + \dfrac{1}{6}\left(\displaystyle\int\limits_{x-3t}^{0} \left(-e^{-\xi}\right) d\xi + \int\limits_{0}^{x+3t} e^{\xi}\, d\xi\right), & x < 3t. \end{cases}$$

Также можно использовать сразу же более краткую запись решения (4.57):

$$w(t,x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 5(x+3t) + \cos 5(x-3t)}{2} + \dfrac{1}{6}\displaystyle\int\limits_{x-3t}^{x+3t} e^{\xi}\, d\xi, & x \geqslant 3t, \\ \dfrac{\cos 5(x+3t) - \cos 5(x-3t)}{2} + \dfrac{1}{6}\displaystyle\int\limits_{3t-x}^{x+3t} e^{\xi}\, d\xi, & x < 3t. \end{cases}$$

После интегрирования окончательно получаем

$$w(t,x) = \begin{cases} \cos 5x \cos 15t + \dfrac{e^{x+3t} - e^{x-3t}}{6}, & x \geqslant 3t, \\ -\sin 15t \sin 5x + \dfrac{e^{x+3t} - e^{-x+3t}}{6}, & x < 3t. \end{cases}$$

Перейдем к решению задачи для $q(t,x)$. Для этого доопределим ее на область $x<0$:

$$\begin{aligned}
&Q_{tt} = 9Q_{xx} + F(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R},\\
&Q(0,x) = 0,\\
&Q_t(0,x) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$F(t,x) = \begin{cases} 6x^2, & x \geqslant 0,\\ -6x^2, & x<0. \end{cases}$$

Условие $Q(t,0)=0$ использовано для определения продолжения функции $F(t,x)$ на область $x<0$.

Запишем решение задачи для функции $q(t,x)$ в области $x \geqslant 3t$:

$$q(t,x) = \frac{1}{6}\int\limits_0^t \int\limits_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} 6\xi^2\, d\xi d\tau = 3x^2t^2 + \frac{9}{2}t^4.$$

Запишем решение задачи для функции $q(t,x)$ в области $x<3t$:

$$\begin{aligned}
q(t,x) = &\frac{1}{6}\int\limits_0^{t-\frac{x}{3}} \int\limits_{x-3(t-\tau)}^{0} \left(-6\xi^2\right)\, d\xi d\tau +\\
&+\frac{1}{6}\int\limits_0^{t-\frac{x}{3}} \int\limits_{0}^{x+3(t-\tau)} 6\xi^2\, d\xi d\tau +\\
&+\frac{1}{6}\int\limits_{t-\frac{x}{3}}^{t} \int\limits_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} \left(-6\xi^2\right)\, d\xi d\tau = 6xt^3 - \frac{1}{18}x^4 + \frac{2}{3}x^3 t.
\end{aligned}$$

Таким образом, полное решение задачи для функции $q(t,x)$ имеет следующий вид:

$$q(t,x) = \begin{cases} 3x^2t^2 + \dfrac{9}{2}t^4, & x \geqslant 3t, \\ 6xt^3 - \dfrac{1}{18}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3t, & x < 3t. \end{cases}$$

Решение исходной задачи определяется суммой двух определенных выше функций $w(t,x)$ и $q(t,x)$:

$$u(t,x) = \begin{cases} 3x^2t^2 + \dfrac{9}{2}t^4 + \cos 5x \cos 15t + \\ + \dfrac{1}{6}\left(e^{x+3t} - e^{x-3t}\right), & x \geqslant 3t, \\ 6xt^3 - \dfrac{1}{18}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3t - \sin 15t \sin 5x + \\ + \dfrac{1}{6}\left(e^{x+3t} - e^{-x+3t}\right), & x < 3t. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Решить задачу:

$u_{tt} = 36u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0,x) = 0,$

$u_t(0,x) = e^{-6x^2},$

$u_x(t,0) = 0.$

4.2. Решить задачу:

$u_{tt} = 25u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0,x) = \sin 5x + 5,$

$u_t(0,x) = x + 3,$

$u_x(t,0) = 0.$

4.3. Решить задачу:

$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = 0,$

$u_t(0, x) = 0,$

$u(t, 0) = e^{-t^2} + t \sin t - 1.$

4.4. Решить задачу:

$u_{tt} = 9u_{xx} + t^2, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = \sin x,$

$u_t(0, x) = \cos 3x,$

$u(t, 0) = 0.$

4.5. Решить задачу:

$u_{tt} = u_{xx} + 1, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = \sin 5x + \cos x,$

$u_t(0, x) = e^x,$

$u_x(t, 0) = 3.$

4.6. Решить задачу:

$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = e^{2x},$

$u_t(0, x) = 4,$

$u(t, 0) = \cos 4t.$

4.7. Решить задачу:

$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = 3,$

$u_t(0, x) = 5,$

$u_x(t, 0) - 2u(t, 0) = 0.$

4.8. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0,x) = x^2 - x^3,$$
$$u_t(0,x) = \cos x,$$
$$u_x(t,0) = 0.$$

4.9. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0,x) = 0,$$
$$u_t(0,x) = 0,$$
$$u_x(t,0) = \cos 2t.$$

4.10. Решить задачу:

$$u_{tt} = 36u_{xx} + 6t, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0,x) = x^2,$$
$$u_t(0,x) = \cos(x+2),$$
$$u(t,0) = t^2.$$

4.11. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + 10, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0,x) = \sin 2x - \cos x + 1,$$
$$u_t(0,x) = \sin 5x + x^3,$$
$$u_x(t,0) = t + 10.$$

4.12. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0,x) = x^3,$$
$$u_t(0,x) = \cos x - 1,$$
$$u_x(t,0) - u(t,0) = 0.$$

4.13. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 2, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, x) = -3,$$
$$u_t(0, x) = -3x,$$
$$u(t, 0) = t^2 \cos 4t.$$

4.14. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + 12tx, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = x \cos x^2,$$
$$u(t, 0) = e^t.$$

4.15. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 2, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, x) = 2x^3,$$
$$u_t(0, x) = 0,$$
$$u(t, 0) = e^{-2t}.$$

4.16. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} - e^x, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = x^2,$$
$$u_x(t, 0) = 18t.$$

4.17. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} - 2t, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, x) = 4x,$$
$$u_t(0, x) = 6e^{3x},$$
$$u_x(t, 0) = t \cos t.$$

4.18. Решить задачу:

$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = \cos x^2,$

$u_t(0, x) = 2x + 8,$

$u_x(t, 0) = -3.$

4.19. Решить задачу:

$u_{tt} = u_{xx} - 2x, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = e^x,$

$u_t(0, x) = 2\sin x,$

$u(t, 0) = 0.$

4.20. Решить задачу:

$u_{tt} = 25u_{xx} + 20x, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = 5\sin x,$

$u_t(0, x) = 0,$

$u_x(t, 0) = 15t^3.$

4.21. Решить задачу:

$u_{tt} = u_{xx} - 2, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = x,$

$u_t(0, x) = 2\cos x,$

$u(t, 0) = t.$

4.22. Решить задачу:

$u_{tt} = 9u_{xx} + 1, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u(0, x) = 2x - 1,$

$u_t(0, x) = \sin x,$

$u_x(t, 0) = t.$

4.23. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 5, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, x) = \cos x,$$
$$u_t(0, x) = x^2,$$
$$u(t, 0) = t + 1.$$

4.24. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} - 2, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, x) = x,$$
$$u_t(0, x) = \sin x,$$
$$u(t, 0) = 3t.$$

4.25. Решить задачу:

$$u_{tt} = 16u_{xx} + 3, \quad t > 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, x) = \cos 3x - 1,$$
$$u_t(0, x) = x^2,$$
$$u_x(t, 0) = \cos 2t.$$

5. Уравнения гиперболического типа на отрезке. Метод разделения переменных

Метод разделения переменных или *метод Фурье* применяется для решения дифференциальных уравнений в частных производных, в которых пространственная переменная задана на отрезке. Его суть заключается в представлении решения задачи в виде произведения функций, одна из которых зависит только от времени, а вторая – только от пространственной переменной. На концах струны задаются граничные условия, и, в зависимости от типа этих условий, можно составить девять различных задач.

В настоящей главе сначала будут рассмотрены задачи с однородными гиперболическим уравнением и граничными условиями, начальные условия будут неоднородными. Затем в задачах неоднородность добавится в уравнении. В заключение будет представлен общий случай, когда неоднородность будет присутствовать в уравнении, начальных и граничных условиях.

5.1. Решение однородных гиперболических уравнений на отрезке

5.1.1. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия I–I

Рассмотрим следующую краевую задачу для свободных колебаний ограниченной струны:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0, x) = \varphi(x),\\
&u_t(0, x) = \psi(x),\\
&u(t, 0) = 0,\\
&u(t, l) = 0.
\end{aligned}
$$

Начальный профиль струны и начальные скорости движения точек струны определяются функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно. На левой и правой границах струны заданы однородные граничные условия первого рода, что означает жесткое закрепление обоих концов струны.

Согласно методу разделения переменных будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$u(t, x) = T(t)X(x) \not\equiv 0. \tag{5.1}$$

Подставим произведение (5.1) в исходное уравнение:

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x).$$

Разделим переменные:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Полученное равенство должно выполняться для любых значений (t, x) из области определения функций $T(t)$ и $X(x)$. Например, если взять произвольное значение временной переменной $t_0 \in (0, +\infty)$, то для любого значения пространственной переменной $x \in (0, l)$ справедливо соотношение

$$\frac{T''(t_0)}{a^2T(t_0)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемые функции принимают постоянное значение C на всей области определения $x \in (0, l)$ и $t > 0$, то есть

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C.$$

Таким образом, можно записать два обыкновенных дифференциальных уравнения для функций $T(t)$ и $X(x)$:

$$T''(t) = Ca^2T(t), \quad X''(x) = CX(x).$$

Полученные уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

Теперь подставим произведение (5.1) в граничные условия исходной задачи:

$$T(t)X(0) = 0, \quad T(t)X(l) = 0.$$

Поскольку нас интересует нетривиальное решение, то и из этих равенств следует, что

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Объединяя результаты подстановки произведения (5.1) в исходные уравнение и граничные условия, получаем задачу для функции $X(x)$, которая называется *задачей Штурма–Лиувилля*:

$$\begin{cases} X''(x) = CX(x), \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Произвольная постоянная C может принимать любые действительные значения. Рассмотрим три случая, когда C положительная, отрицательная и равна нулю:

$$1.\ C = \lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = \lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2} = \pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

После подстановки общего решения в условия получаем

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0, \\ X(l) = Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $C > 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x) = Ax + B.$$

Воспользуемся условиями для нахождения значений A и B:

$$\begin{cases} X(0) = B = 0, \\ X(l) = Al + B = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $C = 0$, то задача имеет только тривиальное решение.

$$3.\ C = -\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Подстановка решения в первое условие позволяет определить константу B:

$$X(0) = B = 0.$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия получаем

$$X(l) = A \sin \lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},\ n \in \mathbb{N}.$$

Решения $X_n(x) = \sin \lambda_n x$ называются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля, где $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$ – собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (под множеством

$\mathbb{N}$ здесь и далее понимается множество натуральных чисел, не содержащее нуль). Заметим, что полученные выше собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля соответствуют граничным условиям первого рода в исходной задаче.

Перейдем к решению уравнения для функции $T(t)$:

$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\mu_n^2 = -a^2\lambda_n^2.$$

Определим его корни: $\mu_n = \pm ia\lambda_n$. Все корни являются комплексно сопряженными, поэтому решение дифференциального уравнения имеет вид

$$T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь, суммируя все найденные частные нетривиальные решения, можно выписать общее решение исходной задачи:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t)\sin\lambda_n x. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n, воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\lambda_n x = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \sin\lambda_n x = \psi(x). \end{cases}$$

Домножим оба равенства на $\sin\lambda_k x$ ($k \in \mathbb{N}$) и проинтегрируем по переменной x в пределах от 0 до l, что соответствует скалярному умножению на функцию $\sin\lambda_k x$ ($k \in \mathbb{N}$) в пространстве $L_2([0,l])$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \sin\lambda_n x \sin\lambda_k x\,dx = \int\limits_0^l \varphi(x)\sin\lambda_k x\,dx, \\ \int\limits_0^l \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \sin\lambda_n x \sin\lambda_k x\,dx = \int\limits_0^l \psi(x)\sin\lambda_k x\,dx. \end{cases}$$

Принимая во внимание ортогональность собственных функций:

$$\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l}{2}, & n = k, \end{cases}$$

получаем значения неизвестных произвольных постоянных для всех $k \in \mathbb{N}$:

$$D_k = \frac{2}{a\lambda_k l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\lambda_k x\,dx, \tag{5.3}$$

$$E_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\lambda_k x\,dx, \tag{5.4}$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.2)–(5.4).

5.1.2. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия I–II

Рассмотрим следующую краевую задачу для свободных колебаний ограниченной струны:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0, x) = \varphi(x),\\
&u_t(0, x) = \psi(x),\\
&u(t, 0) = 0,\\
&u_x(t, l) = 0.
\end{aligned}
$$

На левой границе струны $x = 0$ заданы однородные граничные условия первого рода, что означает жесткое закрепление левого конца струны. На правой границе струны $x = l$ заданы однородные граничные условия второго рода, что соответствует тому, что правый конец двигается свободно.

Как и в 5.1.1, будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$u(t, x) = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Подставим это произведение в исходное уравнение и граничные условия. Получим следующие выражения:

$$
\begin{gathered}
\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C,\\
T(t)X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0,\\
T(t)X'(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(l) = 0,
\end{gathered}
$$

где C – произвольная постоянная. Задача Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$ имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
X''(x) = CX(x),\\
X(0) = 0,\\
X'(l) = 0.
\end{cases}
$$

Рассмотрим три возможных случая для значений произвольной постоянной C: $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$.

$$1.\ C=\lambda^2>0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x)=\lambda^2 X(x), \\ X(0)=0, \\ X'(l)=0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2=\lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2}=\pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x)=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}.$$

Подставим полученное общее решение в условия

$$\begin{cases} X(0)=A+B=0, \\ X'(l)=\lambda Ae^{\lambda l}-\lambda Be^{-\lambda l}=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=0, \\ B=0. \end{cases}$$

Таким образом, при $C>0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x)=0, \\ X(0)=0, \\ X'(l)=0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x)=Ax+B.$$

Подставим эту функцию в условия

$$\begin{cases} X(0)=B=0, \\ X'(l)=A=0. \end{cases}$$

Таким образом, если $C=0$, то задача имеет только тривиальное решение.

$$3.\ C=-\lambda^2<0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x)=-\lambda^2 X(x), \\ X(0)=0, \\ X'(l)=0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид

$$X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x.$$

Подстановка решения в первое условие позволяет определить произвольную постоянную B:

$$X(0) = B = 0.$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия $X'(l) = 0$ получаем

$$X'(l) = \lambda A\cos\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом, собственные функции задачи Штурма–Лиувилля имеют вид

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x,$$

где собственные значения задачи Штурма–Лиувилля определяются следующим образом:

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Поскольку нетривиальное решение задачи Штурма–Лиувилля было получено только для третьего случая, рассмотрим задачу для определения функции $T(t)$ для $C < 0$:

$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходной задачи, просуммировав все частные нетривиальные решения, найденные выше:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t) \sin \lambda_n x. \tag{5.5}$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n ($n \in \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \sin \lambda_n x = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a\lambda_n D_n \sin \lambda_n x = \psi(x). \end{cases}$$

Скалярно умножим оба полученных равенства на $\sin \lambda_k x$ ($k \in \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) в пространстве $L_2([0,l])$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \sin \lambda_n x \sin \lambda_k x \, dx = \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \lambda_k x \, dx, \\ \int\limits_0^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} a\lambda_n D_n \sin \lambda_n x \sin \lambda_k x \, dx = \int\limits_0^l \psi(x) \sin \lambda_k x \, dx. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется свойство ортогональности собственных функций

$$\int\limits_0^l \sin\left[\left(\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}\right) x\right] \sin\left[\left(\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi k}{l}\right) x\right] dx = \\ = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l}{2}, & n = k, \end{cases}$$

получаем значения неизвестных констант для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$D_k = \frac{2}{a\lambda_k l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\lambda_k x, \tag{5.6}$$

$$E_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\lambda_k x\,dx, \tag{5.7}$$

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.5)–(5.7).

5.1.3. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия I–III

Рассмотрим краевую задачу для свободных колебаний ограниченной струны, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u(t,0) = 0,\\
&u_x(t,l) + Hu(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

На левой границе струны $x = 0$ заданы однородные граничные условия первого рода, что означает жесткое закрепление левого конца струны. На правой границе струны $x = l$ задано однородное граничное условие третьего рода, что соответствует упругому закреплению правого конца; $H > 0$ – положительная произвольная постоянная.

Будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$u(t,x) = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

После подстановки этого произведения в исходное уравнение и граничные условия получим следующее:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C,$$

$$T(t)X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0,$$

$$T(t)X'(l) + HT(t)X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(l) + HX(l) = 0,$$

где C – произвольная постоянная. Задача Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X''(x) = CX(x), \\ X(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три возможных случая для значений произвольной постоянной: $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$.

$$1.\ C = \lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = \lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2} = \pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подставим полученное общее решение в условия

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0, \\ X'(l) + HX(l) = \lambda Ae^{\lambda l} - \lambda Be^{-\lambda l} + H\left(Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l}\right) = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $C > 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x) = Ax + B.$$

Подставим эту функцию в условия

$$\begin{cases} X(0) = B = 0, \\ X'(l) + HX(l) = A + H(Al + B) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $C = 0$, то задача имеет только тривиальное решение.

$$3.\ C = -\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Подстановка решения в первое условие позволяет определить произвольную постоянную B:

$$X(0) = B = 0.$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия получаем

$$X'(l) + HX(l) = \lambda A \cos \lambda l + HA \sin \lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lambda \cos \lambda l + H \sin \lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} \lambda l = -\frac{\lambda}{H} \Rightarrow \lambda_n \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ \frac{\pi n}{l} \right),\ n \in \mathbb{N}.$$

В случае граничных условий I–III не удается получить аналитическое выражение для собственных значений λ_n, удается лишь определить интервалы, в которых расположены корни уравнения $\operatorname{tg} \lambda_n l = -\dfrac{\lambda_n}{H}$. Схематично решения такого уравнения изображены на рис. 7.

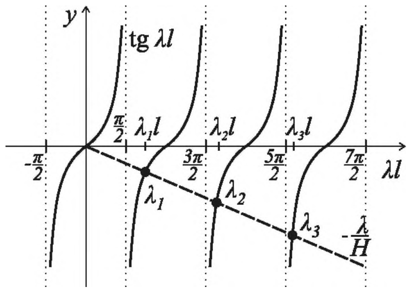

Рис. 7. Схематичное изображение корней уравнения $\operatorname{tg} \lambda_n l = -\dfrac{\lambda_n}{H}$

Таким образом, собственные функции задачи Штурма–Лиувилля имеют вид

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x,$$

где собственные значения задачи Штурма–Лиувилля λ_n являются корнями следующего уравнения:

$$\operatorname{tg} \lambda_n l = -\frac{\lambda_n}{H}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку нетривиальное решение задачи Штурма–Лиувилля было получено только для отрицательных значений произвольной постоянной C, рассмотрим задачу для определения функции $T(t)$ в случае $C < 0$:

$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходной задачи, просуммировав все частные нетривиальные решения, найденные выше:

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t) \sin \lambda_n x.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n $(n \in \mathbb{N})$, воспользуемся начальными условиями:

$$
\begin{cases}
u(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \sin \lambda_n x = \varphi(x), \\
u_t(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \sin \lambda_n x = \psi(x).
\end{cases}
$$

Скалярно умножим оба полученных равенства на $\sin \lambda_k x$ $(k \in \mathbb{N})$ в пространстве $L_2([0,l])$:

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \sin \lambda_n x \sin \lambda_k x \, dx = \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \lambda_k x \, dx, \\
\int\limits_0^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} a\lambda_n D_n \sin \lambda_n x \sin \lambda_k x \, dx = \int\limits_0^l \psi(x) \sin \lambda_k x \, dx.
\end{cases}
$$

Принимая во внимание, что для $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется свойство ортогональности собственных функций

$$
\int\limits_0^l \sin \lambda_n x \sin \lambda_k x \, dx =
$$

$$
= \begin{cases}
0, & n \neq k, \\
\|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l\lambda_k^2 + lH^2 + H}{2(\lambda_k^2 + H^2)}, & n = k,
\end{cases}
$$

получаем значения неизвестных констант для $k \in \mathbb{N}$:

$$D_k = \frac{2(\lambda_k^2 + H^2)}{a\lambda_k(l\lambda_k^2 + lH^2 + H)} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \lambda_k x \, dx, \tag{5.9}$$

$$E_k = \frac{2(\lambda_k^2 + H^2)}{l\lambda_k^2 + lH^2 + H} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \lambda_k x \, dx, \tag{5.10}$$

$$\operatorname{tg} \lambda_k l = -\frac{\lambda_k}{H}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.8)–(5.10).

5.1.4. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия II–I

Рассмотрим задачу, состоящую из однородного гиперболического уравнения на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями второго и первого рода:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0, x) = \varphi(x),\\
&u_t(0, x) = \psi(x),\\
&u_x(t, 0) = 0,\\
&u(t, l) = 0.
\end{aligned}$$

На левой границе $x = 0$ струны задано однородное граничное условие второго рода, что указывает на то, что левый конец струны двигается свободно (закон движения не задан). На правом конце $x = l$ струны задано однородное граничное условие первого рода, что означает жесткое закрепление правого конца.

В соответствии с методом Фурье будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций:

$$u(t, x) = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Подставим такое представление решения в исходное уравнение и граничные условия. В результате получим следующие соотношения:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C,$$
$$T(t)X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) = 0,$$
$$T(t)X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(l) = 0,$$

где C – произвольная постоянная. Сформулируем задачу Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) = CX(x), \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три различных случая для значений произвольной постоянной – $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$:

$$1.\ C = \lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = \lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2} = \pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подставим полученное общее решение в условия, чтобы найти значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda A - \lambda B = 0, \\ X(l) = Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $C > 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x) = Ax + B.$$

Подставим эту функцию в условия и найдем значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0) = A = 0, \\ X(l) = B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $C = 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$3.\ C = -\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид

$$X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x.$$

Подставим решение в первое условие и определим константу A:

$$X'(0) = \lambda A = 0 \ \Rightarrow \ A = 0.$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия получаем

$$X(l) = B\cos\lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \cos\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

В результате получили собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$X_n(x) = \cos\lambda_n x,$$

где собственные значения задачи Штурма–Лиувилля имеют вид

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ввиду того что задача Штурма–Лиувилля имеет нетривиальное решение только в случае отрицательной произвольной постоянной $C = -\lambda^2 < 0$, решение уравнения для функции $T(t)$ будет следующим:

$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходной задачи, просуммировав все найденные выше частные нетривиальные решения:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t)\cos\lambda_n x. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n ($n \in \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \cos\lambda_n x = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a\lambda_n D_n \cos\lambda_n x = \psi(x). \end{cases}$$

Скалярно умножим оба полученных равенства на $\cos\lambda_k x$ ($k \in$

$\in \mathbb{N} \cup \{0\}$) в пространстве $L_2([0,l])$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \cos\lambda_n x \cos\lambda_k x\, dx = \int\limits_0^l \varphi(x) \cos\lambda_k x\, dx, \\ \int\limits_0^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} a\lambda_n D_n \cos\lambda_n x \cos\lambda_k x\, dx = \int\limits_0^l \psi(x) \cos\lambda_k x\, dx. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется свойство ортогональности собственных функций

$$\int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}\right) x \cos\left(\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi k}{l}\right) x\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l}{2}, & n = k, \end{cases}$$

получаем значения неизвестных констант для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$D_k = \frac{2}{a\lambda_k l} \int\limits_0^l \psi(x) \cos\lambda_k x\, dx, \tag{5.12}$$

$$E_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \cos\lambda_k x\, dx, \tag{5.13}$$

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.11)–(5.13).

5.1.5. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия II–II

Рассмотрим однородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями второго рода:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) = 0,\\
&u_x(t,l) = 0.
\end{aligned}
$$

Однородные граничные условия второго рода означают, что концы струны двигаются свободно.

Будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций:

$$u(t,x) = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Подстановки этого произведения в исходное уравнение и граничные условия приводят к следующим соотношениям:

$$
\begin{gathered}
\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C,\\
T(t)X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) = 0,\\
T(t)X'(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(l) = 0,
\end{gathered}
$$

где C – произвольная постоянная. Сформулируем для функции $X(x)$ задачу Штурма–Лиувилля:

$$
\begin{cases}
X''(x) = CX(x),\\
X'(0) = 0,\\
X'(l) = 0.
\end{cases}
$$

Рассмотрим три случая: $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$.

1. $C = \lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = \lambda^2 X(x),\\ X'(0) = 0,\\ X'(l) = 0. \end{cases}$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = \lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2} = \pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

После подстановки общего решения в условия получаем

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda A - \lambda B = 0, \\ X'(l) = \lambda Ae^{\lambda l} - \lambda Be^{-\lambda l} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $C > 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x) = Ax + B.$$

Подставим данную функцию в условия. В результате получим следующее:

$$\begin{cases} X'(0) = A = 0, \\ X'(l) = A = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

То есть получаем, что $A = 0$, B – произвольная постоянная. Таким образом, если $C = 0$, то задача имеет одно нетривиальное решение $X(x) = B$.

$$3.\ C = -\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее

решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид
$$X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x.$$
Подстановка решения в первое условие позволяет найти константу A:
$$X'(0) = \lambda A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$
Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия $X'(l) = 0$ получаем
$$X'(l) = -\lambda B\sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},\ n \in \mathbb{N}.$$
Тогда в случае $C = -\lambda^2 < 0$ собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля имеют вид
$$X_n(x) = \cos\lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Объединяя случаи 2 ($C = 0$) и 3 ($C = -\lambda^2 < 0$), получаем собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:
$$X_n(x) = \cos\lambda_n x,$$
где собственные значения задачи Штурма–Лиувилля определяются следующим образом:
$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для второго рассмотренного случая $C = 0$ решение уравнения для функции $T(t)$ имеет следующий вид:
$$T_0''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0(t) = D_0 t + E_0.$$

Для третьего рассмотренного случая $C = -\lambda^2 < 0$ решение уравнения для функции $T(t)$ будет следующим:
$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Объединяя случаи 2 и 3 для функции $T(t)$, получим

$$T_0(t) = D_0 t + E_0, \qquad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходной задачи, просуммировав все частные нетривиальные решения, найденные выше:

$$\begin{aligned} u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = D_0 t + E_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t) \cos \lambda_n x. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n ($n \in \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0,x) = E_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \cos \lambda_n x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \cos \lambda_n x = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = D_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \cos \lambda_n x = \psi(x). \end{cases}$$

Домножим оба равенства на $\cos \lambda_k x$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) и проинтегрируем по переменной x в пределах от 0 до l:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l \left(E_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \cos \lambda_n x \right) \cos \lambda_k x \, dx = \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \lambda_k x \, dx, \\ \int\limits_0^l \left(D_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \cos \lambda_n x \right) \cos \lambda_k x \, dx = \int\limits_0^l \psi(x) \cos \lambda_k x \, dx. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что для $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется свойство ортогональности собственных функций

$$\int\limits_0^l \cos \frac{\pi n x}{l} \cos \frac{\pi k x}{l} \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l}{2}, & n = k, \end{cases}$$

а также справедливо следующее:

$$\int_0^l \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ l, & n = 0, \end{cases}$$

получаем значения неизвестных констант для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$D_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)\,dx, \tag{5.15}$$

$$D_n = \frac{2}{la\lambda_n}\int_0^l \psi(x)\cos\lambda_n x\,dx, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.16}$$

$$E_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,dx, \tag{5.17}$$

$$E_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\lambda_n x\,dx, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.18}$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.14)–(5.18).

5.1.6. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия II–III

Рассмотрим однородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями второго и третьего рода:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ &u(0,x) = \varphi(x), \\ &u_t(0,x) = \psi(x), \\ &u_x(t,0) = 0, \\ &u_x(t,0) + Hu(t,l) = 0. \end{aligned}$$

На левой границе $x = 0$ струны задано однородное граничное условие второго рода, что означает, что левый конец струны двигается свободно. На правом конце $x = l$ струны задано однородное граничное условие третьего рода, что означает упругое закрепление правого конца.

В соответствии с методом разделения переменных будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций:

$$u(t, x) = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Подставим решение в исходное уравнение и граничные условия. В результате получим следующие соотношения:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C,$$
$$T(t)X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) = 0,$$
$$T(t)X'(l) + HT(t)X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(l) + HX(l) = 0,$$

где C – произвольная постоянная. Сформулируем задачу Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) = CX(x), \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три различных случая для значений произвольной постоянной: $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$.

$$1.\ C = \lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = \lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2} = \pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подставим полученное общее решение в условия, чтобы найти значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda A - \lambda B = 0, \\ X'(l) + HX(l) = \lambda A e^{\lambda l} - \lambda B e^{-\lambda l} + H\left(A e^{\lambda l} + B e^{-\lambda l}\right) = 0, \end{cases}$$

откуда следует

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $C > 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x) = Ax + B.$$

Подставим эту функцию в условия и найдем значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0) = A = 0, \\ X'(l) + HX(l) = HB = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $C = 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$3.\ C = -\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Подставим решение в первое условие и определим константу A:

$$X'(0) = \lambda A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия получаем

$$X'(l) + HX(l) = -\lambda B \sin \lambda l + HB \cos \lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -\lambda \sin \lambda l + H \cos \lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} \lambda l = \frac{H}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n \in \left(\frac{\pi(n-1)}{l},\ -\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l} \right),\ n \in \mathbb{N}.$$

В случае граничных условий II–III не удается получить аналитическое выражение для собственных значений λ_n, удается лишь определить интервалы, в которых расположены корни уравнения $\operatorname{tg} \lambda_n l = \dfrac{H}{\lambda_n}$. Схематично решения уравнения изображены на рис. 8.

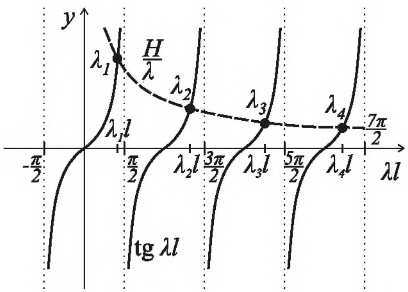

Рис. 8. Схематичное изображение корней уравнения $\operatorname{tg} \lambda_n l = \dfrac{H}{\lambda_n}$

В результате получили собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$X_n(x) = \cos \lambda_n x,$$

где собственные значения задачи Штурма–Лиувилля λ_n являются корнями следующего уравнения:

$$\operatorname{tg} \lambda_n l = \frac{H}{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду того что задача Штурма–Лиувилля имеет нетривиальное решение только в случае отрицательной произвольной постоянной $C = -\lambda^2 < 0$, решение уравнения для функции $T(t)$ будет следующим:

$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходной задачи, просуммировав все найденные выше частные нетривиальные решения:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t) \cos \lambda_n x. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n $(n \in \mathbb{N})$, воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \cos \lambda_n x = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \cos \lambda_n x = \psi(x). \end{cases}$$

Скалярно умножим оба полученных равенства на $\cos \lambda_k x$ $(k \in$ $\in \mathbb{N} \cup \{0\})$ в пространстве $L_2([0,l])$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \cos \lambda_n x \cos \lambda_k x \, dx = \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \lambda_k x \, dx, \\ \int\limits_0^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} a\lambda_n D_n \cos \lambda_n x \cos \lambda_k x \, dx = \int\limits_0^l \psi(x) \cos \lambda_k x \, dx. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что для $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется свойство ортогональности собственных функций

$$\int\limits_0^l \cos\lambda_n x \cos\lambda_k x\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l\lambda_k^2 + lH^2 + H}{2(\lambda_k^2 + H^2)}, & n = k, \end{cases}$$

получаем значения неизвестных констант для $k \in \mathbb{N}$:

$$D_k = \frac{2(\lambda_k^2 + H^2)}{a\lambda_k\left(l\lambda_k^2 + lH^2 + H\right)} \int\limits_0^l \psi(x)\cos\lambda_k x\,dx, \tag{5.20}$$

$$E_k = \frac{2(\lambda_k^2 + H^2)}{l\lambda_k^2 + lH^2 + H} \int\limits_0^l \varphi(x)\cos\lambda_k x\,dx, \tag{5.21}$$

$$\operatorname{tg}\lambda_k l = \frac{H}{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.19)–(5.21).

5.1.7. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия III–I

Рассмотрим следующую краевую задачу для свободных колебаний ограниченной струны:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ &u(0,x) = \varphi(x), \\ &u_t(0,x) = \psi(x), \\ &u_x(t,0) - hu(t,0) = 0, \\ &u(t,l) = 0. \end{aligned}$$

На левой границе $x = 0$ струны задано однородное граничное условие третьего рода, то есть левый конец струны упруго закреплен. На правом конце $x = l$ струны задано однородное граничное условие первого рода, что означает жесткое закрепление правого конца.

Как и в предыдущих параграфах, будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций:

$$u(t,x) = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Подставляя такой вид решения в исходное уравнение и граничные условия, получаем следующие соотношения:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C,$$
$$T(t)X'(0) - hT(t)X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) - hX(0) = 0,$$
$$T(t)X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(l) = 0,$$

где C – произвольная постоянная. Сформулируем задачу Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) = CX(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая для различных значений произвольной постоянной: $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$.

$$1.\ C = \lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = \lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2} = \pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подставим полученное общее решение в условия, чтобы найти значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = \lambda A - \lambda B - h(A+B) = 0, \\ X(l) = Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $C > 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = 0, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x) = Ax + B.$$

Подставим эту функцию в условия и найдем значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = A - hB = 0, \\ X(l) = B = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $C = 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$3.\ C = -\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Подставим решение в первое условие и выразим константу A через константу B:

$$X'(0) - hX(0) = \lambda A - hB = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{h}{\lambda} B.$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия получаем

$$X(l) = \frac{h}{\lambda} B \sin \lambda l + B \cos \lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{\lambda} \sin \lambda l + \cos \lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} \lambda l = -\frac{\lambda}{h} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}, \ \frac{\pi n}{l}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

В случае граничных условий III–I не удается получить аналитическое выражение для собственных значений λ_n, удается лишь определить интервалы, в которых расположены корни уравнения $\operatorname{tg} \lambda_n l = -\dfrac{\lambda_n}{h}$. Схематично решения уравнения изображены на рис. 9.

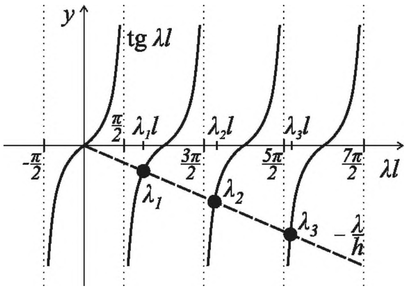

Рис. 9. Схематичное изображение корней уравнения $\operatorname{tg} \lambda_n l = -\dfrac{\lambda_n}{h}$

В результате получили собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$X_n(x) = \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x,$$

где собственные значения задачи Штурма–Лиувилля λ_n являются корнями следующего уравнения:

$$\operatorname{tg} \lambda_n l = -\frac{\lambda_n}{h}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду того что задача Штурма–Лиувилля имеет нетривиальное решение только в случае отрицательной произвольной постоянной C, решение уравнения для функции $T(t)$ будет следующим:

$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходной задачи, просуммировав все найденные выше частные нетривиальные решения:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \tag{5.22}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t\right) \left(\frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x\right).$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n ($n \in \mathbb{N}$), воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \left(\dfrac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x\right) = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \left(\dfrac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x\right) = \psi(x). \end{cases}$$

Скалярно умножим оба полученных равенства на $X_k(x) = \dfrac{h}{\lambda_k} \sin \lambda_k x + \cos \lambda_k x$ ($k \in \mathbb{N}$) в пространстве $L_2([0,l])$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n X_n(x) X_k(x)\, dx = \int\limits_0^l \varphi(x) X_k(x)\, dx, \\ \int\limits_0^l \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n X_n(x) X_k(x)\, dx = \int\limits_0^l \psi(x) X_k(x)\, dx. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что для $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется свойство ортогональности собственных функций

$$\int_0^l X_n(x)X_k(x)\,dx =$$

$$= \int_0^l \left(\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x\right)\left(\frac{h}{\lambda_k}\sin\lambda_k x + \cos\lambda_k x\right)dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l\lambda_k^2 + lh^2 + h}{2\lambda_k^2}, & n = k, \end{cases}$$

получаем значения неизвестных констант для $k \in \mathbb{N}$:

$$D_k = \frac{2\lambda_k}{a\left(l\lambda_k^2 + lh^2 + h\right)}\int_0^l \psi(x)\left(\frac{h}{\lambda_k}\sin\lambda_k x + \cos\lambda_k x\right)dx, \tag{5.23}$$

$$E_k = \frac{2\lambda_k^2}{l\lambda_k^2 + lh^2 + h}\int_0^l \varphi(x)\left(\frac{h}{\lambda_k}\sin\lambda_k x + \cos\lambda_k x\right)dx, \tag{5.24}$$

$$\operatorname{tg}\lambda_k l = -\frac{\lambda_k}{h}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.22)–(5.24).

5.1.8. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия III–II

Рассмотрим следующую краевую задачу для свободных колебаний ограниченной струны:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\
&u(0,x) = \varphi(x), \\
&u_t(0,x) = \psi(x), \\
&u_x(t,0) - hu(t,0) = 0, \\
&u_x(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

На левой границе $x = 0$ струны задано однородное граничное условие третьего рода, что указывает на то, что левый конец струны упруго закреплен. На правом конце $x = l$ струны задано однородное граничное условие второго рода, то есть правый конец двигается свободно.

Согласно методу Фурье будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций:

$$u(t, x) = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Подставляя такое представление решения в исходное уравнение и граничные условия, получаем следующие соотношения:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C,$$
$$T(t)X'(0) - hT(t)X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) - hX(0) = 0,$$
$$T(t)X'(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(l) = 0,$$

где C – произвольная постоянная. Сформулируем задачу Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) = CX(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая для различных значений произвольной постоянной: $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$.

$$1.\ C = \lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = \lambda^2 X(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = \lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2} = \pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подставим полученное общее решение в условия, чтобы найти значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = \lambda A - \lambda B - h(A+B) = 0, \\ X'(l) = \lambda A e^{\lambda l} - \lambda B e^{-\lambda l} = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $C > 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = 0, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x) = Ax + B.$$

Подставим эту функцию в условия и найдем значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = A - hB = 0, \\ X'(l) = A = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $C = 0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$3.\ C = -\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x.$$

Подставим решение в первое условие и выразим константу A через константу B:

$$X'(0) - hX(0) = \lambda A - hB = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{h}{\lambda} B.$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия получаем

$$X'(l) = \lambda\frac{h}{\lambda}B\cos\lambda l - \lambda B\sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h\cos\lambda l - \lambda\sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\lambda l = \frac{h}{\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n \in \left(\frac{\pi(n-1)}{l},\ -\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

В случае граничных условий III–II не удается получить аналитическое выражение для собственных значений λ_n, удается лишь определить интервалы, в которых расположены корни уравнения $\operatorname{tg}\lambda_n l = \dfrac{h}{\lambda_n}$. Схематично решения уравнения изображены на рис. 10.

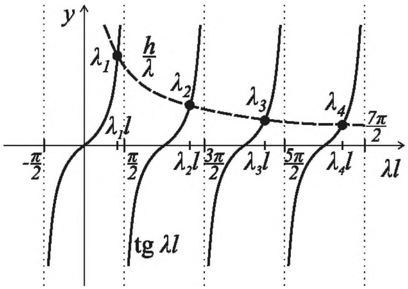

Рис. 10. Схематичное изображение корней уравнения $\operatorname{tg}\lambda_n l = \dfrac{h}{\lambda_n}$

В результате получили собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$X_n(x) = \frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x,$$

где собственные значения задачи Штурма–Лиувилля λ_n являются корнями следующего уравнения:

$$\operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{h}{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду того что задача Штурма–Лиувилля имеет нетривиальное решение только в случае отрицательной произвольной постоянной $C < 0$, решение уравнения для функции $T(t)$ будет следующим:

$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходной задачи, просуммировав все найденные выше частные нетривиальные решения:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \qquad (5.25)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t)\left(\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x\right). \end{aligned}$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n ($n \in \mathbb{N}$), воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \left(\dfrac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x\right) = \varphi(x),\\ u_t(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \left(\dfrac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x\right) = \psi(x). \end{cases}$$

Скалярно умножим оба полученных равенства на $X_k(x) = \dfrac{h}{\lambda_k}\sin\lambda_k x + \cos\lambda_k x$ ($k \in \mathbb{N}$) в пространстве $L_2([0,l])$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n X_n(x)X_k(x)\,dx = \int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)\,dx,\\ \int\limits_0^l \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n X_n(x)X_k(x)\,dx = \int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)\,dx. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что для $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется свойство ортогональности собственных функций

$$\int_0^l X_n(x)X_k(x)\,dx =$$

$$= \int_0^l \left(\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x\right)\left(\frac{h}{\lambda_k}\sin\lambda_k x + \cos\lambda_k x\right)dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l\lambda_k^2 + lh^2 + h}{2\lambda_k^2}, & n = k, \end{cases}$$

получаем значения неизвестных констант для $k \in \mathbb{N}$:

$$D_k = \frac{2\lambda_k}{a\left(l\lambda_k^2 + lh^2 + h\right)}\int_0^l \psi(x)\left(\frac{h}{\lambda_k}\sin\lambda_k x + \cos\lambda_k x\right)dx, \tag{5.26}$$

$$E_k = \frac{2\lambda_k^2}{l\lambda_k^2 + lh^2 + h}\int_0^l \varphi(x)\left(\frac{h}{\lambda_k}\sin\lambda_k x + \cos\lambda_k x\right)dx, \tag{5.27}$$

$$\operatorname{tg}\lambda_k l = \frac{h}{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.25)–(5.27).

5.1.9. Ур $= 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия III–III

Рассмотрим следующую краевую задачу для свободных колебаний ограниченной струны:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0, x) = \varphi(x),\\
&u_t(0, x) = \psi(x),\\
&u_x(t, 0) - hu(t, 0) = 0,\\
&u_x(t, l) + Hu(t, l) = 0.
\end{aligned}
$$

На левой $x = 0$ и правой $x = l$ границах струны заданы однородные граничные условия третьего рода, что означает, что концы струны упруго закреплены.

Согласно методу разделения переменных будем искать все частные нетривиальные решения задачи в виде произведения двух функций:

$$u(t, x) = T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Подставляя такое представление решения в исходное уравнение и граничные условия, получаем следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \equiv C,\\
T(t)X'(0) - hT(t)X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(0) - hX(0) = 0,\\
T(t)X'(l) + HT(t)X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'(l) + HX(l) = 0,
\end{gathered}
$$

где C – произвольная постоянная. Сформулируем задачу Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$:

$$
\begin{cases}
X''(x) = CX(x),\\
X'(0) - hX(0) = 0,\\
X'(l) + HX(l) = 0.
\end{cases}
$$

Рассмотрим отдельно три случая для различных значений произвольной постоянной: $C > 0$, $C = 0$ и $C < 0$.

$$1.\ C=\lambda^2>0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x)=\lambda^2 X(x),\\ X'(0)-hX(0)=0,\\ X'(l)+HX(l)=0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2=\lambda^2$ имеет два действительных корня – $\mu_{1,2}=\pm\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x)=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}.$$

Подставим полученное общее решение в условия, чтобы найти значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0)-hX(0)=\lambda A-\lambda B-h(A+B)=0,\\ X'(l)+HX(l)=\lambda Ae^{\lambda l}-\lambda Be^{-\lambda l}+H\left(Ae^{\lambda l}+Be^{-\lambda l}\right)=0, \end{cases}$$

откуда следует

$$\begin{cases} A=0,\\ B=0. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $C>0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$2.\ C=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x)=0,\\ X'(0)-hX(0)=0,\\ X'(l)+HX(l)=0. \end{cases}$$

В этом случае решением дифференциального уравнения является линейная функция

$$X(x)=Ax+B.$$

Подставим эту функцию в условия и найдем значения A и B:

$$\begin{cases} X'(0)-hX(0)=A-hB=0,\\ X'(l)+HX(l)=A+H(Al+B)=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=0,\\ B=0. \end{cases}$$

Таким образом, при $C=0$ задача имеет только тривиальное решение.

$$3.\ C = -\lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) - hX(0) = 0, \\ X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\mu^2 = -\lambda^2$ имеет два комплексно сопряженных корня $\mu_{1,2} = \pm i\lambda$, следовательно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения принимает вид

$$X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x.$$

Подставим решение в первое условие и выразим константу A через константу B:

$$X'(0) - hX(0) = \lambda A - hB = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{h}{\lambda}B.$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение, то из второго условия получаем

$$X'(l) + HX(l) =$$

$$= \lambda\frac{h}{\lambda}B\cos\lambda l - \lambda B\sin\lambda l + H\left(\frac{h}{\lambda}B\sin\lambda l + B\cos\lambda l\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{hH}{\lambda} - \lambda\right)\sin\lambda l + (h+H)\cos\lambda l = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\lambda l = \frac{\lambda(h+H)}{\lambda^2 - hH} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}:\ \sqrt{hH} = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi m}{l} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \leqslant m \quad \lambda_n \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ \frac{\pi n}{l}\right),$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n > m \quad \lambda_n \in \left(\frac{\pi n}{l},\ \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}\right),$$

$$\exists\, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}:\ \sqrt{hH} \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi m}{l},\ \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi m}{l}\right) \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \leqslant m \quad \lambda_n \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ \frac{\pi n}{l}\right),$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n > m \quad \lambda_n \in \left(\frac{\pi(n-1)}{l},\ \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi(n-1)}{l}\right).$$

В случае граничных условий III–III не удается получить аналитическое выражение для собственных значений λ_n, удается лишь определить интервалы, в которых расположены корни уравнения $\operatorname{tg}\lambda_n l = \dfrac{\lambda_n(h+H)}{\lambda_n^2 - hH}$.

Причем интервалы могут быть двух видов, поскольку необходимо рассматривать два случая: асимптота функции $\dfrac{\lambda_n(h+H)}{\lambda_n^2 - hH}$ может совпадать с асимптотой функции $\operatorname{tg}\lambda_n l$, асимптоты функций не совпадают. Эти случаи можно объединить в один. Отметим, что разница случаев содержится только в определении интервалов для $n > m$. Рассмотрим следующую функцию:

$$x \in (\alpha,\ \beta] \quad \Rightarrow \quad g(x) = 1 - \left[\frac{x}{b}\right],$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда

$$g(x) = 1 - \left[\frac{x}{b}\right] = \begin{cases} 0, & x = b, \\ 1, & x < b. \end{cases}$$

Воспользуемся определенной функцией $g(x)$ для объединения случаев:

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} :\ \sqrt{hH} \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi m}{l},\ \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi m}{l}\right] \ \to$$
$$\to\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \leqslant m \quad \lambda_n \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ \frac{\pi n}{l}\right),$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n > m \quad \lambda_n \in (A_\lambda, B_\lambda)\,,$$

где

$$A_\lambda = \frac{\pi}{l}\left(n + \left[\frac{2l\sqrt{hH}}{\pi + 2\pi m}\right] - 1\right),$$
$$B_\lambda = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi}{l}\left(n + \left[\frac{2l\sqrt{hH}}{\pi + 2\pi m}\right] - 1\right).$$

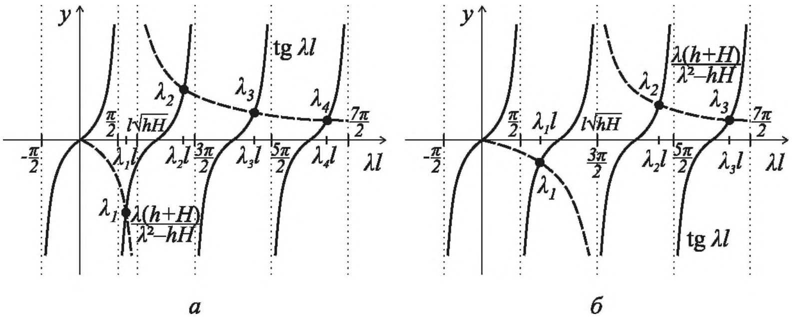

Рис. 11. Схематичное изображение корней уравнения $\operatorname{tg}\lambda_n l = \dfrac{\lambda_n(h+H)}{\lambda_n^2 - hH}$: *а* – асимптоты функций слева и справа совпадают; *б* – асимптоты функций слева и справа не совпадают

Схематично решения уравнения $\operatorname{tg}\lambda_n l = \dfrac{\lambda_n(h+H)}{\lambda_n^2 - hH}$ изображены на рис. 11.

В результате получили собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

$$X_n(x) = \frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x,$$

где собственные значения задачи Штурма–Лиувилля λ_n являются корнями следующего уравнения:

$$\operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{\lambda_n(h+H)}{\lambda_n^2 - hH}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду того что задача Штурма–Лиувилля имеет нетривиальное решение только в случае отрицательной произвольной постоянной $C < 0$, решение уравнения для функции $T(t)$ будет следующим:

$$T_n''(t) = -a^2\lambda_n^2 T_n(t) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходной задачи, просуммировав все найденные выше частные нетривиальные решения:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \tag{5.28}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \sin a\lambda_n t + E_n \cos a\lambda_n t\right) \left(\frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x\right).$$

Для того чтобы определить коэффициенты D_n и E_n $(n \in \mathbb{N})$, воспользуемся начальными условиями

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \left(\dfrac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x\right) = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n \left(\dfrac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x\right) = \psi(x). \end{cases}$$

Скалярно умножим оба полученных равенства на $X_k(x) = \dfrac{h}{\lambda_k} \sin \lambda_k x + \cos \lambda_k x$ $(k \in \mathbb{N})$ в пространстве $L_2([0,l])$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^l \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n X_n(x) X_k(x)\, dx = \int\limits_0^l \varphi(x) X_k(x)\, dx, \\ \int\limits_0^l \sum\limits_{n=1}^{\infty} a\lambda_n D_n X_n(x) X_k(x)\, dx = \int\limits_0^l \psi(x) X_k(x)\, dx. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что для $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется свойство ортогональности собственных функций

$$\int\limits_0^l X_n(x) X_k(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^l \left(\frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x\right) \left(\frac{h}{\lambda_k} \sin \lambda_k x + \cos \lambda_k x\right) dx =$$

$$
= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])} = \dfrac{l(\lambda_k^2 + h^2)}{2\lambda_k^2} + \dfrac{(h+H)\left(\lambda_k^2 + hH\right)}{2\lambda_k^2\left(\lambda_k^2 + H^2\right)}, & n = k, \end{cases}
$$

получаем выражения для неизвестных констант для $k \in \mathbb{N}$:

$$
D_k = \frac{1}{a\lambda_k \|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \psi(x) X_k(x) dx, \tag{5.29}
$$

$$
E_k = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \tag{5.30}
$$

$$
\operatorname{tg} \lambda_k l = \frac{\lambda_k (h + H)}{\lambda_k^2 - hH}, \quad k \in \mathbb{N}.
$$

Таким образом, решение исходной задачи определяется формулами (5.28)–(5.30).

5.2. Таблица решений задачи Штурма–Лиувилля

В предыдущем параграфе были подробно разобраны и решены задачи Штурма–Лиувилля для всех возможных комбинаций граничных условий на левой и правой границах отрезка, на котором определена задача. В этом параграфе для удобства дальнейшего использования решения задачи Штурма–Лиувилля для граничных условий первого и второго рода будут собраны вместе в форме таблицы.

Решения задач Штурма–Лиувилля для различных комбинаций граничных условий первого и второго рода

		Правая граница: $x = l$	
		I: $X(l) = 0$	II: $X'(l) = 0$
Левая граница: $x = 0$	I: $X(0) = 0$	$X_n(x) = \sin \lambda_n x$	
		$\sin \lambda_n l = 0,\ n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{l},\quad \Vert X_n(x) \Vert^2 = \dfrac{l}{2}$	$\cos \lambda_n l = 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\lambda_n = \dfrac{\pi}{2l} + \dfrac{\pi n}{l},\quad \Vert X_n(x) \Vert^2 = \dfrac{l}{2}$
	II: $X'(0) = 0$	$X_n(x) = \cos \lambda_n x$	
		$\cos \lambda_n l = 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\lambda_n = \dfrac{\pi}{2l} + \dfrac{\pi n}{l},\quad \Vert X_n(x) \Vert^2 = \dfrac{l}{2}$	$\sin \lambda_n l = 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{l},\quad \Vert X_n(x) \Vert^2 = \dfrac{l}{2}$

Следует отметить, что вид собственных функций $X_n(x)$ задачи Штурма–Лиувилля зависит от рода граничного условия на левой границе. Так, если на левой границе задано граничное условие первого рода, то собственные функции имеют вид $X_n(x) = \sin \lambda_n x$. Граничные условия второго рода на левой границе приводят к собственным функциям $X_n(x) = \cos \lambda_n x$. Третий тип граничных условий является смешанным, поэтому и собственные функции получаются комбинацией собственных функций с левыми границами первого и второго рода, а именно $X_n(x) = \dfrac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x$.

Род граничных условий справа определяет уравнение для поиска собственных значений λ_n для определенных по левой границе собственных функций $X_n(x)$. В некоторых случаях такое уравнение удается решить аналитически, в остальных – можно определить интервалы, в которых располагаются собственные значения.

Один из случаев, рассмотренных в предыдущем параграфе, является особенным с точки зрения решения задач. Речь идет о задаче с граничными условиями II–II. При определении произвольной постоянной C из уравнения $X''(x) = CX(x)$ только в таких задачах произвольная постоянная может быть не только отрицательной, но и равной нулю. Решения задачи Штурма–Лиувилля для этих двух случаев удалось объединить, а вот решения задач для функции $T(t)$, соответствующих двум случаям $C = 0$ и $C < 0$, объединить не удается. Поэтому важно при решении гиперболической задачи на отрезке с граничными условиями II–II для функции $T(t)$ отдельно рассматривать случай $C = 0$.

В таблице содержатся решения задачи Штурма–Лиувилля для различных комбинаций граничных условий первого и второго рода на левой и правой границах отрезка, для которого определена исходная задача.

5.3. Решение неоднородных уравнений гиперболического типа на отрезке

Неоднородные гиперболические уравнения на отрезке описывают вынужденные колебания ограниченной струны. В задаче заданы начальные условия, определяющие начальный профиль струны $\varphi(x)$ и начальные скорости движения точек струны $\psi(x)$. Граничные условия предполагаются однородными. Ниже будут рассмотрены девять задач, соответствующих различным комбинациям граничных условий на левой и правой границах струны.

5.3.1. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия I–I

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями первого рода:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u(t,0) = 0,\\
&u(t,l) = 0.
\end{aligned}
$$

Задача моделирует процесс колебания ограниченной струны, вызванный силой, плотность которой задается функцией $f(t,x)$. Оба конца струны жестко закреплены, чему соответствуют однородные граничные условия первого рода в постановке задачи.

Алгоритм решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, состоит из четырех основных шагов:

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению.

Задача Штурма–Лиувилля для граничных условий I–I имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \\ X_n(0) = 0, \\ X_n(l) = 0. \end{cases}$$

В 5.1.1 получено ее решение:

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение исходной задачи будем искать в виде бесконечного ряда по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|_{L_2}^2} \int_0^l f(t,x) X_n(x)\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x) X_n(x)\, dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|_{L_2}^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|_{L_2}^2} \int_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия.

Подстановка рядов для функций $u(t,x)$, $f(t,x)$ в уравнение дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x).$$

Функции $X_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x),$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t)X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x).$$

Вносим все слагаемые под один знак суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t)\right) X_n(x) = 0.$$

В полученном равенстве справа стоит нуль, а слева представлено его разложение в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$. Нуль раскладывается в ряд Фурье с нулевыми коэффициентами, поэтому все коэффициенты полученного разложения можно приравнять к нулю, откуда получаем уравнения для определения функций $T_n(t)$:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эти уравнения представляют собой обыкновенные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Для однозначного разрешения этих уравнений необходимо дополнительно задать два условия. Эти условия определяются после подстановки рядов для функций $u(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в начальные условия исходной задачи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x), \end{cases}$$

откуда следует

$$\begin{cases} T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n. \end{cases}$$

Сначала найдем общее решение однородного уравнения:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение $\mu_n^2 + a^2\lambda_n^2 = 0$ имеет комплексно сопряженные корни $\mu_n = \pm i a\lambda_n$, следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде

$$T_n(t) = A_n \sin a\lambda_n t + B_n \cos a\lambda_n t.$$

Для решения неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных [4, с. 89; 5, с. 52]. Положим, что $A_n(t)$ и $B_n(t)$ зависят от переменной t, и составим систему уравнений для их определения:

$$\begin{cases} A_n'(t)\sin a\lambda_n t + B_n'(t)\cos a\lambda_n t = 0, \\ A_n'(t) a\lambda_n \cos a\lambda_n t - B_n'(t) a\lambda_n \sin a\lambda_n t = f_n(t). \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, получаем

$$A_n'(t) = \frac{f_n(t)}{a\lambda_n}\cos a\lambda_n t, \quad B_n'(t) = -\frac{f_n(t)}{a\lambda_n}\sin a\lambda_n t.$$

Проинтегрировав получившиеся выражения, находим функции $A_n(t)$ и $B_n(t)$:

$$A_n(t) = \frac{1}{a\lambda_n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos a\lambda_n\tau\, d\tau + C_n,$$

$$B_n(t) = \frac{1}{a\lambda_n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n\tau\, d\tau + D_n,$$

где C_n и D_n – константы интегрирования. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения для функции $T_n(t)$ имеет следующий вид:

$$T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos a\lambda_n\tau\, d\tau + C_n\right)\sin a\lambda_n t +$$
$$+\left(\frac{1}{a\lambda_n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n\tau\, d\tau + D_n\right)\cos a\lambda_n t.$$

Константы C_n и D_n определяются из условий

$$\begin{cases} T_n(0) = D_n = \varphi_n, \\ T_n'(0) = a\lambda_n C_n = \psi_n, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_n = \dfrac{\psi_n}{a\lambda_n}, \\ D_n = \varphi_n, \end{cases}$$

после чего функции $T_n(t)$ полностью определены $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos a\lambda_n\tau\, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n}\right)\sin a\lambda_n t +$$
$$+\left(\frac{1}{a\lambda_n}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n\tau\, d\tau + \varphi_n\right)\cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \sin \lambda_n x,$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.3.2. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия I–II

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями первого и второго рода на границах отрезка:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u(t,0) = 0,\\
&u_x(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

В соответствии с выбранными граничными условиями правый конец струны жестко закреплен, а левый двигается свободно.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, который был подробно описан в 5.3.1. Задачи отличаются только типами граничных условий, что приводит к разным решениям задачи Штурма–Лиувилля. В остальном решение задачи для граничных условий I–II будет идентично решению задачи с граничными условиями I–I, поэтому в этом подпараграфе и далее не будут повторяться выкладки, сделанные в 5.3.1, а будут приведены только окончательные выражения.

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению с граничными условиями I–II:

$$\begin{cases} X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \\ X_n(0) = 0, \\ X_n'(l) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} X_n(x) = \sin \lambda_n x, \\ \lambda_n = \dfrac{\pi}{2l} + \dfrac{\pi n}{l}, \\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{array}$$

Представим решение исходной задачи в виде бесконечного ряда по найденным $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$:

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|_{L_2}^2} \int_0^l f(t,x) X_n(x)\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x) X_n(x)\, dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|_{L_2}^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2}} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\,dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\,dx.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия и воспользуемся равенством $X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n''(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = -a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t) X_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты в полученных разложениях в ряды Фурье:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau\, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t +$$
$$+ \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau\, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \sin \lambda_n x,$$
$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

5.3.3. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия I–III

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями первого и третьего рода на границах отрезка:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u(t,0) = 0,\\
&u_x(t,l) + Hu(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

Выбранные граничные условия означают, что правый конец струны закреплен жестко, а левый – упруго.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, который был подробно описан в 5.3.1.

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению с граничными условиями I–III:

$$\begin{cases} X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \\ X_n(0) = 0, \\ X_n'(l) + Hu(t,l) = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &X_n(x) = \sin\lambda_n x, \\ &\operatorname{tg}\lambda_n l = -\frac{\lambda_n}{H}, \\ &\lambda_n \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ \frac{\pi n}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Представим решение исходной задачи в виде бесконечного ряда по найденным $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|_{L_2}^2} \int_0^l f(t,x) X_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{l\lambda_n^2 + lH^2 + H} \int_0^l f(t,x) X_n(x)\,dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|_{L_2}^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{l\lambda_n^2 + lH^2 + H} \int_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|_{L_2}^2} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx = $$
$$= \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{l\lambda_n^2 + lH^2 + H} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия и воспользуемся равенством $X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t) X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты в полученных разложениях в ряды Фурье:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \\ + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \sin \lambda_n x, \\ \operatorname{tg} \lambda_n l = -\frac{\lambda_n}{H}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.3.4. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия II–I

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями второго и первого рода на границах отрезка:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ &u(0,x) = \varphi(x), \\ &u_t(0,x) = \psi(x), \\ &u_x(t,0) = 0, \\ &u(t,l) = 0. \end{aligned}$$

Ввиду выбранных граничных условий можно заключить, что левый конец струны двигается свободно, а правый жестко закреплен.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, который был подробно описан в 5.3.1.

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению с граничными условиями II–I:

$$\begin{cases} X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \\ X_n'(0) = 0, \\ X_n(l) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & X_n(x) = \cos \lambda_n x, \\ & \lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}, \\ & n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Представим решение исходной задачи в виде бесконечного ряда по найденным $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$:

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l f(t,x) X_n(x)\,dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(t,x) X_n(x)\,dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int_0^l \psi(x) X_n(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)X_n(x)\,dx.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия и воспользуемся равенством $X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n''(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)X_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = -a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t)X_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)X_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты в полученных разложениях в ряды Фурье:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n\tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t +$$
$$+ \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n\tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n\tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n\tau d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \cos \lambda_n x,$$
$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

5.3.5. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия II–II

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями второго и первого рода на границах отрезка:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) = 0,\\
&u_x(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

Выбранные граничные условия означают, что оба конца струны двигаются свободно.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, который был подробно описан в 5.3.1.

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению с граничными условиями II–I:

$$\begin{cases} X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \\ X_n'(0) = 0, \\ X_n'(l) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} X_n(x) = \cos\lambda_n x, \\ \lambda_n = \dfrac{\pi n}{l}, \\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{array}$$

Представим решение исходной задачи в виде бесконечного ряда по найденным $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$:

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l f(t,x) X_n(x)\,dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(t,x) X_n(x)\,dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия и воспользуемся равенством $X''_n(x) = -\lambda_n^2 X_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T''_n(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X''_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} T''_n(t) X_n(x) = -a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t) X_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты в полученных разложениях в ряды Фурье:

$$T''_0(t) - f_0(t) = 0, \quad T''_n(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T'_n(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Решим задачу для случая $n = 0$:

$$\begin{cases} T''_0(t) - f_0(t) = 0, \\ T_0(0) = \varphi_0, \\ T'_0(0) = \psi_0. \end{cases}$$

Решим сначала соответствующее однородное уравнение:

$$T''_0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0(t) = A_0 t + B_0.$$

Для нахождения решения неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных [4, с. 89; 5, с. 52]. Для этого представим решение неоднородного уравнения в виде $T_0(t) = A_0(t)t + B_0(t)$, где функции $A_0(t)$ и $B_0(t)$ могут быть найдены из следующей системы:

$$\begin{cases} A_0'(t)t + B_0'(t) = 0, \\ A_0'(t) = f_0(t), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_0(t) = \int\limits_0^t f_0(\tau)\,d\tau + C_0, \\ B_0(t) = -\int\limits_0^t \tau f_0(\tau)\,d\tau + D_0. \end{cases}$$

Тогда решение неоднородного уравнения имеет следующий вид:

$$T_0(t) = \left(\int\limits_0^t f_0(\tau)\,d\tau + C_0\right) t - \int\limits_0^t \tau f_0(\tau)\,d\tau + D_0 =$$

$$= C_0 t + D_0 + t\int\limits_0^t f_0(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t \tau f_0(\tau)\,d\tau.$$

Произвольные постоянные C_0 и D_0 находятся из начальных условий задачи:

$$\begin{cases} T_0(0) = D_0 = \varphi_0, \\ T_0'(0) = C_0 = \psi_0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_0(t) = \psi_0 t + \varphi_0 + t\int\limits_0^t f_0(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t \tau f_0(\tau)\,d\tau.$$

Решение задач для $n \in \mathbb{N}$ было получено ранее:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \\ + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \\ = \psi_0 t + \varphi_0 + t \int\limits_0^t f_0(\tau) \, d\tau - \int\limits_0^t \tau f_0(\tau) \, d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \cos \lambda_n x, \\ \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.3.6. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия II–III

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями второго и третьего рода на границах отрезка:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) = 0,\\
&u_x(t,l) + Hu(t,l) = 0.
\end{aligned}
$$

Ввиду выбранных граничных условий можно заключить, что левый конец струны двигается свободно, а правый упруго закреплен.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, который был подробно описан в 5.3.1.

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению с граничными условиями II–III:

$$
\begin{cases}
X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x),\\
X_n'(0) = 0,\\
X_n'(l) + HX_n(l) = 0,
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&X_n(x) = \cos\lambda_n x,\\
&\operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{H}{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N},\\
&\lambda_n \in \left(\frac{\pi(n-1)}{l},\ -\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}\right).
\end{aligned}
$$

Представим решение исходной задачи в виде бесконечного ряда по найденным $X_n(x)$:

$$
u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).
$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$:

$$
f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),
$$

$$
f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l f(t,x) X_n(x)\, dx =
$$

$$= \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{l\lambda_n^2 + lH^2 + H} \int\limits_0^l f(t,x) X_n(x)\, dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx =$$

$$= \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{l\lambda_n^2 + lH^2 + H} \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx =$$

$$= \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{l\lambda_n^2 + lH^2 + H} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия и воспользуемся равенством $X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t) X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты в полученных разложениях в ряды Фурье:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t +$$
$$+ \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \cos \lambda_n x,$$
$$\operatorname{tg} \lambda_n l = \frac{H}{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.3.7. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия III–I

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями третьего и первого рода на границах отрезка:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) - hu(t,0) = 0,\\
&u(t,l) = 0.
\end{aligned}
$$

На левом конце струны задано однородное граничное условие третьего рода, что означает упругое закрепление левого конца. Правый конец жестко закреплен, о чем свидетельствует однородное граничное условие первого рода, заданное на правом конце.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, который был подробно описан в 5.3.1.

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению с граничными условиями III–I:

$$
\begin{cases}
X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x),\\
X_n'(0) - hX_n(0) = 0,\\
X_n(l) = 0,
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&X_n(x) = \frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x,\\
&\operatorname{tg}\lambda_n l = -\frac{\lambda_n}{h},\\
&\lambda_n \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ \frac{\pi n}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Представим решение исходной задачи в виде бесконечного ряда по найденным $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l f(t,x) X_n(x)\, dx =$$

$$= \frac{2\lambda_n^2}{l\lambda_n^2 + lh^2 + h} \int\limits_0^l f(t,x) X_n(x)\, dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx =$$

$$= \frac{2\lambda_n^2}{l\lambda_n^2 + lh^2 + h} \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx =$$

$$= \frac{2\lambda_n^2}{l\lambda_n^2 + lh^2 + h} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия и воспользуемся равенством $X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = a^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = -a^2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t)X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты в полученных разложениях в ряды Фурье:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau)\cos a\lambda_n\tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t +$$
$$+ \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n\tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \times$$

$$\times \left(\frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x \right), \quad \operatorname{tg} \lambda_n l = -\frac{\lambda_n}{h}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.3.8. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия III–II

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями третьего и второго рода на границах отрезка:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) - hu(t,0) = 0,\\
&u_x(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

На левом конце струны задано однородное граничное условие третьего рода, что означает упругое закрепление левого конца. Правый конец двигается свободно, что соответствует однородному граничному условию второго рода.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, который был подробно описан в 5.3.1.

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению с граничными условиями III–II:

$$\begin{cases} X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \\ X_n'(0) - hX_n(0) = 0, \\ X_n'(l) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &X_n(x) = \frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x, \\ &\operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{h}{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ &\lambda_n \in \left(\frac{\pi(n-1)}{l},\ -\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}\right). \end{aligned}$$

Представим решение исходной задачи в виде бесконечного ряда по найденным $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x).$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l f(t,x)X_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{2\lambda_n^2}{l\lambda_n^2 + lh^2 + h}\int\limits_0^l f(t,x)X_n(x)\,dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \varphi(x)X_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{2\lambda_n^2}{l\lambda_n^2 + lh^2 + h}\int\limits_0^l \varphi(x)X_n(x)\,dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx =$$

$$= \frac{2\lambda_n^2}{l\lambda_n^2 + lh^2 + h} \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия и воспользуемся равенством $X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t) X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты в полученных разложениях в ряды Фурье:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \\ + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \cos a\lambda_n \tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin a\lambda_n \tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \times \\ \times \left(\frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x \right), \quad \operatorname{tg} \lambda_n l = \frac{h}{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.3.9. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $= 0$: граничные условия III–III

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями третьего рода на границах отрезка:

$$\begin{aligned} & u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ & u(0,x) = \varphi(x), \\ & u_t(0,x) = \psi(x), \\ & u_x(t,0) - hu(t,0) = 0, \\ & u_x(t,l) + Hu(t,l) = 0. \end{aligned}$$

На концах струны заданы однородные граничные условия третьего рода, что означает упругое закрепление обоих концов.

Воспользуемся алгоритмом решения задачи, содержащей неоднородность в уравнении, который был подробно описан в 5.3.1.

1. Найдем собственные функции и значения задачи Штурма–Лиувилля, соответствующей однородному уравнению с граничными условиями III–III:

$$\begin{cases} X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \\ X_n'(0) - hX_n(0) = 0, \\ X_n'(l) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& X_n(x) = \frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x, \\
& \operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{\lambda(h+H)}{\lambda_n^2 - hH}, \\
\Rightarrow \quad & m \in \mathbb{N}: \ \sqrt{hH} \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi m}{l},\ \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi m}{l}\right), \\
& \lambda_{n\leqslant m} \in \left(-\frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l},\ \frac{\pi n}{l}\right), \\
& \lambda_{n>m} \in \left(\frac{\pi(n-1)}{l},\ \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi(n-1)}{l}\right).
\end{aligned}$$

Представим решение исходной задачи в виде бесконечного ряда по найденным $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x).$$

2. Разложим функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}} \int\limits_0^l f(t,x)X_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{2\lambda_n^2\left(\lambda_n^2+H^2\right)\int\limits_0^l f(t,x)X_n(x)\,dx}{l(\lambda_n^2+h^2)(\lambda_n^2+H^2)+(h+H)(\lambda_n^2+hH)},$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x),$$

$$\varphi_n=\frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}}\int\limits_0^l \varphi(x)X_n(x)\,dx=$$

$$= \frac{2\lambda_n^2\left(\lambda_n^2+H^2\right)\int\limits_0^l \varphi(x)X_n(x)dx}{l(\lambda_n^2+h^2)(\lambda_n^2+H^2)+(h+H)(\lambda_n^2+hH)},$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n X_n(x),$$

$$\psi_n=\frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,l])}}\int\limits_0^l \psi(x)X_n(x)\,dx=$$

$$= \frac{2\lambda_n^2\left(\lambda_n^2+H^2\right)\int\limits_0^l \psi(x)X_n(x)\,dx}{l(\lambda_n^2+h^2)(\lambda_n^2+H^2)+(h+H)(\lambda_n^2+hH)}.$$

3. Подставим все полученные ряды в исходные неоднородные уравнение и начальные условия и воспользуемся равенством $X_n''(x)=-\lambda_n^2X_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)=a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n''(x)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2T_n(t)X_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты в полученных разложениях в ряды Фурье:

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0,$$
$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Решаем задачи для $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) - f_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \\ T_n'(0) = \psi_n, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau)\cos a\lambda_n\tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t +$$
$$+ \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n\tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t.$$

Решением исходной задачи будет сумма произведений всех определенных на шаге 1 функций $X_n(x)$ и определенных на шаге 4 функций $T_n(t)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau)\cos a\lambda_n\tau \, d\tau + \frac{\psi_n}{a\lambda_n} \right) \sin a\lambda_n t + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n\tau \, d\tau + \varphi_n \right) \cos a\lambda_n t \right) \times$$

$$\times \left(\frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x \right), \quad \operatorname{tg} \lambda_n l = \frac{\lambda(h+H)}{\lambda_n^2 - hH}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.4. Общий случай: неоднородные уравнение, начальные и граничные условия

Общий случай подразумевает задачу, состоящую из неоднородного гиперболического уравнения на отрезке, которое описывает вынужденные колебания ограниченной струны, с неоднородными начальными и граничными условиями. Использовать разделение переменных напрямую в таких задачах нельзя, поскольку неоднородные граничные условия не позволяют сформулировать задачу Штурма–Лиувилля. Метод решения таких задач будет рассмотрен в настоящем параграфе для девяти задач, соответствующих различным комбинациям граничных условий на левой и правой границах струны.

5.4.1. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия I–I

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями первого рода:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\
&u(0,x) = \varphi(x), \\
&u_t(0,x) = \psi(x), \\
&u(t,0) = \mu_1(t), \\
&u(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}$$

Поставленная задача описывает колебания ограниченной струны, на которую действует сила плотности $f(t,x)$, с начальным профилем струны $\varphi(x)$ и начальными скоростями точек струны $\psi(x)$. Оба конца двигаются по известным законам: левый конец – по закону $\mu_1(t)$, правый – по закону $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

где $w(t, x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$w(t, 0) = \mu_1(t),$$
$$w(t, l) = \mu_2(t).$$

На практике для поиска функции $w(t, x)$ можно использовать, например, линейную зависимость от x: $w(t, x) = A(t)x + B(t)$. В этом случае коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} w(t, 0) = B(t) = \mu_1(t), \\ w(t, l) = A(t)l + B(t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A(t) = \dfrac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l}, \\ B(t) = \mu_1(t). \end{cases}$$

Следовательно,

$$w(t, x) = \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} x + \mu_1(t).$$

Заметим, что представленный выше способ определения функции $w(t, x)$ является одним из возможных вариантов определения $w(t, x)$; функция $w(t, x)$ может быть любой, удовлетворяющей граничным условиям задачи. Подставим в исходную задачу вместо функции $u(t, x)$ сумму $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, где функция $w(t, x)$ известна. В нашем случае

$$u(t, x) = v(t, x) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} x + \mu_1(t).$$

В результате получим задачу для функции $v(t, x)$

$$v_{tt} + \frac{\mu_2''(t) - \mu_1''(t)}{l} t + \mu_1''(t) = a^2 v_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$
$$v(0, x) + \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)}{l} x + \mu_1(0) = \varphi(x),$$
$$v_t(0, x) + \frac{\mu_2'(0) - \mu_1'(0)}{l} x + \mu_1'(0) = \psi(x),$$
$$v(t, 0) = 0,$$

$v(t,l)=0.$

Обратим внимание, что в задаче для функции $v(t,x)$ граничные условия однородные. Введем обозначения для новых известных функций:

$$\tilde f(t,x)=f(t,x)-\frac{\mu_2''(t)-\mu_1''(t)}{l}x-\mu_1''(t),$$
$$\tilde\varphi(x)=\varphi(x)-\frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)}{l}x-\mu_1(0),$$
$$\tilde\psi(x)=\psi(x)-\frac{\mu_2'(0)-\mu_1'(0)}{l}x-\mu_1'(0).$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\tilde f(t,x),\quad t>0,\quad 0<x<l,$$
$$v(0,x)=\tilde\varphi(x),$$
$$v_t(0,x)=\tilde\psi(x),$$
$$v(t,0)=0,$$
$$v(t,l)=0.$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.1 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x),\quad X_n(x)=\sin\lambda_n x,\quad \lambda_n=\frac{\pi n}{l}.$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)+\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{l}x+\mu_1(t).$$

5.4.2. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия I–II

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями первого и второго рода:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u(t,0) = \mu_1(t),\\
&u_x(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}
$$

Правый конец двигается по известному закону $\mu_1(t)$, на левый конец действует сила $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$
\begin{aligned}
&w(t,0) = \mu_1(t),\\
&w_x(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}
$$

Пусть $w(t,x) = A(t)x + B(t)$. Для определения коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ решим систему уравнений:

$$
\begin{cases}
w(t,0) = B(t) = \mu_1(t),\\
w_x(t,l) = A(t) = \mu_2(t),
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad w(t,x) = \mu_2(t)x + \mu_1(t).
$$

Подставим функцию $u(t,x)$, которая имеет вид

$$u(t,x) = v(t,x) + \mu_2(t)x + \mu_1(t),$$

в исходную задачу. Тогда получим задачу для функции $v(t,x)$

$$v_{tt} + \mu_2''(t)x + \mu_1''(t) = a^2 v_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$
\begin{aligned}
&v(0,x)+\mu_2(0)x+\mu_1(0)=\varphi(x),\\
&v_t(0,x)+\mu_2'(0)x+\mu_1'(0)=\psi(x),\\
&v(t,0)=0,\\
&v_x(t,l)=0
\end{aligned}
$$

с однородными граничными условиями. Обозначим новые известные функции:

$$
\begin{aligned}
&\tilde f(t,x)=f(t,x)-\mu_2''(t)x-\mu_1''(t),\\
&\tilde\varphi(x)=\varphi(x)-\mu_2(0)x-\mu_1(0),\\
&\tilde\psi(x)=\psi(x)-\mu_2'(0)x-\mu_1'(0).
\end{aligned}
$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&v_{tt}=a^2v_{xx}+\tilde f(t,x),\quad t>0,\quad 0<x<l,\\
&v(0,x)=\tilde\varphi(x),\\
&v_t(0,x)=\tilde\psi(x),\\
&v(t,0)=0,\\
&v_x(t,l)=0.
\end{aligned}
$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.2 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$
v(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x),\quad X_n(x)=\sin\lambda_n x,\quad \lambda_n=\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi n}{l}.
$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$
u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)+\mu_2(t)x+\mu_1(t).
$$

5.4.3. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия I–III

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями первого и третьего рода:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u(t,0) = \mu_1(t),\\
&u_x(t,l) + Hu(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}
$$

Правый конец двигается по известному закону $\mu_1(t)$, на упруго закрепленный левый конец действует сила $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$
u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),
$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$
\begin{aligned}
&w(t,0) = \mu_1(t),\\
&w_x(t,l) + Hw(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}
$$

Пусть $w(t,x) = A(t)x + B(t)$. Для определения коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ решим систему уравнений:

$$
\begin{cases}
w(t,0) = B(t) = \mu_1(t),\\
w_x(t,l) + Hw(t,l) = A(t) + H(A(t)l + B(t)) = \mu_2(t),
\end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases}
A(t) = \dfrac{\mu_2(t) - H\mu_1(t)}{1 + lH},\\
B(t) = \mu_1(t),
\end{cases} \quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad w(t,x) = \frac{\mu_2(t) - H\mu_1(t)}{1 + lH} x + \mu_1(t).
$$

Подставим функцию $u(t,x)$, которая имеет вид

$$u(t,x) = v(t,x) + \frac{\mu_2(t) - H\mu_1(t)}{1+lH}x + \mu_1(t),$$

в исходную задачу. Тогда получим задачу для функции $v(t,x)$

$$\begin{aligned}
&v_{tt} + \frac{\mu_2''(t) - H\mu_1''(t)}{1+lH}x + \mu_1''(t) = a^2 v_{xx} + f(t,x),\ t>0,\ 0<x<l,\\
&v(0,x) + \frac{\mu_2(0) - H\mu_1(0)}{1+lH}x + \mu_1(0) = \varphi(x),\\
&v_t(0,x) + \frac{\mu_2'(0) - H\mu_1'(0)}{1+lH}x + \mu_1'(0) = \psi(x),\\
&v(t,0) = 0,\\
&v_x(t,l) + Hv(t,l) = 0
\end{aligned}$$

с однородными граничными условиями. Обозначим новые известные функции:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t,x) &= f(t,x) - \frac{\mu_2''(t) - H\mu_1''(t)}{1+lH}x - \mu_1''(t),\\
\tilde{\varphi}(x) &= \varphi(x) - \frac{\mu_2(0) - H\mu_1(0)}{1+lH}x - \mu_1(0),\\
\tilde{\psi}(x) &= \psi(x) - \frac{\mu_2'(0) - H\mu_1'(0)}{1+lH}x - \mu_1'(0).
\end{aligned}$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(t,x), \quad t>0, \quad 0<x<l,\\
&v(0,x) = \tilde{\varphi}(x),\\
&v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x),\\
&v(t,0) = 0,\\
&v_x(t,l) + Hv(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.3 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x), \quad X_n(x) = \sin\lambda_n x, \quad \operatorname{tg}\lambda_n l = -\frac{\lambda_n}{H}.$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) + \frac{\mu_2(t) - H\mu_1(t)}{1+lH}x + \mu_1(t).$$

5.4.4. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия II–I

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями второго и первого рода:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) = \mu_1(t),\\
&u(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}$$

На левый конец действует сила $\mu_1(t)$, правый конец двигается по закону $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\begin{aligned}
&w_x(t,0) = \mu_1(t),\\
&w(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}$$

Пусть $w(t,x) = A(t)x + B(t)$. Для определения коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ решим систему уравнений:

$$\begin{cases} w_x(t,0) = A(t) = \mu_1(t), \\ w(t,l) = A(t)l + B(t) = \mu_2(t), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A(t) = \mu_1(t), \\ B(t) = \mu_2(t) - l\mu_1(t), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(t,x) = \mu_1(t)x + \mu_2(t) - l\mu_1(t).$$

Подставим функцию $u(t,x)$, которая имеет вид

$$u(t,x) = v(t,x) + \mu_1(t)x + \mu_2(t) - l\mu_1(t),$$

в исходную задачу. Тогда получим задачу для функции $v(t,x)$

$$\begin{aligned} &v_{tt} + \mu_1''(t)x + \mu_2''(t) - l\mu_1''(t) = a^2 v_{xx} + f(t,x), \;\; t > 0, \;\; 0 < x < l, \\ &v(0,x) + \mu_1(0)x + \mu_2(0) - l\mu_1(0) = \varphi(x), \\ &v_t(0,x) + \mu_1'(0)x + \mu_2'(0) - l\mu_1'(0) = \psi(x), \\ &v_x(t,0) = 0, \\ &v(t,l) = 0 \end{aligned}$$

с однородными граничными условиями. Обозначим новые известные функции:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(t,x) = f(t,x) - \mu_1''(t)x - \mu_2''(t) + l\mu_1''(t), \\ &\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu_1(0)x - \mu_2(0) + l\mu_1(0), \\ &\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \mu_1'(0)x - \mu_2'(0) + l\mu_1'(0). \end{aligned}$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ &v(0,x) = \tilde{\varphi}(x), \\ &v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&v_x(t,0) = 0,\\
&v(t,l) = 0.
\end{aligned}
$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.4 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$
v(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad X_n(x) = \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2l} + \frac{\pi n}{l}.
$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$
u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) + \mu_1(t)x + \mu_2(t) - l\mu_1(t).
$$

5.4.5. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия II–II

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями второго рода:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) = \mu_1(t),\\
&u_x(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}
$$

На оба конца струны действуют силы: на левый – $\mu_1(t)$, на правый – $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$
u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),
$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$
w_x(t,0) = \mu_1(t),
$$

$$w_x(t,l) = \mu_2(t).$$

Поскольку производная по переменной x в двух точках может иметь разные значения $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, то линейная зависимость по x не подойдет для представления функции $w(t,x)$. Поэтому возьмем, например, квадратичную зависимость от x: $w(t,x) = A(t)x^2 + B(t)x$. Поскольку два условия позволяют определить только две константы, свободный член в квадратичной зависимости опущен. Для определения коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ решим систему уравнений:

$$\begin{cases} w_x(t,0) = B(t) = \mu_1(t), \\ w_x(t,l) = 2A(t)l + B(t) = \mu_2(t), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A(t) = \dfrac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{2l}, \\ B(t) = \mu_1(t), \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(t,x) = \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{2l}x^2 + \mu_1(t)x.$$

Подставим функцию $u(t,x)$, которая имеет вид

$$u(t,x) = v(t,x) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{2l}x^2 + \mu_1(t)x,$$

в исходную задачу. Тогда получим задачу для функции $v(t,x)$

$$\begin{aligned}
&v_{tt} + \frac{\mu_2''(t) - \mu_1''(t)}{2l}x^2 + \mu_1''(t)x = a^2 v_{xx} + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} + f(t,x), \\
&t > 0, \quad 0 < x < l, \\
&v(0,x) + \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)}{2l}x^2 + \mu_1(0)x = \varphi(x), \\
&v_t(0,x) + \frac{\mu_2'(0) - \mu_1'(0)}{2l}x^2 + \mu_1'(0)x = \psi(x), \\
&v_x(t,0) = 0, \\
&v_x(t,l) = 0
\end{aligned}$$

с однородными граничными условиями. Обозначим новые известные функции:

$$\tilde{f}(t,x) = \frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{l} + f(t,x) - \frac{\mu_2''(t)-\mu_1''(t)}{2l}x^2 - \mu_1''(t)x,$$
$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)}{2l}x^2 - \mu_1(0)x,$$
$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{\mu_2'(0)-\mu_1'(0)}{2l}x^2 - \mu_1'(0)x.$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(t,x), \quad t>0, \quad 0<x<l,\\
&v(0,x) = \tilde{\varphi}(x),\\
&v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x),\\
&v_x(t,0) = 0,\\
&v_x(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.5 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x), \quad X_n(x) = \cos\lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) + \frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{2l}x^2 + \mu_1(t)x.$$

5.4.6. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия II–III

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями второго и третьего рода:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t>0, \quad 0<x<l,$$

$$u(0,x) = \varphi(x),$$
$$u_t(0,x) = \psi(x),$$
$$u_x(t,0) = \mu_1(t),$$
$$u_x(t,l) + Hu(t,l) = \mu_2(t).$$

На левый конец действует сила $\mu_1(t)$, на упруго закрепленный правый конец действует сила $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$w_x(t,0) = \mu_1(t),$$
$$w_x(t,l) + Hw(t,l) = \mu_2(t).$$

Пусть $w(t,x) = A(t)x + B(t)$. Для определения коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ решим систему уравнений:

$$\begin{cases} w_x(t,0) = A(t) = \mu_1(t), \\ w_x(t,l) + Hw(t,l) = A(t) + H(A(t)l + B(t)) = \mu_2(t), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A(t) = \mu_1(t), \\ B(t) = \dfrac{\mu_2(t) - \mu_1(t)(1 + lH)}{H}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(t,x) = \mu_1(t)x + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)(1 + lH)}{H}.$$

Подставим функцию $u(t,x)$, которая имеет вид

$$u(t,x) = v(t,x) + \mu_1(t)x + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)(1 + lH)}{H},$$

в исходную задачу. Тогда получим задачу для функции $v(t,x)$

$$v_{tt} + \mu_1''(t)x + \frac{\mu_2''(t) - \mu_1''(t)(1 + lH)}{H} = a^2 v_{xx} + f(t,x),$$

$$
\begin{aligned}
&t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&v(0,x) + \mu_1(0)x + \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)(1+lH)}{H} = \varphi(x),\\
&v_t(0,x) + \mu_1'(0)x + \frac{\mu_2'(0) - \mu_1'(0)(1+lH)}{H} = \psi(x),\\
&v_x(t,0) = 0,\\
&v_x(t,l) + Hv(t,l) = 0
\end{aligned}
$$

с однородными граничными условиями. Обозначим новые известные функции:

$$
\begin{aligned}
&\tilde f(t,x) = f(t,x) - \mu_1''(t)x - \frac{\mu_2''(t) - \mu_1''(t)(1+lH)}{H},\\
&\tilde\varphi(x) = \varphi(x) - \mu_1(0)x - \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)(1+lH)}{H},\\
&\tilde\psi(x) = \psi(x) - \mu_1'(0)x - \frac{\mu_2'(0) - \mu_1'(0)(1+lH)}{H}.
\end{aligned}
$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&v(0,x) = \tilde\varphi(x),\\
&v_t(0,x) = \tilde\psi(x),\\
&v_x(t,0) = 0,\\
&v_x(t,l) + Hv(t,l) = 0.
\end{aligned}
$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.6 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$
v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x), \quad X_n(x) = \cos\lambda_n x, \quad \operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{H}{\lambda_n}.
$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)+\mu_1(t)x+\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)(1+lH)}{H}.$$

5.4.7. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия III–I

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями второго и третьего рода:

$$\begin{aligned}
&u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x), \quad t>0, \quad 0<x<l,\\
&u(0,x)=\varphi(x),\\
&u_t(0,x)=\psi(x),\\
&u_x(t,0)-hu(t,0)=\mu_1(t),\\
&u(t,l)=\mu_2(t).
\end{aligned}$$

На упруго закрепленный левый конец действует сила $\mu_1(t)$, правый конец двигается по закону $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$u(t,x)=v(t,x)+w(t,x),$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\begin{aligned}
&w_x(t,0)-hw(t,0)=\mu_1(t),\\
&w(t,l)=\mu_2(t).
\end{aligned}$$

Пусть $w(t,x)=A(t)x+B(t)$. Для определения коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ решим систему уравнений:

$$\begin{cases} w_x(t,0)-hw(t,0)=A(t)-hB(t)=\mu_1(t),\\ w(t,l)=A(t)l+B(t)=\mu_2(t), \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A(t) = \dfrac{\mu_1(t) + h\mu_2(t)}{1+lh}, \\ B(t) = \dfrac{\mu_2(t) - l\mu_1(t)}{1+lh}, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(t,x) = \frac{\mu_1(t) + h\mu_2(t)}{1+lh}x + \frac{\mu_2(t) - l\mu_1(t)}{1+lh}.$$

Подставим функцию $u(t,x)$, которая имеет вид

$$u(t,x) = v(t,x) + \frac{\mu_1(t) + h\mu_2(t)}{1+lh}x + \frac{\mu_2(t) - l\mu_1(t)}{1+lh},$$

в исходную задачу. Тогда получим задачу для функции $v(t,x)$

$$\begin{aligned}
&v_{tt} + \frac{\mu_1''(t) + h\mu_2''(t)}{1+lh}x + \frac{\mu_2''(t) - l\mu_1''(t)}{1+lh} = a^2 v_{xx} + f(t,x),\\
&t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&v(0,x) + \frac{\mu_1(0) + h\mu_2(0)}{1+lh}x + \frac{\mu_2(0) - l\mu_1(0)}{1+lh} = \varphi(x),\\
&v_t(0,x) + \frac{\mu_1'(0) + h\mu_2'(0)}{1+lh}x + \frac{\mu_2'(0) - l\mu_1'(0)}{1+lh} = \psi(x),\\
&v_x(t,0) - hv(t,0) = 0,\\
&v(t,l) = 0
\end{aligned}$$

с однородными граничными условиями. Обозначим новые известные функции:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t,x) &= f(t,x) - \frac{\mu_1''(t) + h\mu_2''(t)}{1+lh}x - \frac{\mu_2''(t) - l\mu_1''(t)}{1+lh},\\
\tilde{\varphi}(x) &= \varphi(x) - \frac{\mu_1(0) + h\mu_2(0)}{1+lh}x - \frac{\mu_2(0) - l\mu_1(0)}{1+lh},\\
\tilde{\psi}(x) &= \psi(x) - \frac{\mu_1'(0) + h\mu_2'(0)}{1+lh}x - \frac{\mu_2'(0) - l\mu_1'(0)}{1+lh}.
\end{aligned}$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$
\begin{aligned}
&v(0,x) = \tilde{\varphi}(x),\\
&v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x),\\
&v_x(t,0) - hv(t,0) = 0,\\
&v(t,l) = 0.
\end{aligned}
$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.7 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$
v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),
$$

$$
X_n(x) = \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x + \cos \lambda_n x, \quad \operatorname{tg} \lambda_n l = -\frac{\lambda_n}{h}.
$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$
u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) + \frac{\mu_1(t) + h\mu_2(t)}{1 + lh} x + \frac{\mu_2(t) - l\mu_1(t)}{1 + lh}.
$$

5.4.8. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия III–II

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями третьего и второго рода:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) - hu(t,0) = \mu_1(t),\\
&u_x(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}
$$

На упруго закрепленный левый конец действует сила $\mu_1(t)$, на правый конец действует сила $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\begin{aligned} &w_x(t,0) - hw(t,0) = \mu_1(t),\\ &w_x(t,l) = \mu_2(t). \end{aligned}$$

Пусть $w(t,x) = A(t)x + B(t)$. Для определения коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ решим систему уравнений:

$$\begin{cases} w_x(t,0) - hw(t,0) = A(t) - hB(t) = \mu_1(t),\\ w_x(t,l) = A(t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A(t) = \mu_2(t),\\ B(t) = \dfrac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{h}, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(t,x) = \mu_2(t)x + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{h}.$$

Подставим функцию $u(t,x)$, которая имеет вид

$$u(t,x) = v(t,x) + \mu_2(t)x + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{h},$$

в исходную задачу. Тогда получим задачу для функции $v(t,x)$

$$\begin{aligned} &v_{tt} + \mu_2''(t)x + \frac{\mu_2''(t) - \mu_1''(t)}{h} = a^2 v_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\ &v(0,x) + \mu_2(0)x + \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)}{h} = \varphi(x),\\ &v_t(0,x) + \mu_2'(0)x + \frac{\mu_2'(0) - \mu_1'(0)}{h} = \psi(x),\\ &v_x(t,0) - hv(t,0) = 0,\\ &v_x(t,l) = 0 \end{aligned}$$

с однородными граничными условиями. Обозначим новые известные функции:

$$\tilde{f}(t,x) = f(t,x) - \mu_2''(t)x - \frac{\mu_2''(t) - \mu_1''(t)}{h},$$
$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu_2(0)x - \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)}{h},$$
$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \mu_2'(0)x - \frac{\mu_2'(0) - \mu_1'(0)}{h}.$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&v(0,x) = \tilde{\varphi}(x),\\
&v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x),\\
&v_x(t,0) - hv(t,0) = 0,\\
&v_x(t,l) = 0.
\end{aligned}$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.8 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$
$$X_n(x) = \frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \cos\lambda_n x, \quad \operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{h}{\lambda_n}.$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) + \mu_2(t)x + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{h}.$$

5.4.9. Ур $\neq 0$, НУ $\neq 0$, ГУ $\neq 0$: граничные условия III–III

Рассмотрим неоднородное гиперболическое уравнение на отрезке с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями третьего рода:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u_x(t,0) - hu(t,0) = \mu_1(t),\\
&u_x(t,l) + Hu(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}$$

На упруго закрепленные концы струны действуют силы: на левый конец – сила $\mu_1(t)$, на правый – $\mu_2(t)$.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\begin{aligned}
w_x(t,0) - hw(t,0) = \mu_1(t),\\
w_x(t,l) + Hw(t,l) = \mu_2(t).
\end{aligned}$$

Пусть $w(t,x) = A(t)x + B(t)$. Для определения коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$ решим систему уравнений:

$$\begin{cases}
w_x(t,0) - hw(t,0) = A(t) - hB(t) = \mu_1(t),\\
w_x(t,l) + Hw(t,l) = A(t) + H(A(t)l + B(t)) = \mu_2(t),
\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases}
A(t) = \mu_1(t) + h\dfrac{\mu_2(t) - \mu_1(t)(1+lH)}{lhH + h + H},\\
B(t) = \dfrac{\mu_2(t) - \mu_1(t)(1+lH)}{lhH + h + H},
\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(t,x) = \left(\mu_1(t) + h\frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)(1+lH)}{lhH + h + H}\right)x + \\ + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)(1+lH)}{lhH + h + H}.$$

Подставим функцию $u(t,x)$, которая имеет вид

$$u(t,x)=v(t,x)+\left(\mu_1(t)+h\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)(1+lH)}{lhH+h+H}\right)x+ \\ +\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)(1+lH)}{lhH+h+H},$$

в исходную задачу. Тогда получим задачу для функции $v(t,x)$

$$v_{tt}+\left(\mu_1''(t)+h\frac{\mu_2''(t)-\mu_1''(t)(1+lH)}{lhH+h+H}\right)x+ \\ +\frac{\mu_2''(t)-\mu_1''(t)(1+lH)}{lhH+h+H}=a^2v_{xx}+f(t,x),\quad t>0,\quad 0<x<l,$$

$$v(0,x)+\left(\mu_1(0)+h\frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)(1+lH)}{lhH+h+H}\right)x+ \\ +\frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)(1+lH)}{lhH+h+H}=\varphi(x),$$

$$v_t(0,x)+\left(\mu_1'(0)+h\frac{\mu_2'(0)-\mu_1'(0)(1+lH)}{lhH+h+H}\right)x+ \\ +\frac{\mu_2'(0)-\mu_1'(0)(1+lH)}{lhH+h+H}=\psi(x),$$

$$v_x(t,0)-hv(t,0)=0,$$

$$v_x(t,l)+Hv(t,l)=0$$

с однородными граничными условиями. Обозначим новые известные функции:

$$\tilde f(t,x)=f(t,x)-\left(\mu_1''(t)+h\frac{\mu_2''(t)-\mu_1''(t)(1+lH)}{lhH+h+H}\right)x- \\ -\frac{\mu_2''(t)-\mu_1''(t)(1+lH)}{lhH+h+H},$$

$$\tilde\varphi(x)=\varphi(x)-\left(\mu_1(0)+h\frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)(1+lH)}{lhH+h+H}\right)x-$$

$$
-\frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)(1+lH)}{lhH+h+H},
$$

$$
\tilde{\psi}(x)=\psi(x)-\left(\mu_1'(0)+h\frac{\mu_2'(0)-\mu_1'(0)(1+lH)}{lhH+h+H}\right)x-
$$

$$
-\frac{\mu_2'(0)-\mu_1'(0)(1+lH)}{lhH+h+H}.
$$

Теперь можно записать задачу для функции $v(t,x)$ в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&v_{tt}=a^2v_{xx}+\tilde{f}(t,x), \quad t>0, \quad 0<x<l,\\
&v(0,x)=\tilde{\varphi}(x),\\
&v_t(0,x)=\tilde{\psi}(x),\\
&v_x(t,0)-hv(t,0)=0,\\
&v_x(t,l)+Hv(t,l)=0.
\end{aligned}
$$

Решение этой задачи подробно рассмотрено в 5.3.8 и определяется рядом по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$:

$$
v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x),
$$

$$
X_n(x)=\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x+\cos\lambda_n x, \quad \operatorname{tg}\lambda_n l=\frac{\lambda(h+H)}{\lambda_n^2-hH}.
$$

Таким образом, решение исходной задачи будет иметь следующий вид:

$$
u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)+\left(\mu_1(t)+h\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)(1+lH)}{lhH+h+H}\right)x+
$$

$$
+\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)(1+lH)}{lhH+h+H}.
$$

Примеры решения задач

Пример 1. Решить задачу:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,\\
&u(0, x) = x,\\
&u_t(0, x) = 2x,\\
&u_x(t, 0) = 0,\\
&u_x(t, \pi) = 0.
\end{aligned}$$

Задано однородное гиперболическое уравнение, определенное на отрезке. Начальные условия являются неоднородными, граничные условия II–II являются однородными.

Запишем задачу Штурма–Лиувилля и ее решение для граничных условий II–II:

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x),\\ X'(0) = 0,\\ X'(\pi) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &X_n(x) = \cos \lambda_n x,\\ &\lambda_n = \frac{\pi n}{\pi} = n,\\ &n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Представим решение задачи $u(t, x)$ и начальные условия $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям $X_n(x)$:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

$$\varphi(x) = x = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \quad \psi(x) = 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Найдем коэффициенты φ_n и ψ_n:

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,\,\pi])}} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos \lambda_n x \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin \pi n + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\cdot 0 + \frac{\cos \pi n - \cos 0}{n^2}\right) = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2_{L_2([0,\,\pi])}} \int\limits_0^{\pi} \psi(x)\cos \lambda_n x\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 2x\cos nx\, dx = 2\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\, dx =$$

$$= 2\cdot\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{8}{\pi n^2}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Подставим ряд Фурье для функции $u(t,x)$ в уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = 4\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n''(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = -4\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t)X_n(x).$$

Приравняем коэффициенты:

$$n = 0:\ T_0''(t) = 0, \quad n \neq 0:\ T_n''(t) = -4\lambda_n^2 T_n(t).$$

Подставим ряды Фурье для функций $u(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в начальные условия и приравняем коэффициенты:

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}:\ T_n(0) = \varphi_n,$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \ T_n'(0) = \psi_n.$$

Для нахождения решений $T_n(t)$ необходимо составить и решить задачи для различных значений n. Составим и решим задачу для $n = 0$:

$$n = 0 : \quad \begin{cases} T_0''(t) = 0, \\ T_0(0) = \varphi_0 = 0, \\ T_0'(0) = \psi_0 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T_0(t) \equiv 0.$$

Составим и решим задачу для $n = 2k \neq 0$:

$$n = 2k \neq 0 : \quad \begin{cases} T_n''(t) = -4\lambda_n^2 T_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n = 0, \\ T_n'(0) = \psi_n = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = T_{2k}(t) \equiv 0.$$

Составим и решим задачу для $n = 2k + 1$:

$$n = 2k+1 : \quad \begin{cases} T_n''(t) = -4\lambda_n^2 T_n(t), \\ T_n(0) = \varphi_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}, \\ T_n'(0) = \psi_n = -\dfrac{8}{\pi n^2}. \end{cases}$$

Общее решение уравнения $T_n''(t) = -4\lambda_n^2 T_n(t)$ было подробно выведено в 5.1.1. Общее решение таких уравнений всегда будет состоять из комбинации $\sin a\lambda_n t$ и $\cos a\lambda_n t$, поэтому

$$T_n(t) = A_n \sin 2\lambda_n t + B_n \cos 2\lambda_n t.$$

Подставим полученное общее решение в начальные условия и найдем коэффициенты A_n и B_n:

$$\begin{cases} T_n(0) = B_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}, \\ T_n'(0) = 2\lambda_n A_n = -\dfrac{8}{\pi n^2}, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A_n = -\dfrac{4}{\pi \lambda_n n^2} = -\dfrac{4}{\pi n^3}, \\ B_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = -\frac{4}{\pi n^3}\sin 2nt - \frac{4}{\pi n^2}\cos 2nt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_{2k+1}(t) = -\frac{4}{\pi(2k+1)^3}\sin 2(2k+1)t -$$
$$- \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos 2(2k+1)t.$$

То есть среди функций $T_n(t)$ ненулевыми оказались только нечетные, поэтому решение задачи имеет следующий вид:

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{2k+1}(t)X_{2k+1}(x) =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4\sin 2(2k+1)t}{\pi(2k+1)^3} + \frac{4\cos 2(2k+1)t}{\pi(2k+1)^2}\right)\cos{(2k+1)x}.$$

Пример 2. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} - 3 + 2t\cos 2\pi x - t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0,x) = 3\cos \pi x,$$
$$u_t(0,x) = \cos 2\pi x - 1,$$
$$u_x(t,0) = 0,$$
$$u_x(t,1) = 0.$$

Задача состоит из неоднородного гиперболического уравнения, неоднородных начальных условий и однородных граничных условий II–II.

Запишем задачу Штурма–Лиувилля и ее решение для граничных условий II–II:

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x), \\ X'(0) = 0, \\ X'(\pi) = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} X_n(x) = \cos \lambda_n x, \\ \lambda_n = \dfrac{\pi n}{1} = \pi n, \\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{array}$$

Представим решение задачи $u(t,x)$, неоднородность в уравнении $f(t,x)$ и начальные условия $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям $X_n(x)$:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

$$f(t,x) = -3 - t + 2t\cos 2\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$\varphi(x) = 3\cos \pi x = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

$$\psi(x) = \cos 2\pi x - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n X_n(x).$$

Обратим внимание на то, что функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ уже представлены в виде разложений в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$\begin{aligned}
f(t,x) &= -3 - t + 2t\cos 2\pi x = \\
&= -(3+t)\cos(0\cdot\pi x) + 2t\cos 2\pi x \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad n=0:\ f_0(t) = -(t+3), \quad n=2:\ f_2(t) = 2t, \\
&\qquad\ \ n\neq 0,2:\ f_n(t) = 0, \\
\varphi(x) &= 3\cos\pi x \quad \Rightarrow \quad n=1:\ \varphi_1 = 3, \quad n\neq 1:\ \varphi_n = 0, \\
\psi(x) &= \cos 2\pi x - 1 = \cos 2\pi x - 1\cdot\cos(0\cdot\pi x) \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad n=0:\ \psi_0 = -1, \quad n=2:\ \psi_2 = 1, \\
&\qquad\ \ n\neq 0,2:\ \psi_n = 0.
\end{aligned}$$

Подставим ряд Фурье для функции $u(t,x)$ в уравнение и приравняем коэффициенты:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = 9\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n''(x) - (t+3) + 2t\cos 2\pi x =$$

$$= -9\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t) X_n(x) - (t+3)X_0(x) + 2tX_2(x) \quad \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & n = 0: \; T_0''(t) = -(t+3), \\
& n = 2: \; T_2''(t) = -9\lambda_2^2 T_2(t) + 2t, \\
& n \neq 0, 2: \; T_n''(t) = -9\lambda_n^2 T_n(t).
\end{aligned}
$$

Подставим ряд Фурье для функции $u(t, x)$ в начальные условия и приравняем коэффициенты:

$$
u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = 3X_1(x) \quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad n = 1: \; T_1(0) = 3, \quad n \neq 1: \; T_n(0) = 0,
$$

$$
u_t(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = X_2(x) - X_0(x) \quad \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & n = 0: \; T_0'(0) = -1, \quad n = 2: \; T_2'(0) = 1, \\
& n \neq 0, 2: \; T_n'(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, выделяются три особых случая для $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$. Рассмотрим каждый из них и все остальные. Начнем с $n = 0$:

$$
n = 0: \quad \begin{cases} T_0''(t) = -(t+3), \\ T_0(0) = 0, \\ T_0'(0) = -1. \end{cases}
$$

Найдем общее решение уравнения и подставим его в начальные условия:

$$
T_0''(t) = -(t+3) \quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad T_0'(t) = -\int (t+3)\, dt = -\frac{t^2}{2} - 3t + C_0 \quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad T_0(t) = -\int \left(\frac{t^2}{2} + 3t - C_0 \right) dt = -\frac{t^3}{6} - \frac{3t^2}{2} + C_0 t + D_0 \quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} T_0(0) = D_0 = 0, \\ T_0'(0) = C_0 = -1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T_0(t) = -\frac{t^3}{6} - \frac{3t^2}{2} - t.
$$

Составим и решим задачу для $T_1(t)$:

$$n = 1: \quad \begin{cases} T_1''(t) = -9\lambda_1^2 T_1(t), \\ T_1(0) = 3, \\ T_1'(0) = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_1(t) = A_1 \sin 3\lambda_1 t + B_1 \cos 3\lambda_1 t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} T_1(0) = B_1 = 3, \\ T_1'(0) = 3\lambda_1 A_1 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 = 0, \\ B_1 = 3, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_1(t) = 3\cos 3\pi t.$$

Составим и решим задачу для $T_2(t)$:

$$n = 2: \quad \begin{cases} T_2''(t) = -9\lambda_2^2 T_2(t) + 2t, \\ T_2(0) = 0, \\ T_2'(0) = 1, \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_2(t) = A_2(t) \sin 3\lambda_2 t + B_2(t) \cos 3\lambda_2 t, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A_2'(t) \sin 3\lambda_2 t + B_2'(t) \cos 3\lambda_2 t = 0, \\ A_2'(t) 3\lambda_2 \cos 3\lambda_2 t - B_2'(t) 3\lambda_2 \sin 3\lambda_2 t = 2t, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_2'(t) = \frac{2t}{3\lambda_2} \cos 3\lambda_2 t, \quad B_2'(t) = -\frac{2t}{3\lambda_2} \sin 3\lambda_2 t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_2(t) = \frac{2}{3\lambda_2} \int t \cos 3\lambda_2 t \, dt =$$

$$= \frac{2t}{9\lambda_2^2} \sin 3\lambda_2 t - \frac{2}{9\lambda_2^2} \int \sin 3\lambda_2 t \, dt =$$

$$= \frac{2t}{9\lambda_2^2} \sin 3\lambda_2 t + \frac{2}{27\lambda_2^3} \cos 3\lambda_2 t + C_2,$$

$$B_2(t) = -\frac{2}{3\lambda_2} \int t \sin 3\lambda_2 t \, dt =$$

$$= \frac{2t}{9\lambda_2^2} \cos 3\lambda_2 t - \frac{2}{9\lambda_2^2} \int \cos 3\lambda_2 t \, dt =$$

$$= \frac{2t}{9\lambda_2^2} \cos 3\lambda_2 t - \frac{2}{27\lambda_2^3} \sin 3\lambda_2 t + D_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_2(t) = \frac{2t}{9\lambda_2^2} + C_2 \sin 3\lambda_2 t + D_2 \cos 3\lambda_2 t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} T_2(0) = D_2 = 0, \\ T_2'(0) = \dfrac{2}{9\lambda_2^2} + 3\lambda_2 C_2 = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{3\lambda_2} - \dfrac{2}{27\lambda_2^3}, \\ D_2 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_2(t) = \frac{2t}{9\lambda_2^2} + \left(\frac{1}{3\lambda_2} - \frac{2}{27\lambda_2^3} \right) \sin 3\lambda_2 t =$$

$$= \frac{t}{18\pi^2} + \left(\frac{1}{6\pi} - \frac{1}{108\pi^3} \right) \sin 6\pi t.$$

Рассмотрим все остальные случаи:

$$n \neq 0, 1, 2: \quad \begin{cases} T_n''(t) = -9\lambda_n^2 T_n(t), \\ T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T_n(t) \equiv 0.$$

Запишем решение задачи:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = T_0(t) X_0(x) + T_1(t) X_1(x) +$$

$$+ T_2(t) X_2(x) = -\frac{t^3}{6} - \frac{3t^2}{2} - t + 3 \cos 3\pi t \cos \pi x +$$

$$+ \left(\frac{t}{18\pi^2} + \left(\frac{1}{6\pi} - \frac{1}{108\pi^3} \right) \sin 6\pi t \right) \cos 2\pi x.$$

Пример 3. Решить задачу:

$$u_{tt} = 16 u_{xx} + 2x - 5 \sin \frac{3\pi x}{2} + t \sin \frac{\pi x}{2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0,x) = 2 \sin \frac{3\pi x}{2} - \sin \frac{5\pi x}{2},$$

$$u_t(0,x) = -3 + 2 \sin \frac{5\pi x}{2},$$

$$u(t,0) = -3t,$$

$$u_x(t,1) = t^2.$$

Задача состоит из неоднородного гиперболического уравнения, неоднородных начальных условий и неоднородных граничных условий I–II.

Представим решение в виде суммы двух функций:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

где $w(t,x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\begin{aligned} w(t,0) &= -3t, \\ w_x(t,1) &= t^2. \end{aligned}$$

Будем искать функцию $w(t,x)$ в следующем виде: $w(t,x) = A(t)x + B(t)$. Коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ найдем из условий:

$$\begin{cases} w(t,0) = B(t) = -3t, \\ w_x(t,1) = A(t) = t^2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad w(t,x) = t^2x - 3t.$$

Тогда функция $u(t,x)$ имеет вид

$$u(t,x) = v(t,x) + t^2x - 3t.$$

Подставим функцию $u(t,x)$ в условия задачи, получим новую задачу для функции $v(t,x)$:

$$\begin{aligned} &v_{tt} + 2x = 16v_{xx} + 2x - 5\sin\frac{3\pi x}{2} + t\sin\frac{\pi x}{2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ &v(0,x) = 2\sin\frac{3\pi x}{2} - \sin\frac{5\pi x}{2}, \\ &v_t(0,x) - 3 = -3 + 2\sin\frac{5\pi x}{2}, \\ &v(t,0) = 0, \\ &v_x(t,1) = 0. \end{aligned}$$

В результате задача для функции $v(t,x)$ принимает вид

$$v_{tt} = 16v_{xx} - 5\sin\frac{3\pi x}{2} + t\sin\frac{\pi x}{2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$
\begin{aligned}
&v(0,x) = 2\sin\frac{3\pi x}{2} - \sin\frac{5\pi x}{2},\\
&v_t(0,x) = 2\sin\frac{5\pi x}{2},\\
&v(t,0) = 0,\\
&v_x(t,1) = 0.
\end{aligned}
$$

Задача для функции $v(t,x)$ содержит неоднородное гиперболическое уравнение, неоднородные начальные условия и однородные граничные условия I–II. Запишем задачу Штурма–Лиувилля и ее решение для граничных условий I–II:

$$
\begin{cases}
X''(x) = -\lambda^2 X(x),\\
X(0) = 0,\\
X'(1) = 0,
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&X_n(x) = \sin\lambda_n x,\\
&\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right),\\
&n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.
\end{aligned}
$$

Представим решение задачи $u(t,x)$ в виде ряда по собственным функциям $X_n(x)$:

$$
v(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x).
$$

Обратим внимание на то, что функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ уже представлены в виде разложений в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$
\begin{aligned}
&f(t,x) = -5\sin\frac{3\pi x}{2} + t\sin\frac{\pi x}{2} = tX_0(x) - 5X_1(x),\\
&\varphi(x) = 2\sin\frac{3\pi x}{2} - \sin\frac{5\pi x}{2} = 2X_1(x) - X_2(x),\\
&\psi(x) = 2\sin\frac{5\pi x}{2} = 2X_2(x).
\end{aligned}
$$

Подставим ряд Фурье для функции $v(t,x)$ в уравнение и приравняем коэффициенты:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = 16\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n''(x) - 5\sin\frac{3\pi x}{2} + t\sin\frac{\pi x}{2} =
$$

$$= -16\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2 T_n(t)X_n(x) + tX_0(x) - 5X_1(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &n=0:\ T_0''(t) = -16\lambda_0^2 T_0(t) + t,\\ &n=1:\ T_1''(t) = -16\lambda_1^2 T_1(t) - 5,\\ &n\neq 0,1:\ T_n''(t) = -16\lambda_n^2 T_n(t). \end{aligned}$$

Подставим ряд Фурье для функции $v(t,x)$ в начальные условия и приравняем коэффициенты:

$$v(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = 2X_1(x) - X_2(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &n=1:\ T_1(0) = 2, \quad n=2:\ T_2(0) = -1,\\ &n\neq 1,2:\ T_n(0) = 0, \end{aligned}$$

$$v_t(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = 2X_2(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n=2:\ T_2'(0) = 2, \quad n\neq 2:\ T_n'(0) = 0.$$

Таким образом, выделяются три особых случая для $n=0$, $n=1$, $n=2$, которые необходимо рассмотреть, и все остальные случаи. Начнем с $n=0$:

$$n=0: \quad \begin{cases} T_0''(t) = -16\lambda_0^2 T_0(t) + t,\\ T_0(0) = 0,\\ T_0'(0) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_0(t) = A_0(t)\sin 4\lambda_0 t + B_0(t)\cos 4\lambda_0 t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A_0'(t)\sin 4\lambda_0 t + B_0'(t)\cos 4\lambda_0 t = 0,\\ A_0'(t)4\lambda_0\cos 4\lambda_0 t - B_0'(t)4\lambda_0\sin 4\lambda_0 t = t, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_0'(t) = \frac{t}{4\lambda_0}\cos 4\lambda_0 t, \quad B_0'(t) = -\frac{t}{4\lambda_0}\sin 4\lambda_0 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_0(t) = \frac{1}{4\lambda_0}\int t\cos 4\lambda_0 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\lambda_0}\left(\frac{t}{4\lambda_0}\sin 4\lambda_0 t - \frac{1}{4\lambda_0}\int \sin 4\lambda_0 t\,dt\right) =$$

$$= \frac{t}{16\lambda_0^2}\sin 4\lambda_0 t + \frac{1}{16\lambda_0^2}\cos 4\lambda_0 t + C_0,$$

$$B_0(t) = -\frac{1}{4\lambda_0}\int t\sin 4\lambda_0 t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4\lambda_0}\left(-\frac{t}{4\lambda_0}\cos 4\lambda_0 t + \frac{1}{4\lambda_0}\int \cos 4\lambda_0 t\,dt\right) =$$

$$= \frac{t}{16\lambda_0^2}\cos 4\lambda_0 t - \frac{1}{16\lambda_0^2}\sin 4\lambda_0 t + D_0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_0(t) = \frac{t}{16\lambda_0^2} + C_0\sin 4\lambda_0 t + D_0\cos 4\lambda_0 t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} T_0(0) = D_0 = 0, \\ T_0'(0) = \dfrac{1}{16\lambda_0^2} + 4\lambda_0 C_0 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_0 = -\dfrac{1}{8\pi^3}, \\ D_0 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_0(t) = \frac{t}{4\pi^2} - \frac{1}{8\pi^3}\sin 2\pi t.$$

Составим и решим задачу для $T_1(t)$:

$$n = 1: \quad \begin{cases} T_1''(t) = -16\lambda_1^2 T_1(t) - 5, \\ T_1(0) = 2, \\ T_1'(0) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_1(t) = A_1(t)\sin 4\lambda_1 t + B_1(t)\cos 4\lambda_1 t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A_1'(t)\sin 4\lambda_1 t + B_1'(t)\cos 4\lambda_1 t = 0, \\ A_1'(t)4\lambda_1\cos 4\lambda_1 t - B_1'(t)4\lambda_1\sin 4\lambda_1 t = -5, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_1'(t) = -\frac{5}{4\lambda_1}\cos 4\lambda_1 t, \quad B_1'(t) = \frac{5}{4\lambda_1}\sin 4\lambda_1 t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_1(t) = -\frac{5}{4\lambda_1}\int \cos 4\lambda_1 t\,dt = -\frac{5}{16\lambda_1^2}\sin 4\lambda_1 t + C_1,$$

$$B_1(t) = \frac{5}{4\lambda_1}\int \sin 4\lambda_1 t\,dt = -\frac{5}{16\lambda_1^2}\cos 4\lambda_1 t + D_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_1(t) = -\frac{5}{16\lambda_1^2} + C_1 \sin 4\lambda_1 t + D_1 \cos 4\lambda_1 t \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T_1(0) = -\dfrac{5}{16\lambda_1^2} + D_1 = 2, \\ T_1'(0) = 4\lambda_1 C_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ D_1 = 2 + \dfrac{5}{36\pi^2}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_1(t) = -\frac{5}{36\pi^2} + \left(2 + \frac{5}{36\pi^2}\right)\cos 6\pi t.$$

Составим и решим задачу для $T_2(t)$:

$$n = 2: \quad \begin{cases} T_2''(t) = -16\lambda_2^2 T_2(t), \\ T_2(0) = -1, \\ T_2'(0) = 2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_2(t) = A_2 \sin 4\lambda_2 t + B_2 \cos 4\lambda_2 t \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T_2(0) = B_2 = -1, \\ T_2'(0) = 4\lambda_2 A_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} A_2 = \dfrac{1}{5\pi}, \\ B_2 = -1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_2(t) = \frac{1}{5\pi}\sin 10\pi t - \cos 10\pi t.$$

Рассмотрим все остальные случаи:

$$n \neq 0, 1, 2: \quad \begin{cases} T_n''(t) = -16\lambda_n^2 T_n(t), \\ T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad T_n(t) \equiv 0.$$

Запишем решение задачи для функции $v(t,x)$:

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = T_0(t)X_0(x) + T_1(t)X_1(x) +$$

$$+\ T_2(t)X_2(x) = \left(\frac{t}{4\pi^2} - \frac{1}{8\pi^3}\sin 2\pi t\right)\sin\frac{\pi x}{2} +$$
$$+\left(\left(2+\frac{5}{36\pi^2}\right)\cos 6\pi t - \frac{5}{36\pi^2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2} +$$
$$+\left(\frac{1}{5\pi}\sin 10\pi t - \cos 10\pi t\right)\sin\frac{5\pi x}{2}.$$

Запишем решение исходной задачи:

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) =$$
$$= \left(\frac{t}{4\pi^2} - \frac{1}{8\pi^3}\sin 2\pi t\right)\sin\frac{\pi x}{2} +$$
$$+\left(\left(2+\frac{5}{36\pi^2}\right)\cos 6\pi t - \frac{5}{36\pi^2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2} +$$
$$+\left(\frac{1}{5\pi}\sin 10\pi t - \cos 10\pi t\right)\sin\frac{5\pi x}{2} + t^2x - 3t.$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<0.5,$$
$$u(0,x) = \sin 9\pi x,$$
$$u_t(0,x) = 0,$$
$$u(t,0) = 0,$$
$$u_x(t,0.5) = 0.$$

5.2. Решить задачу:

$$u_{tt} = 49u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<2.5,$$
$$u(0,x) = 0,$$
$$u_t(0,x) = 49\pi\cos 7\pi x,$$
$$u_x(t,0) = 0,$$
$$u(t,2.5) = 0.$$

5.3. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0, x) = 31 \sin 2\pi x + 2 \sin 5\pi x,$$
$$u_t(0, x) = \sin \pi x + 12 \sin 3\pi x + 2 \sin 5\pi x,$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u(t, 1) = 0.$$

5.4. Решить задачу:

$$u_{tt} = 36u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0, x) = 1 + 2 \cos 4x,$$
$$u_t(0, x) = \cos 4x + 6 \cos 5x,$$
$$u_x(t, 0) = 0,$$
$$u_x(t, \pi) = 0.$$

5.5. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2.5,$$
$$u(0, x) = 6 \sin 3\pi x + \sin 15\pi x,$$
$$u_t(0, x) = \sin 7\pi x,$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u_x(t, 2.5) = 0.$$

5.6. Решить задачу:

$$u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} + 3 \sin 2t \sin 2x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = 0,$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u(t, \pi) = 0.$$

5.7. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + 2\sin^2 x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = 0,$$
$$u_t(0,x) = \sin x \sin 5x,$$
$$u_x(t,0) = 0,$$
$$u_x(t,\pi) = 0.$$

5.8. Решить задачу:

$$u_{tt} = 49u_{xx} + 60, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = 2\cos 40x,$$
$$u_t(0,x) = 0,$$
$$u_x(t,0) = 0,$$
$$u_x(t,\pi) = 0.$$

5.9. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2,$$
$$u(0,x) = 31\sin 2\pi x + 3x - 1,$$
$$u_t(0,x) = 0,$$
$$u(t,0) = -1,$$
$$u(t,2) = 5.$$

5.10. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 3,$$
$$u(0,x) = 9 - 4x,$$
$$u_t(0,x) = 10\pi \sin \frac{5\pi x}{3},$$
$$u(t,0) = 9,$$
$$u(t,3) = -3.$$

5.11. Решить задачу:

$$u_{tt} = \frac{1}{49}u_{xx} + 37e^{-6t}\sin 7x + 30t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = \sin x + \sin 5x,$$
$$u_t(0,x) = 0,$$
$$u(t,0) = 5t^3,$$
$$u(t,\pi) = 5t^3.$$

5.12. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = 5\sin\frac{7x}{2} + 5 + 5x,$$
$$u_t(0,x) = 10\sin\frac{5x}{2},$$
$$u(t,0) = 5,$$
$$u_x(t,\pi) = 5.$$

5.13. Решить задачу:

$$u_{tt} = \frac{1}{36}u_{xx} + 2\cos\frac{7x}{2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = 1,$$
$$u_t(0,x) = \frac{1}{2}\cos\frac{3x}{2},$$
$$u_x(t,0) = 0,$$
$$u(t,\pi) = 1.$$

5.14. Решить задачу:

$$u_{tt} = 64u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0,x) = 0,$$
$$u_t(0,x) = 24\pi\cos 3\pi x,$$
$$u_x(t,0) = 0,$$
$$u_x(t,1) = 0.$$

5.15. Решить задачу:

$$u_{tt} = \frac{1}{81}u_{xx} + 15\cos 4t \sin 9x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = 0,$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u(t, \pi) = 0.$$

5.16. Решить задачу:

$$u_{tt} = 16u_{xx} + \sin 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = -2\cos\frac{x}{2},$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u(t, \pi) = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

5.17. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 3t\sin\frac{7\pi x}{2l}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = 2\sin\frac{\pi x}{2l} + 7\sin\frac{5\pi x}{2l},$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u_x(t, l) = 0.$$

5.18. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + 65e^{-8t}\sin x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = 0,$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u(t, \pi) = 0.$$

5.19. Решить задачу:

$$u_{tt} = 81u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 5,$$
$$u(0, x) = 2\cos \pi x,$$
$$u_t(0, x) = 0,$$
$$u_x(t, 0) = 0,$$
$$u_x(t, 5) = 0.$$

5.20. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + 16\cos 8t \sin 8x, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2\pi,$$
$$u(0, x) = 0,$$
$$u_t(0, x) = 0,$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u(t, 2\pi) = 0.$$

5.21. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0, x) = \sin 5x,$$
$$u_t(0, x) = \sin 3x - 2\sin 5x,$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u(t, \pi) = 0.$$

5.22. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} - 2\sin 3\pi x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{1}{2},$$
$$u(0, x) = 3\sin \pi x - \sin 3\pi x,$$
$$u_t(0, x) = \sin 3\pi x + \sin 5\pi x,$$
$$u(t, 0) = 0,$$
$$u_x\left(t, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

5.23. Решить задачу:

$$u_{tt} = 16u_{xx} + 3\sin 2\pi x, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0,x) = \sin 2\pi x + \sin 3\pi x,$$
$$u_t(0,x) = 5\sin \pi x - 2\sin 3\pi x,$$
$$u(t,0) = 0,$$
$$u(t,1) = 0.$$

5.24. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 2\cos x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$
$$u(0,x) = 3\cos 3x + \cos 7x,$$
$$u_t(0,x) = 5\cos x - 2\cos 3x,$$
$$u_x(t,0) = 0,$$
$$u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

5.25. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0,x) = -5\cos \pi x + x^2 + x,$$
$$u_t(0,x) = 3 + 2\cos \pi x,$$
$$u_x(t,0) = 1,$$
$$u_x(t,1) = 3.$$

5.26. Решить задачу:

$$u_{tt} = 16u_{xx} - 3\sin \frac{x}{2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = 2\sin \frac{x}{2} - 4\sin \frac{5x}{2},$$
$$u_t(0,x) = \sin \frac{5x}{2} + 2x + 1,$$
$$u(t,0) = t,$$
$$u_x(t,\pi) = 2t.$$

5.27. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} - 2\cos x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$
$$u(0,x) = 3\cos 3x,$$
$$u_t(0,x) = \cos x - 4\cos 3x - 2x + 3\pi,$$
$$u_x(t,0) = -2t,$$
$$u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi t.$$

5.28. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} + 4\sin 3x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = 5\sin x - 3\sin 3x,$$
$$u_t(0,x) = \frac{2}{\pi}x + 3 - \sin 2x + 2\sin 3x,$$
$$u(t,0) = 3t,$$
$$u(t,\pi) = 5t.$$

5.29. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 2\sin\frac{\pi x}{2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0,x) = 3\sin\frac{\pi x}{2} - \sin\frac{5\pi x}{2} - 1,$$
$$u_t(0,x) = \sin\frac{3\pi x}{2} - \sin\frac{\pi x}{2} + 2x,$$
$$u(t,0) = -1,$$
$$u_x(t,1) = 2t.$$

5.30. Решить задачу:

$$u_{tt} = 16u_{xx} + 5\cos 5\pi x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{1}{2},$$
$$u(0,x) = 3\cos \pi x - 2\cos 5\pi x,$$
$$u_t(0,x) = 1 - x - \cos 5\pi x + \cos 3\pi x,$$
$$u_x(t,0) = -t,$$
$$u\left(t, \frac{1}{2}\right) = \frac{t}{2}.$$

5.31. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 2\cos 2x - 16t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = \cos x + 3\cos 2x - 3x,$$
$$u_t(0,x) = 2 - \cos 2x + 2x^2,$$
$$u_x(t,0) = -3,$$
$$u_x(t,\pi) = 4t\pi - 3.$$

5.32. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} - 2\sin\frac{\pi x}{4}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2,$$
$$u(0,x) = \sin\frac{\pi x}{4} - 4 + 3\sin\frac{3\pi x}{4},$$
$$u_t(0,x) = x + 3\sin\frac{\pi x}{4} - 4\sin\frac{3\pi x}{4},$$
$$u(t,0) = -4,$$
$$u_x(t,2) = t.$$

5.33. Решить задачу:

$$u_{tt} = 9u_{xx} - 2\sin 5x + \sin x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$
$$u(0,x) = 3\sin 5x - 2(\sin 3x + 1),$$
$$u_t(0,x) = 5\sin 3x - 3\sin x + 3x,$$
$$u(t,0) = -2,$$
$$u_x\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 3t.$$

5.34. Решить задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 3 - 24t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$u(0,x) = \cos x + 2x,$$
$$u_t(0,x) = 3\left(\cos x + x^2\right),$$
$$u_x(t,0) = 2,$$
$$u_x(t,\pi) = 6t\pi + 2.$$

6. Численные методы решения уравнений гиперболического типа

Когда дифференциальные уравнения в частных производных не удается решить аналитическими методами, часто используют численные методы. Например, численные методы применяются для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве примеров численных методов будут рассмотрены явный и неявный сеточные методы конечных разностей, позволяющие численно решать дифференциальные уравнения гиперболического типа на отрезке:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,\\
&u(0,x) = \varphi(x),\\
&u_t(0,x) = \psi(x),\\
&u(t,0) = g(t),\\
&u(t,l) = k(t).
\end{aligned}$$

Применение метода конечных разностей для решения гиперболических задач на отрезке состоит в замене поставленной задачи, которая является непрерывной, на задачу, являющуюся ее дискретным аналогом или разностной схемой.

Сначала необходимо построить сетку узловых значений искомой функции в области решения. После этого можно приступать к построению конечно-разностных уравнений, которые будут описывать функциональные связи между узлами построенной сетки. Затем необходимо решить систему, состоящую из конечно-разностных уравнений.

Исходными данными для построения сетки в области решения являются начальные и граничные условия поставленной задачи. Сетки бывают неравномерными и равномерными. В представленных ниже конечно-разностных схемах будут использоваться равномерные сетки, для которых необходимо выбрать шаг сетки как по временной переменной t, так и по пространственной переменной x.

6.1. Явная конечно-разностная схема для решения гиперболического уравнения на отрезке

Для начала рассмотрим явную конечно-разностную схему решения гиперболического уравнения на отрезке. Обозначим шаг по времени как h_t. Пусть разбиение отрезка $[0, l]$ по пространственной переменной будет иметь n узлов с шагом h_x. Тогда разностная сетка будет иметь следующий вид:

$$t_i = t_0 + ih_t = 0 + ih_t = ih_t,\ i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$x_j = x_0 + jh_x = 0 + jh_x = jh_x,\ j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},\ h_x = \frac{l}{n}.$$

Разностная сетка показана на рис. 12. Закрашенные точки символизируют узлы сетки, значения функции $u(t, x)$ в которых известны из начальных и граничных условий. Незакрашенные точки – это узлы, значения функции $u(t, x)$ в которых требуется найти. Приближенное значение искомой функции $u(t, x)$ в узлах построенной сетки обозначим $u(t_i, x_j) \approx u_{ij}$.

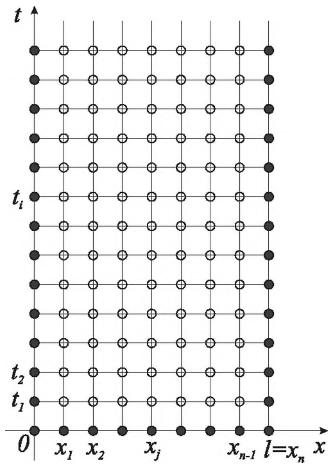

Рис. 12. Сетка для метода конечных разностей для решения гиперболической задачи на отрезке

Дискретные аналоги известных функций $f(t, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$,

$g(t)$ и $k(t)$ могут быть записаны (обозначены) следующим образом:

$$f(t_i, x_j) = f_{ij},\ \varphi(x_j) = \varphi_j,\ \psi(x_j) = \psi_j,\ g(t_i) = g_i,\ k(t_i) = k_i.$$

Заменим первые и вторые производные функции $u(t, x)$ по временной и пространственной переменным с помощью формул численного дифференцирования по трем узлам на середину:

$$\begin{aligned}
u_t(t_i, x_j) &= \frac{\partial}{\partial t} u(t_i, x_j) \approx \frac{u(t_i + h_t, x_j) - u(t_i - h_t, x_j)}{2h_t} = \\
&= \frac{u(t_{i+1}, x_j) - u(t_{i-1}, x_j)}{2h_t} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_t}, \\
u_{tt}(t_i, x_j) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t_i, x_j) \approx \\
&\approx \frac{u(t_i + h_t, x_j) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i - h_t, x_j)}{h_t^2} = \\
&= \frac{u(t_{i+1}, x_j) - 2u(t_i, x_j) + u(t_{i-1}, x_j)}{h_t^2} = \\
&= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_t^2}, \\
u_{xx}(t_i, x_j) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t_i, x_j) \approx \\
&\approx \frac{u(t_i, x_j + h_x) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i, x_j - h_x)}{h_x^2} = \\
&= \frac{u(t_i, x_{j+1}) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j-1})}{h_x^2} = \\
&= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_x^2}.
\end{aligned}$$

Запишем заданное гиперболическое уравнение в узле сетки (t_i, x_j) в терминах формул численного дифференцирования:

$$u_{tt}(t_i, x_j) = a^2 u_{xx}(t_i, x_j) + f(t_i, x_j) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_t^2} = a^2 \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_x^2} + f_{ij}.$$

Далее выделим значение искомой функции в узле (t_{i+1}, x_j):

$$
\begin{aligned}
u_{i+1,j} = \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{i,j+1} - 2\left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{ij} + \\
+ \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{i,j-1} + 2u_{ij} - u_{i-1,j} + h_t^2 f_{ij} = \\
= \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{i,j+1} + 2\left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right) u_{ij} + \\
+ \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + h_t^2 f_{ij}.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Таким образом, для нахождения значения искомой функции в узле (t_{i+1}, x_j) можно использовать шаблон, представленный на рис. 13. На рисунке окрашены узлы сетки, в которых значения функции должны быть известны, и по ним можно найти значение функции в узле, который не окрашен. То есть для нахождения значения $u_{i+1,j}$ согласно формуле (6.1) необходимо знать значения $u_{i,j+1}$, u_{ij}, $u_{i,j-1}$ и $u_{i-1,j}$.

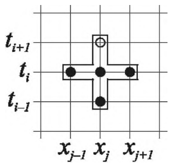

Рис. 13. Шаблон для явного метода конечных разностей для решения гиперболической задачи на отрезке

Запишем начальные условия задачи с помощью формул численного дифференцирования, приведенных выше:

$$
u(0, x_j) = \varphi(x_j) \quad \Rightarrow \quad u(t_0, x_j) = \varphi(x_j) \quad \Rightarrow \quad u_{0,j} = \varphi_j, \tag{6.2}
$$

$$
u_t(0, x_j) = \psi(x_j) \quad \Rightarrow \quad u_t(t_0, x_j) = \psi(x_j) \quad \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \quad \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h_t} = \psi_j \quad \Rightarrow \quad u_{1,j} = u_{-1,j} + 2h_t\psi_j. \tag{6.3}
$$

Приведенную на рис. 12 разностную сетку можно рассматривать как набор горизонтальных слоев. Номер каждого слоя можно определять индексом i, который отвечает за нумерацию временной переменной. Видно, что нулевой слой (6.2) полностью найден из первого начального условия. Первый слой (6.3) можно найти из второго начального условия, однако в записи используется фиктивный узел $u_{-1,j}$. Найдем этот фиктивный узел, записав формулу (6.1) для $i = 0$:

$$u_{1,j} = \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{0,j+1} + 2\left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right) u_{0,j} + \\ + \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{0,j-1} - u_{-1,j} + h_t^2 f_{0,j} \quad \Rightarrow$$

$$u_{-1,j} = \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{0,j+1} + 2\left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right) u_{0,j} + \\ + \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{0,j-1} - u_{1,j} + h_t^2 f_{0,j} = \\ = \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j+1} + 2\left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right) \varphi_j + \\ + \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j-1} - u_{1,j} + h_t^2 f_{0,j}.$$

Найденное значение для фиктивного узла $u_{-1,j}$ можно подставить в формулу (6.3):

$$u_{1,j} = \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j+1} + 2\left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right) \varphi_j + \\ + \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j-1} - u_{1,j} + h_t^2 f_{0,j} + 2h_t\psi_j \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2u_{1,j} = \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j+1} + 2\left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right) \varphi_j + \\ + \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j-1} + h_t^2 f_{0,j} + 2h_t\psi_j \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_{1,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j+1} + \left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right)\varphi_j + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j-1} + \frac{h_t^2}{2} f_{0,j} + h_t\psi_j.$$

Таким образом, первый слой сетки также полностью найден.

Запишем граничные условия задачи в узлах сетки:

$$u(t_i, 0) = g(t_i) \quad \Rightarrow \quad u(t_i, x_0) = g(t_i) \quad \Rightarrow \quad u_{i,0} = g_i,$$
$$u(t_i, l) = k(t_i) \quad \Rightarrow \quad u(t_i, x_n) = k(t_i) \quad \Rightarrow \quad u_{i,n} = k_i.$$

На рис. 14 представлена обновленная сетка. На данный момент известны значения искомой функции в закрашенных узлах, а именно в нулевом и первом слоях, а также в граничных точках. Для нахождения значений функции в оставшихся незакрашенных узлах можно использовать шаблон, изображенный на рис. 13, наложение которого продемонстрировано на данном рисунке. Таким образом, необходимо последовательно искать значения функции на третьем, четвертом и последующих слоях. Тогда значения искомой функции во всех узлах сетки могут быть найдены.

Запишем этот алгоритм с использованием формул. Входные данные задачи:

$$u_{0,j} = \varphi_j, \quad u_{i,0} = g_i, \quad u_{i,n} = k_i.$$

Нахождение первого слоя сетки:

$$u_{1,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j+1} + \left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right)\varphi_j + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \varphi_{j-1} + \frac{h_t^2}{2} f_{0,j} + h_t\psi_j.$$

Нахождение последующих ($i > 1$) слоев сетки:

$$u_{i+1,j} = \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{i,j+1} + 2\left(1 - \left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2\right) u_{ij} +$$

$$+\left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + h_t^2 f_{ij}.$$

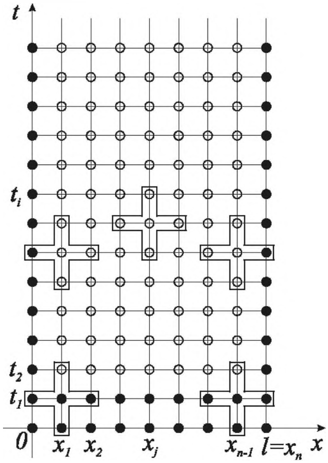

Рис. 14. Наложение шаблона для явного метода конечных разностей для нахождения решения гиперболической задачи на отрезке в узлах сетки

Важно отметить, что явная конечно-разностная схема не является абсолютно устойчивой, то есть чувствительна к небольшим ошибкам задания начальных и граничных условий при определенном соотношении шагов [7, с. 97]. Для устойчивости схемы должно быть выполнено следующее условие:

$$\left(\frac{ah_t}{h_x}\right)^2 \leqslant 1.$$

Это условие называется условием Куранта. Его важно учитывать при выборе шагов сетки по временной и пространственной переменным.

6.2. Неявная конечно-разностная схема для решения гиперболического уравнения на отрезке

Для неявной схемы определим такую же сетку (см. рис. 12), что и для явной (см. параграф 6.1):

$$t_i = t_0 + ih_t = 0 + ih_t = ih_t,\ i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$x_j = x_0 + jh_x = 0 + jh_x = jh_x,\ j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},\ h_x = \frac{l}{n}.$$

Приближенное значение искомой функции $u(t, x)$ в узлах построенной сетки обозначим $u(t_i, x_j) \approx u_{ij}$. Значения функций $f(t, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ и $k(t)$ на построенной сетке могут быть записаны (обозначены) следующим образом:

$$f(t_i, x_j) = f_{ij},\ \varphi(x_j) = \varphi_j,\ \psi(x_j) = \psi_j,\ g(t_i) = g_i,\ k(t_i) = k_i.$$

Заменим первые и вторые производные функции $u(t, x)$ по временной и пространственной переменным с помощью формул численного дифференцирования. Для первой производной по времени будем использовать формулу численного дифференцирования по двум узлам на левый край:

$$u_t(t_i, x_j) = \frac{\partial}{\partial t} u(t_i, x_j) \approx \frac{u(t_i + h_t, x_j) - u(t_i, x_j)}{h_t} =$$
$$= \frac{u(t_{i+1}, x_j) - u(t_i, x_j)}{h_t} = \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_t}.$$

Вторую производную по времени заменим формулой численного дифференцирования по трем узлам на правый край:

$$u_{tt}(t_{i+1}, x_j) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t_{i+1}, x_j) \approx$$
$$\approx \frac{u(t_i + h_t, x_j) - 2u(t_i, x_j) + u(t_i - h_t, x_j)}{h_t^2} =$$
$$= \frac{u(t_{i+1}, x_j) - 2u(t_i, x_j) + u(t_{i-1}, x_j)}{h_t^2} =$$

$$= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_t^2}.$$

Вторую производную по пространственной переменной запишем с помощью формулы численного дифференцирования по трем узлам на середину:

$$\begin{aligned}
u_{xx}(t_{i+1}, x_j) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t_{i+1}, x_j) \approx \\
&\approx \frac{u(t_{i+1}, x_j + h_x) - 2u(t_{i+1}, x_j) + u(t_{i+1}, x_j - h_x)}{h_x^2} = \\
&= \frac{u(t_{i+1}, x_{j+1}) - 2u(t_{i+1}, x_j) + u(t_{i+1}, x_{j-1})}{h_x^2} = \\
&= \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{h_x^2}.
\end{aligned}$$

Важное отличие неявного метода от явного в том, что аппроксимация пространственной производной берется в точке t_{i+1}, а не в t_i.

Запишем начальные и граничные условия задачи:

$$u(0, x_j) = \varphi(x_j) \quad \Rightarrow \quad u(t_0, x_j) = \varphi(x_j) \quad \Rightarrow \quad u_{0,j} = \varphi_j,$$
$$u_t(0, x_j) = \psi(x_j) \quad \Rightarrow \quad u_t(t_0, x_j) = \psi(x_j) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h_t} = \psi_j \quad \Rightarrow \quad u_{1,j} = u_{0,j} + h_t \psi_j = \varphi_j + h_t \psi_j,$$
$$u(t_i, 0) = g(t_i) \quad \Rightarrow \quad u(t_i, x_0) = g(t_i) \quad \Rightarrow \quad u_{i,0} = g_i,$$
$$u(t_i, l) = k(t_i) \quad \Rightarrow \quad u(t_i, x_n) = k(t_i) \quad \Rightarrow \quad u_{i,n} = k_i.$$

Таким образом, определено решение задачи на слоях $i = 0$ и $i = 1$. Для определения решения на последующих слоях запишем заданное гиперболическое уравнение в узле сетки (t_{i+1}, x_j) в терминах формул численного дифференцирования, рассмотренных выше:

$$u_{tt}(t_{i+1}, x_j) = a^2 u_{xx}(t_{i+1}, x_j) + f(t_{i+1}, x_j) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_t^2} =$$

$$= a^2\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{h_x^2} + f_{i+1,j} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^2h_t^2u_{i+1,j-1} - \left(h_x^2 + 2a^2h_t^2\right) u_{i+1,j} + a^2h_t^2u_{i+1,j+1} =$$
$$= h_x^2u_{i-1,j} - 2h_x^2u_{ij} - h_t^2h_x^2f_{i+1,j}.$$

Для удобства перепишем полученное выражение для слоя i:

$$a^2h_t^2u_{i,j-1} - \left(h_x^2 + 2a^2h_t^2\right) u_{i,j} + a^2h_t^2u_{i,j+1} =$$
$$= h_x^2u_{i-2,j} - 2h_x^2u_{i-1,j} - h_t^2h_x^2f_{ij}. \tag{6.4}$$

Шаблон для неявной схемы представлен на рис. 15. В окрашенных на шаблоне сетки точках значения искомой функции известны, необходимо найти значения функции в неокрашенных точках.

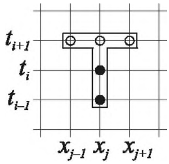

Рис. 15. Шаблон для неявного метода конечных разностей для решения гиперболической задачи на отрезке

Запишем выражение (6.4) для каждого $j = 1$ и $j = n - 1$:

$$a^2h_t^2u_{i,0} - \left(h_x^2 + 2a^2h_t^2\right) u_{i,1} + a^2h_t^2u_{i,2} =$$
$$= h_x^2u_{i-2,1} - 2h_x^2u_{i-1,1} - h_t^2h_x^2f_{i,1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -\left(h_x^2 + 2a^2h_t^2\right) u_{i,1} + a^2h_t^2u_{i,2} =$$
$$= h_x^2u_{i-2,1} - 2h_x^2u_{i-1,1} - h_t^2h_x^2f_{i,1} - a^2h_t^2g_i,$$
$$a^2h_t^2u_{i,n-2} - \left(h_x^2 + 2a^2h_t^2\right) u_{i,n-1} + a^2h_t^2u_{i,n} =$$
$$= h_x^2u_{i-2,n-1} - 2h_x^2u_{i-1,n-1} - h_t^2h_x^2f_{i,n-1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a^2h_t^2u_{i,n-2} - \left(h_x^2 + 2a^2h_t^2\right) u_{i,n-1} =$$
$$= h_x^2u_{i-2,n-1} - 2h_x^2u_{i-1,n-1} - h_t^2h_x^2f_{i,n-1} - a^2h_t^2k_i.$$

Составим систему линейных алгебраических уравнений, которая будет состоять из выражений (6.4), записанных для различных значений j:

$$\begin{cases} -\left(h_x^2+2a^2h_t^2\right)u_{i,1}+a^2h_t^2u_{i,2}= \\ =h_x^2u_{i-2,1}-2h_x^2u_{i-1,1}-h_t^2h_x^2f_{i,1}-a^2h_t^2g_i, \\ a^2h_t^2u_{i,1}-\left(h_x^2+2a^2h_t^2\right)u_{i,2}+a^2h_t^2u_{i,3}= \\ =h_x^2u_{i-2,2}-2h_x^2u_{i-1,2}-h_t^2h_x^2f_{i,2}, \\ \ldots \\ a^2h_t^2u_{i,j-1}-\left(h_x^2+2a^2h_t^2\right)u_{i,j}+a^2h_t^2u_{i,j+1}= \\ =h_x^2u_{i-2,j}-2h_x^2u_{i-1,j}-h_t^2h_x^2f_{ij}, \\ \ldots \\ a^2h_t^2u_{i,n-3}-\left(h_x^2+2a^2h_t^2\right)u_{i,n-2}+a^2h_t^2u_{i,n-1}= \\ =h_x^2u_{i-2,n-2}-2h_x^2u_{i-1,n-2}-h_t^2h_x^2f_{i,n-2}, \\ a^2h_t^2u_{i,n-2}-\left(h_x^2+2a^2h_t^2\right)u_{i,n-1}= \\ =h_x^2u_{i-2,n-1}-2h_x^2u_{i-1,n-1}-h_t^2h_x^2f_{i,n-1}-a^2h_t^2k_i. \end{cases}$$

Для удобства дальнейшего изложения сделаем следующие замены:

$$A=a^2h_t^2,\quad B=-\left(h_x^2+2a^2h_t^2\right),$$
$$C_1=h_x^2u_{i-2,1}-2h_x^2u_{i-1,1}-h_t^2h_x^2f_{i,1}-a^2h_t^2g_i,$$
$$C_j=h_x^2u_{i-2,j}-2h_x^2u_{i-1,j}-h_t^2h_x^2f_{ij},\ \text{для}\ j\in\{2,\,\ldots,n-2\},$$
$$C_{n-1}=h_x^2u_{i-2,n-1}-2h_x^2u_{i-1,n-1}-h_t^2h_x^2f_{i,n-1}-a^2h_t^2k_i.$$

Перепишем систему уравнений с помощью введенной замены:

$$
\begin{cases}
Bu_{i,1} + Au_{i,2} = C_1, \\
Au_{i,1} + Bu_{i,2} + Au_{i,3} = C_2, \\
\ldots \\
Au_{i,j-1} + Bu_{ij} + Au_{i,j+1} = C_j, \\
\ldots \\
Au_{i,n-3} + Bu_{i,n-2} + Au_{i,n-1} = C_{n-2}, \\
Au_{i,n-2} + Bu_{i,n-1} = C_{n-1}.
\end{cases}
$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений имеет трехдиагональную структуру. Кроме того, матрица системы обладает диагональным преобладанием (модуль диагональных элементов (коэффициентов при u_{ii}) в каждой строчке больше суммы модулей недиагональных элементов), поскольку

$$|B| = h_x^2 + 2a^2h_t^2 > 2a^2h_t^2 = 2|A|.$$

Выполнение данного свойства гарантирует устойчивость решения системы с помощью метода трехдиагональной прогонки [7, с. 43].

Если в каждой j-й строке системы уравнений выразить элемент u_{ij} и подставить в следующее уравнение системы, то можно получить линейную связь неизвестного элемента со следующим за ним. Эту связь представим таким образом:

$$u_{i,j-1} = D_j u_{ij} + E_j, \tag{6.5}$$

где D_j и E_j – коэффициенты прогонки.

Подставим выражение (6.5) в j-е уравнение системы:

$$
\begin{gathered}
A(D_j u_{ij} + E_j) + Bu_{ij} + Au_{i,j+1} = C_j \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad u_{ij} = -\frac{A}{AD_j + B} u_{i,j+1} + \frac{C_j - AE_j}{AD_j + B} \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad D_{j+1} = -\frac{A}{AD_j + B}, \quad E_{j+1} = \frac{C_j - AE_j}{AD_j + B}, \qquad (6.6) \\
j \in \{1, \ldots, n-1\}.
\end{gathered}
$$

Выразим из первого уравнения системы $u_{i,1}$ и найдем коэффициенты D_2 и E_2:

$$u_{i,1} = -\frac{A}{B}u_{i,2} + \frac{C_1}{B} \quad \Rightarrow \quad D_2 = -\frac{A}{B}, \quad E_2 = \frac{C_1}{B}.$$

Запишем выражения (6.6) для коэффициентов D_2 и E_2 и определим коэффициенты D_1 и E_1, значения которых будут являться начальными для прямого хода прогонки:

$$D_2 = -\frac{A}{AD_1 + B} = -\frac{A}{B} \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0,$$
$$E_2 = \frac{C_1 - AE_1}{AD_1 + B} = \frac{C_1}{B} \quad \Rightarrow \quad E_1 = 0.$$

Для нахождения начального значения обратного хода прогонки необходимо подставить выражение (6.5) в заключительное уравнение системы:

$$A(D_{n-1}u_{i,n-1} + E_{n-1}) + Bu_{i,n-1} = C_{n-1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad u_{i,n-1} = \frac{C_{n-1} - AE_{n-1}}{AD_{n-1} + B} = E_n.$$

Наложение шаблона неявного метода на конечно-разностную сетку представлено на рис. 16.

Запишем весь алгоритм с использованием формул, полученных выше. Входные данные задачи:

$$u_{0,j} = \varphi_j, \quad u_{1,j} = \varphi_j + h_t\psi_j, \quad u_{i,0} = g_i, \quad u_{i,n} = k_i.$$

Входные данные уже содержат два слоя сетки: $u_{0,j}$ для $i = 0$ и $u_{1,j}$ для $i = 1$. На последующих слоях сетки $(i > 1)$ необходимо найти элементы u_{ij}, где $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, так как элементы $u_{i,0}$ и $u_{i,n}$ заданы во входных данных. Это можно сделать с помощью следующего алгоритма:

$$D_1 = 0,\ E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}\ D_{j+1} = -\frac{A}{AD_j + B},$$

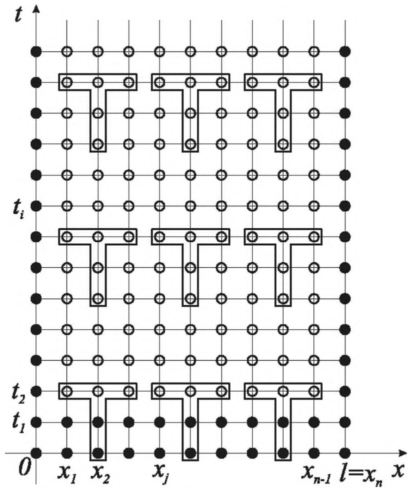

Рис. 16. Наложение шаблона для неявного метода конечных разностей для нахождения решения гиперболической задачи на отрезке в узлах сетки

$$E_{j+1} = \frac{C_j - AE_j}{AD_j + B} \quad \Rightarrow \quad u_{i,n-1} = E_n \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-2\} \; u_{ij} = D_{j+1}u_{i,j+1} + E_{j+1}.$$

Таким образом, весь слой i становится известным.

Отметим, что неявная конечно-разностная схема является абсолютно устойчивой. То есть эта схема работает при любых шагах по временной и пространственной переменным.

6.3. Сравнение явной и неявной конечно-разностных схем для решения гиперболических задач на отрезке

Явный сеточный метод конечных разностей позволяет найти значение искомой функции через данные нескольких соседних точек, значения искомой функции в которых известны из начальных условий или уже найдены. Неявный метод приводит к уравнениям, которые получаются через известные данные в нескольких соседних точках. Для дальнейшего нахождения решения необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений.

Большой плюс явного метода заключается в простоте его реализации. На каждом новом слое сетки можно беспрепятственно найти значения искомой функции в узлах сетки. Однако для реализации этого метода необходимо учитывать условие Куранта, которое накладывает ограничения на выбор шагов сетки по временной и пространственной переменным.

Преимущество неявной схемы заключается в том, что она является абсолютно устойчивой. При использовании неявной схемы нет никаких условий на шаги по временной и пространственной переменным. Однако неявная схема сложнее в ее реализации.

Отметим также, что погрешность аппроксимации в обоих случаях определяется минимальной точностью используемых приближений производных в рассматриваемой задаче. Для приведенных примеров в О-нотации может быть записана как $O(h_t + h_x^2)$.

Видно, что явные и неявные схемы имеют как свои плюсы, так и недостатки. Поэтому в плане выбора между этими двумя методами необходимо либо аккуратно подбирать шаги по временной и пространственным переменным в соответствии с условием Куранта (явная схема), либо дополнительно использовать метод трехдиагональной прогонки для решения системы линейных алгебраических уравнений (неявный метод).

Помимо сеточных методов также можно выделить метод прямых, который заключается в дискретизации задачи только по одной переменной, а именно по пространственной. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, для решения которой необходимо также использовать численные методы. Для решения этой системы необходимо проводить дискретизацию по временной переменной, и в результате метод прямых получается эквивалентной формой сеточного метода, поскольку в итоге необходимо делать дискретизацию по обеим переменным.

Также можно отметить семейство проекционных методов. Основная идея этих методов заключается в приближении решения линейной комбинации базисных функций в конечномерном пространстве. Коэффициенты разложения при этом ищутся из уравнений, которые описывают критерий точности приближенного решения. Такой подход позволяет найти проекцию бесконечномерного пространства решений на конечномерное пространство приближенных решений [7, с. 214].

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

1.1. Уравнение параболического типа.
Каноническая форма:
$u_{\eta\eta} + 9u_\eta + 18u_\xi - 9u = 0.$

1.2. Уравнение эллиптического типа.
Каноническая форма:
$$355(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + 70u_\xi + 13u - \sin\left(\frac{\xi}{10} - \frac{3\sqrt{71}\eta}{710}\right) = 0.$$

1.3. Уравнение гиперболического типа.
Первая каноническая форма:
$u_{\xi\eta} - 3u_\xi + u_\eta + 2u = 0.$
Вторая каноническая форма:
$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} - 2u_\alpha - 4u_\beta + 2u = 0.$

1.4. Уравнение гиперболического типа.
Первая каноническая форма:
$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{20}\cos\frac{\sqrt{5}(\xi - \eta)}{10} = 0.$$
Вторая каноническая форма:
$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{20}\cos\frac{\sqrt{5}\beta}{10} = 0.$$

1.5. Уравнение эллиптического типа.
Каноническая форма:
$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$

1.6. Уравнение параболического типа.
Каноническая форма:
$\left(\sin^2\eta\right) u_{\eta\eta} - \xi(1 + \cos\eta)u_\xi = 0.$

1.7. Уравнение гиперболического типа.
Первая каноническая форма:
$$u_{\xi\eta} - \frac{3}{44}(u_\xi + u_\eta) -$$

$$-\frac{1}{44}\left(\frac{4\sqrt{11}+11}{22}\xi+\frac{11-4\sqrt{11}}{22}\eta\right)e^{-\frac{\sqrt{11}}{22}(\xi-\eta)}=0.$$

Вторая каноническая форма:

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}-\frac{3}{22}u_\alpha-\frac{1}{44}\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{2\sqrt{11}}{11}\beta\right)e^{-\frac{\sqrt{11}}{22}\beta}=0.$$

1.8. Уравнение эллиптического типа.

Каноническая форма:

$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-8u=0.$

1.9. Уравнение параболического типа.

Каноническая форма:

$$\begin{aligned}
&8(\xi-\eta)u_{\eta\eta}+2u_\xi\left(2-3\sqrt{\xi-\eta}\right)-e^{\sqrt{\xi-\eta}}=0, && x>0,\\
&2u_{xx}=3u_x+1, && x=0,\\
&8(\xi-\eta)u_{\eta\eta}+2u_\xi\left(2+3\sqrt{\xi-\eta}\right)-e^{-\sqrt{\xi-\eta}}=0, && x<0.
\end{aligned}$$

1.10. Уравнение параболического типа при $x\neq 0$ и $y=0$.

Каноническая форма:

$xu_{xx}-2u_x+16x^3u=0.$

Уравнение параболического типа при $x=0$ и $y\neq 0$.

Каноническая форма:

$3yu_{yy}-4u_y=0.$

Уравнение гиперболического типа при $x\neq 0$ и $y\neq 0$.

Первая каноническая форма:

$4\xi\eta u_{\xi\eta}-4\xi u_\xi+\eta u_\eta+4\xi\eta u=0.$

Вторая каноническая форма:

$$\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}\right)-\frac{3\alpha+5\beta}{2}u_\alpha-\frac{5\alpha+3\beta}{2}u_\beta+$$
$$+\left(\alpha^2-\beta^2\right)u=0.$$

1.11. Уравнение эллиптического типа.

Каноническая форма:

$$385(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta})-8u_\xi+\sqrt{35}u_\eta-$$
$$-\exp\left(-\sqrt{35}\eta\left(\frac{8\eta+\sqrt{35}\xi}{385}\right)^2\right)=0.$$

1.12. Уравнение параболического типа.
Каноническая форма:
$$u_{\eta\eta} - \frac{5}{27}(u_\xi + u_\eta) - \frac{1}{27}\sin\frac{5(\xi - \eta)}{3} = 0.$$

1.13. Уравнение гиперболического типа.
Первая каноническая форма:
$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{25}\cos\frac{2(2\xi + \eta)}{5} = 0.$$
Вторая каноническая форма:
$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} - \frac{1}{25}\cos\frac{3\alpha + \beta}{5} = 0.$$

1.14. Уравнение эллиптического типа.
Каноническая форма:
$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 2u = 0.$$

1.15. Уравнение параболического типа.
Каноническая форма:
$$3(\xi - 4\eta)u_{\eta\eta} + 4u_\xi\left(7 - \sqrt{3(\xi - \eta)}\right) + u_\eta + \ln\sqrt{\frac{\xi - \eta}{3}} + 5\eta = 0.$$

1.16. Уравнение гиперболического типа.
Первая каноническая форма:
$$u_{\xi\eta} = 0.$$
Вторая каноническая форма:
$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 0.$$

1.17. Уравнение эллиптического типа.
Каноническая форма:
$$8(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + (6 + \eta)u_\xi - 2u_\eta + \cos\frac{7\eta}{2} = 0.$$

1.18. Уравнение гиперболического типа.
Первая каноническая форма:
$$u_{\xi\eta} = 0.$$
Вторая каноническая форма:
$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 0.$$

1.19. Уравнение параболического типа.
Каноническая форма:
$$9u_{\eta\eta} + 2u_\xi\left(9 - 4\eta - 3\eta^2\right) - 4u_\eta - \frac{\xi - \eta^2}{3} = 0.$$

1.20. Уравнение гиперболического типа.
Первая каноническая форма:
$2(\eta^2 - \xi^2)u_{\xi\eta} - \eta u_\xi + \xi u_\eta = 0.$
Вторая каноническая форма:
$2\alpha\beta(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}) + \beta u_\alpha - \alpha u_\beta = 0.$

1.21. Уравнение эллиптического типа.
Каноническая форма:
$$9\eta^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - 3\left(3\xi + \frac{\eta}{2}\right)u_\xi + 9\eta u_\eta + \frac{4}{3}\ln\frac{\eta}{2} = 0.$$

1.22. Уравнение параболического типа.
Каноническая форма:
$\left(\eta^2 - \xi\right)u_{\eta\eta} - 2\xi u_\xi = 0.$

1.23. Уравнение гиперболического типа.
Первая каноническая форма:
$$81u_{\xi\eta} - 7u_\xi - u_\eta + \frac{5(5\eta - 2\xi)^2}{81} - 3\exp\left(\frac{\xi + 2\eta}{9}\right) = 0.$$
Вторая каноническая форма:
$$81(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}) - 8u_\alpha - 6u_\beta + \frac{5(3\alpha - 7\beta)^2}{324} -$$
$$-3\exp\left(\frac{3\alpha - \beta}{18}\right) = 0.$$

1.24. Уравнение эллиптического типа.
Каноническая форма:
$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$

1.25. Уравнение параболического типа.
Каноническая форма:
$u_{\eta\eta} + 5u_\xi + u_\eta + 2u - 2\xi + 5\eta = 0.$

2. Уравнения колебаний. Граничные и начальные условия:

2.1. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$
$u(0, x) = f(x),$
$u_t(0, x) = g(x),$
$u_x(t, 0) = 0,$
$u(t, l) = 0.$

2.2. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$
$u(0, x) = \varphi(x),$
$u_t(0, x) = \psi(x),$
$u(t, 0) = 0,$
$u_x(t, l) + Hu(t, l) = 0, \ H > 0.$

2.3. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$
$u(0, x) = 0,$
$$u_t(0, x) = \cos \frac{\pi(x - x_0)}{2l},$$
$u(t, 0) = 0,$
$u(t, l) = 0.$

2.4. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \quad \alpha > 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$
$u(0, x) = \varphi(x),$
$u_t(0, x) = 0,$
$u_x(t, 0) - hu(t, 0) = 0, \ h > 0,$
$u(t, \pi) = 0.$

2.5. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$
$u(0, x) = \varphi(x),$
$u_t(0, x) = \psi(x),$
$u(t, 0) = 0,$
$u_x(t, l) = F_0.$

2.6. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$

$u(0, x) = 0,$

$u_t(0, x) = \begin{cases} v_0, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$

$u(t, 0) = 0,$

$u(t, l) = 0.$

2.7. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$

$u(0, x) = \varphi(x),$

$u_t(0, x) = \psi(x),$

$u_x(t, 0) - hu(t, 0) = \kappa(t), \ h > 0,$

$u(t, l) = \mu(t).$

2.8. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \alpha T(x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$

$u(0, x) = \varphi(x),$

$u_t(0, x) = \psi(x),$

$u_x(t, 0) - hu(t, 0) = 0, \ h > 0,$

$u_x(t, l) = \nu(t).$

2.9. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t + \beta f(t, x),$

$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$

$u(0, x) = \varphi(x),$

$u_t(0, x) = \psi(x),$

$u(t, 0) = 0,$

$u(t, l) = 0.$

2.10. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2,$

$u(0, x) = \varphi(x),$

$u_t(0, x) = \psi(x),$

$u_x(t, 0) - hu(t, 0) = 0, \ h > 0,$

$u_x(t, 2) = 0.$

2.11. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$
$u(0,x) = 0,$
$u_t(0,x) = 0,$
$u_x(t,0) - hu(t,0) = \kappa(t),\ h > 0,$
$u_x(t,l) = \nu(t).$

2.12. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \quad \alpha > 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$
$u(0,x) = \varphi(x),$
$u_t(0,x) = 0,$
$u(t,0) = 0,$
$u(t,l) = 0.$

2.13. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$
$u(0,x) = \varphi(x),$
$u_t(0,x) = \psi(x),$
$u(t,0) = 0,$
$u(t,l) = 0.$

2.14. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha T(x), \quad \alpha > 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$
$u(0,x) = \varphi(x),$
$u_t(0,x) = \psi(x),$
$u(t,0) = 0,$
$u(t,l) = 0.$

2.15. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \quad \alpha > 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$
$u(0,x) = \varphi(x),$
$u_t(0,x) = \psi(x),$
$u_x(t,0) - hu(t,0) = 0,\ h > 0,$
$u_x(t,\pi) = F(t).$

2.16. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + G(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < 3,$
$u(0,x) = 0,$
$u_t(0,x) = 0,$
$u_x(t,0) - hu(t,0) = 0,\ h > 0,$
$u_x(t,3) = 0.$

2.17. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 5,$
$u(0, x) = p(x),$
$u_t(0, x) = q(x),$
$u_x(t, 0) = f(t),$
$u_x(t, 5) + Hu(t, 5) = g(t),\ H > 0.$

2.18. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < 4,$
$u(0, x) = \varphi(x),$
$u_t(0, x) = \psi(x),$
$u(t, 0) = 0,$
$u_x(t, 4) = f(t).$

2.19. $u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \quad \alpha > 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < 7,$
$u(0, x) = 0,$
$u_t(0, x) = 0,$
$u_x(t, 0) - hu(t, 0) = f(t),$
$u(t, 7) = 0.$

3. Уравнения гиперболического типа на бесконечной прямой. Формула Даламбера.

3.1. $u(t,x) = \dfrac{3^{x+5t} + 3^{x-5t}}{2}.$

3.2. $u(t,x) = \dfrac{\cos(x-t) - \cos(x+t)}{2} = \sin x \sin t.$

3.3. $u(t,x) = \dfrac{\ln|x+6t| + \ln|x-6t|}{2} + tx.$

3.4. $u(t,x) = \dfrac{t^2}{2}.$

3.5. $u(t,x) = \dfrac{\sin^2 t \cos x}{2}.$

3.6. $u(t,x) = \dfrac{e^{x+t} - e^{x-t}}{2} + \dfrac{xt^2}{2}.$

3.7. $u(t,x) = \dfrac{(x+3t)^{10} + (x-3t)^{10}}{2} - \dfrac{e^{-(x+3t)^2} - e^{-(x-3t)^2}}{12} + 3t^2 + x + 2.$

3.8. $u(t,x) = \sin \omega x \cos 5\omega t + \dfrac{1}{5} x \cos x \sin 5t + t \sin x \cos 5t - \dfrac{1}{5} \sin x \sin 5t.$

3.9. $u(t,x) = -t + e^t + 2 + \left(t^2 + x^2\right) \cos t \cos x - 2tx \sin t \sin x + \dfrac{\sin 3(t+x)^3 - \sin 3(x-t)^3}{18}.$

3.10. $u(t,x) = \dfrac{1}{6}\left(30t^2 - \dfrac{9t^7}{70} - \dfrac{3t^5x^2}{10}\right) + \dfrac{e^{x-3t+2} + e^{x+3t+2}}{2} + \dfrac{(3t-x)^{11} + (3t+x)^{11}}{66} + \dfrac{e^x \operatorname{sh} 3t}{3}.$

3.11. $u(t,x) = \dfrac{1}{\omega}\left(t - \dfrac{\sin \omega t}{\omega}\right).$

3.12. $u(t,x) = \dfrac{\sin(5x+5t) + \sin(5x-5t) + 4}{2} + \dfrac{2t + 1 - e^{2t}}{4} + \sin t \cos x.$

3.13. $u(t,x) = \cos(x-t) + 3 - \dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{4}$.

3.14. $u(t,x) = \dfrac{\sin^2(x+3t)}{2} - \dfrac{(x+3t)^3}{2} + \dfrac{\sin^2(x-3t)}{2} - \dfrac{(x-3t)^3}{2} +$
$+ t\left(3t^2 + x^2\right)$.

3.15. $u(t,x) = \begin{cases} t, & x-2t \in I_1,\ x+2t \in I_1, \\ u_2(t,x), & x-2t \in I_1,\ x+2t \in I_2, \\ t-1, & x-2t \in I_1,\ x+2t \in I_3, \\ u_4(t,x), & x-2t \in I_2,\ x+2t \in I_3, \\ t, & x-2t \in I_3,\ x+2t \in I_3, \\ u_6(t,x), & x-2t \in I_2,\ x+2t \in I_2, \end{cases}$

где $I_1 = (-\infty, -2)$; $I_2 = (-2, 2)$; $I_3 = (2, +\infty)$;

$u_2(t,x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{(x+2t)^2}{2} - \dfrac{x-2t}{4}$;

$u_4(t,x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{(x-2t)^2}{2} + \dfrac{x+2t}{4}$;

$u_6(t,x) = 4 - x^2 - 4t^2$.

3.16. $u(t,x) = \dfrac{1}{3}\sin(x-3t) + \dfrac{2}{3}\sin(x+3t) + \dfrac{1}{12}xt^4$.

3.17. $u(t,x) = -\dfrac{2}{3}t - \dfrac{2}{9}e^{-3t} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{\sin 3(x+5t) + \sin 3(x-5t)}{2} +$
$+ \dfrac{\sin(x+5t)^2 - \sin(x-5t)^2}{20}$.

3.18. $u(t,x) = 3 - \dfrac{\cos 2(x+6t) + \cos 2(x-6t)}{2} - \dfrac{1}{30}e^{-5(x+6t)} +$
$+ \dfrac{1}{30}e^{-5(x-6t)}$.

4. Уравнения гиперболического типа на полуограниченной прямой. Метод продолжений.

В некоторых ответах предполагается разбиение задачи с несколькими неоднородностями на задачи для функций $v(t,x)$ с неоднородностью в граничном условии, $w(t,x)$ с неоднородными начальными условиями и $q(t,x)$ с неоднородным уравнением.

4.1. $$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{24\sqrt{6}}\left(\operatorname{erf}\sqrt{6}(x+6t) - \operatorname{erf}\sqrt{6}(x-6t)\right), & x \geqslant 6t, \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{24\sqrt{6}}\left(\operatorname{erf}\sqrt{6}(6t-x) + \operatorname{erf}\sqrt{6}(x+6t)\right), & x < 6t. \end{cases}$$

4.2. $$u(t,x) = \begin{cases} \sin 5x \cos 25t + tx + 3t + 5, & x \geqslant 5t, \\ \cos 5x \sin 25t + \dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{5}{2}t^2 + 3t + 5, & x < 5t. \end{cases}$$

4.3. $$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t, \\ \exp\left(-\dfrac{x-2t}{2}\right) + \dfrac{x-2t}{2}\sin\dfrac{x-2t}{2} - 1, & x < 2t. \end{cases}$$

4.4. $u(t,x) = w(t,x) + q(t,x)$:

$$w(t,x) = \begin{cases} \sin x \cos 3t + \dfrac{1}{9}\cos 3x \sin 9t, & x \geqslant 3t, \\ \sin x \cos 3t + \dfrac{1}{9}\sin 3x \cos 9t, & x < 3t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = \begin{cases} \dfrac{t^4}{12}, & x \geqslant 3t, \\ \dfrac{1}{9}t^3x - \dfrac{1}{18}t^2x^2 + \dfrac{1}{81}tx^3 - \dfrac{1}{972}x^4, & x < 3t. \end{cases}$$

4.5. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x)$:

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant t, \\ 3(x-t), & x < t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} \sin 5x \cos 5t + \cos x \cos t + \\ + \dfrac{1}{2}\left(e^{x+t} - e^{x-t}\right), & x \geqslant t, \\ \sin 5t \cos 5x + \cos x \cos t + \\ + \dfrac{1}{2}\left(e^{x+t} + e^{t-x}\right) - 1, & x < t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = \frac{t^2}{2}.$$

4.6. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$:

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t, \\ \cos(4t-2x), & x < 2t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2(x+2t)} + e^{2(x-2t)}}{2} + 4t, & x \geqslant 2t, \\ \dfrac{e^{2(x+2t)} - e^{2(2t-x)}}{2} + 2x, & x < 2t. \end{cases}$$

4.7. $u(t,x) = \begin{cases} 5t + 3, & x \geqslant t, \\ \dfrac{5}{2} + 5x + e^{2(x-t)}, & x < t. \end{cases}$

4.8. $u(t,x) = \begin{cases} x^2 - x^3 - 27t^2x + 9t^2 + \dfrac{1}{3}\cos x \sin 3t, & x \geqslant 3t, \\ x^2 - 9tx^2 + 9t^2 - 27t^3 + \dfrac{1}{3}\cos x \sin 3t, & x < 3t. \end{cases}$

4.9. $u(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t, \\ \sin(x-2t), & x < 2t. \end{cases}$

4.10. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x)$:

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 6t, \\ \dfrac{1}{36}(x-6t)^2, & x < 6t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} x^2 + 36t^2 + \dfrac{1}{6}\cos(x+2)\sin 6t, & x \geqslant 6t, \\ 12tx + \dfrac{1}{6}\sin x\cos(6t+2), & x < 6t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = \begin{cases} t^3, & x \geqslant 6t, \\ \dfrac{t^2x}{2} - \dfrac{tx^2}{12} + \dfrac{x^3}{216}, & x < 6t. \end{cases}$$

4.11. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x)$:

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant t, \\ -\dfrac{(x-t)^2}{2} + 10(x-t), & x < t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} \sin 2x\cos 2t - \cos x\cos t + 1 + \\ + \dfrac{1}{5}\sin 5x\sin 5t + tx\left(x^2+t^2\right), & x \geqslant t, \\ \sin 2t\cos 2x - \cos x\cos t + \\ + \dfrac{6-\cos 5x\cos 5t}{5} + \dfrac{t^4+6t^2x^2+x^4}{4}, & x < t; \end{cases}$$

$q(t,x) = 5t^2$.

4.12. $$u(t,x) = \begin{cases} x^3 + 3t^2x - t + \sin t\cos x, & x \geqslant t, \\ x^3 + 3x^2 + 5x + 3t^2 - 6t + 3t^2x - 6tx - \\ -\dfrac{11}{2}e^{x-t} + \dfrac{\sin(x+t)+\cos(x-t)}{2} + 5, & x < t. \end{cases}$$

4.13. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t, \\ \left(t - \dfrac{x}{2}\right)^2 \cos(4t - 2x), & x < 2t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} -3 - 3tx, & x \geqslant 2t, \\ -3tx, & x < 2t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = \begin{cases} t^2, & x \geqslant 2t, \\ tx - \dfrac{x^2}{4}, & x < 2t. \end{cases}$$

4.14. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 3t, \\ \exp\left(t - \dfrac{x}{3}\right), & x < 3t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \frac{1}{6}\sin 6tx \cos\left(x^2 + 9t^2\right);$$

$$q(t,x) = 2t^3 x.$$

4.15. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t, \\ e^{x-2t}, & x < 2t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = 2x^3 + 24t^2 x;$$

$$q(t,x) = \begin{cases} t^2, & x \geqslant 2t, \\ tx - \dfrac{x^2}{4}, & x < 2t. \end{cases}$$

4.16. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 3t, \\ -3(x-3t)^2, & x > 3t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = t\left(3t^2 + x^2\right);$$

$$q(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}e^x - \dfrac{1}{18}\left(e^{x+3t} + e^{x-3t}\right), & x > 3t, \\ \dfrac{1}{9}e^x - \dfrac{1}{18}\left(e^{x+3t} + e^{3t-x}\right) + \dfrac{3t-x}{9}, & x \leqslant 3t. \end{cases}$$

4.17. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant t, \\ (t-x)\sin(x-t) - \cos(x-t) + 1, & x < t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} 4x + e^{3(x+t)} - e^{3(x-t)}, & x \geqslant t, \\ 4t + e^{3(t-x)} + e^{3(x+t)} - 2, & x < t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = -\frac{t^3}{3}.$$

4.18. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t, \\ 3(2t-x), & x < 2t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} \cos\left(x^2 + 4t^2\right)\cos 4tx + 2tx + 8t, & x \geqslant 2t, \\ \cos\left(x^2 + 4t^2\right)\cos 4tx + \dfrac{x^2}{2} + 2t^2 + 8t, & x < 2t. \end{cases}$$

4.19. $u(t,x) = w(t,x) + q(t,x):$

$$w(t,x) = \begin{cases} 2\sin t \sin x + e^x \operatorname{ch} t, & x \geqslant t, \\ 2\sin t \sin x + e^t \operatorname{sh} x, & x < t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = -t^2 x.$$

4.20. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x)$:

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 5t, \\ -\dfrac{3}{100}(x-5t)^4, & x < 5t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} 5\sin x \cos 5t, & x \geqslant 5t, \\ 5\cos x \sin 5t, & x < 5t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = \begin{cases} 10t^2 x, & x \geqslant 5t, \\ \dfrac{50}{3}t^3 - \dfrac{2}{15}x^3 + 2tx^2, & x < 5t. \end{cases}$$

4.21. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x)$:

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant t, \\ t-x, & x < t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} x + \sin(x+t) - \sin(x-t), & x \geqslant t, \\ x + \sin(x+t) - \sin(t-x), & x < t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = \begin{cases} -t^2, & x \geqslant t, \\ -2x(t-x) - x^2, & x < t. \end{cases}$$

4.22. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x)$:

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 3t, \\ -\dfrac{3}{2}\left(t - \dfrac{x}{3}\right)^2, & x < 3t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} 2x - 1 + \dfrac{1}{3}\sin x \sin 3t, & x \geqslant 3t, \\ 6t - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\cos x \cos 3t, & x < 3t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = \frac{t^2}{2}.$$

4.23. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 2t, \\ t - \dfrac{x}{2} + 1, & x < 2t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \begin{cases} \cos x \cos 2t + \dfrac{t}{3}\left(3x^2 + 4t^2\right), & x \geqslant 2t, \\ -\sin x \sin 2t + \dfrac{x}{6}\left(x^2 + 12t^2\right), & x < 2t; \end{cases}$$

$$q(t,x) = \begin{cases} -\dfrac{5}{2}t^2, & x \geqslant 2t, \\ \dfrac{5}{8}x^2 - \dfrac{5}{2}tx, & x < 2t. \end{cases}$$

4.24. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 3t, \\ 3t - x, & x < 3t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = x + \frac{1}{3}\sin x \sin 3t,$$

$$q(t,x) = \begin{cases} -t^2, & x \geqslant 3t, \\ -\dfrac{2}{3}tx + \dfrac{1}{9}x^2, & x < 3t. \end{cases}$$

4.25. $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + q(t,x):$

$$v(t,x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 4t, \\ -2\sin\left(2t - \dfrac{x}{2}\right), & x < 4t; \end{cases}$$

$$w(t,x) = \cos 3x \cos 12t - 1 + tx^2 + \frac{16}{3}t^3,$$

$$q(t,x) = \frac{3}{2}t^2.$$

5. Уравнения гиперболического типа. Метод разделения переменных.

5.1. $u(t,x) = \sin 9\pi x \cos 18\pi t.$

5.2. $u(t,x) = \cos 7\pi x \sin 49\pi t.$

5.3. $u(t,x) = \dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi t \sin \pi x + 31\cos 4\pi t \sin 2\pi x +$
$+ \dfrac{2}{\pi}\sin 6\pi t \sin 3\pi x + \left(\dfrac{1}{5\pi}\sin 10\pi t + 2\cos 10\pi t\right)\sin 5\pi x.$

5.4. $u(t,x) = 1 + \left(\dfrac{1}{24}\sin 24t + 2\cos 24t\right)\cos 4x +$
$+ \dfrac{1}{5}\sin 30t \cos 5x.$

5.5. $u(t,x) = 6\sin 3\pi x \cos 9\pi t + \dfrac{1}{21\pi}\sin 7\pi x \sin 21\pi t +$
$+ \sin 15\pi x \cos 45\pi t.$

5.6. $u(t,x) = \sin 2x(2\sin t - \sin 2t).$

5.7. $u(t,x) = \dfrac{1}{4}\cos 2x(\cos 2t - 1) + \dfrac{1}{8}\cos 4x \sin 4t -$
$- \dfrac{1}{12}\cos 6x \sin 6t + \dfrac{t^2}{2}.$

5.8. $u(t,x) = 2\cos 40x \cos 280t + 30t^2.$

5.9. $u(t,x) = 31\sin 2\pi x \cos 4\pi t + 3x - 1.$

5.10. $u(t,x) = 3\sin\dfrac{10\pi t}{3}\sin\dfrac{5\pi x}{3} + 9 - 4x.$

5.11. $u(t,x) = \sin x \cos\dfrac{t}{7} + \sin 5x \cos\dfrac{5t}{7} +$
$+ \sin 7x\left(6\sin t - \cos t + e^{-6t}\right) + 5t^3.$

5.12. $u(t,x) = \dfrac{4}{3}\sin\dfrac{15t}{2}\sin\dfrac{5x}{2} + 5\cos\dfrac{21t}{2}\sin\dfrac{7x}{2} + 5x + 5.$

5.13. $u(t,x) = 2\cos\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{t}{4} + \dfrac{228}{49}\cos\dfrac{7x}{2}\left(1 - \cos\dfrac{7t}{12}\right) + 1.$

5.14. $u(t,x) = \cos 3\pi x \sin 24\pi t.$

5.15. $u(t,x) = (\cos t - \cos 4t)\sin 9x.$

5.16. $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx + \dfrac{x\sin 2t}{2\pi},$

$$T_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n\sin 2t + (6n^2-1)\sin 4nt}{\pi n^2(1-4n^2)}, & n = 2k, \\ \dfrac{-4n\sin 2t + (4n^2+3)\sin 4nt}{2\pi n^2(1-4n^2)}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

5.17. $u(t,x) = \dfrac{2l}{\pi}\sin\dfrac{\pi t}{l}\sin\dfrac{\pi x}{2l} + \dfrac{7l}{5\pi}\sin\dfrac{5\pi t}{l}\sin\dfrac{5\pi x}{2l} +$

$$+ \frac{3l^2}{49\pi^2}\left(t - \frac{l}{7\pi}\sin\frac{7\pi t}{l}\right)\sin\frac{7\pi x}{2l}.$$

5.18. $u(t,x) = \left(e^{-8t} - \cos t + 8\sin t\right)\sin x.$

5.19. $u(t,x) = 2\cos\pi x\cos 9\pi t.$

5.20. $u(t,x) = t\sin 8x\sin 8t.$

5.21. $u(t,x) = \dfrac{1}{6}\sin 6t\sin 3x + \left(\cos 10t - \dfrac{1}{5}\sin 10t\right)\sin 5x.$

5.22. $u(t,x) = 3\cos 3\pi t\sin\pi x +$

$$+ \left(-\frac{2}{81\pi^2} + \left(\frac{2}{81\pi^2} - 1\right)\cos 9\pi t + \frac{1}{9\pi}\sin 9\pi t\right)\sin 3\pi x +$$

$$+ \frac{1}{15\pi}\sin 15\pi t\sin 5\pi x.$$

5.23. $u(t,x) = \dfrac{5}{4\pi}\sin 4\pi t\sin\pi x +$

$$+ \left(\frac{3}{64\pi^2} + \left(1 - \frac{3}{64\pi^2}\right)\cos 8\pi t\right)\sin 2\pi x +$$

$$+ \left(\cos 12\pi t - \frac{1}{6\pi}\sin 12\pi t\right)\sin 3\pi x.$$

5.24. $u(t,x) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{5}{2}\sin 2t\right)\cos x +$

$+ \left(3\cos 6t - \frac{1}{3}\sin 6t\right)\cos 3x + \cos 14t \cos 7x.$

5.25. $u(t,x) = x^2 + x + 4t^2 + 3t + \left(\frac{1}{\pi}\sin 2\pi t - 5\cos 2\pi t\right)\cos \pi x.$

5.26. $u(t,x) = 2tx + t + \left(-\frac{3}{4} + \frac{11}{4}\cos 2t\right)\sin\frac{x}{2} +$

$+ \left(-4\cos 10t + \frac{1}{10}\sin 10t\right)\sin\frac{5x}{2}.$

5.27. $u(t,x) = -2tx + 3\pi t + \left(-\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)\cos x +$

$+ \left(3\cos 9t - \frac{4}{9}\sin 9t\right)\cos 3x.$

5.28. $u(t,x) = \frac{2}{\pi}tx + 3t + 5\cos 3t\sin x - \frac{1}{6}\sin 6t\sin 2x +$

$+ \left(\frac{4}{81} - \frac{247}{81}\cos 9t + \frac{2}{9}\sin 9t\right)\sin 3x.$

5.29. $u(t,x) = \left(-\frac{2}{\pi^2} + \left(3 + \frac{2}{\pi^2}\right)\cos \pi t - \frac{1}{\pi}\sin \pi t\right)\sin\frac{\pi x}{2} +$

$+ \frac{1}{3\pi}\sin 3\pi t\sin\frac{3\pi x}{2} - \cos 5\pi t\sin\frac{5\pi x}{2} + 2tx - 1.$

5.30. $u(t,x) = t - tx + 3\cos 4\pi t\cos \pi x + \frac{1}{12\pi}\sin 12\pi t\cos 3\pi x +$

$+ \left(\frac{1}{80\pi^2} - \left(2 + \frac{1}{80\pi^2}\right)\cos 20\pi t - \frac{1}{20\pi}\sin 20\pi t\right)\cos 5\pi x.$

5.31. $u(t,x) = 2tx^2 - 3x + 2t + \cos 2t\cos x +$

$+ \left(-\frac{1}{8} + \frac{25}{8}\cos 4t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\cos 2x.$

5.32. $u(t,x) = \left(-\frac{32}{9\pi^2} + \left(1 + \frac{32}{9\pi^2}\right)\cos\frac{3\pi t}{4} + \frac{4}{\pi}\sin\frac{3\pi t}{4}\right)\sin\frac{\pi x}{4} +$
$+ \left(3\cos\frac{9\pi t}{4} - \frac{16}{9\pi}\sin\frac{9\pi t}{4}\right)\sin\frac{3\pi x}{4} + tx - 4.$

5.33. $u(t,x) = 3tx - 2 + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t - \sin 3t\right)\sin x +$
$+ \left(-2\cos 9t + \frac{5}{9}\sin 9t\right)\sin 3x + \left(-\frac{2}{225} + \frac{677}{225}\cos 15t\right)\sin 5x.$

5.34. $u(t,x) = -\frac{3}{2}t^2 + \left(\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right)\cos x + 3tx^2 + 2x.$

Библиографические ссылки

1. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. Изд. 6-е, стереотип. Т. 1. М. : Наука, 1968.

2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М. : Наука, 1964.

3. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. Изд. 5-е, стереотип. Т. 2. М. : Наука, 1968.

4. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, испр. М. : КомКнига, 2007.

5. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Изд. 5-е, стереотип. М. : Наука, 1977.

7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М.: ФМЛ, 1989.

Учебное издание

Елфимова Екатерина Александровна
Добросердова Алла Борисовна
Соловьева Анна Юрьевна
Амбаров Александр Васильевич
Мусихин Антон Юрьевич
Зверев Владимир Сергеевич
Пьянзина Елена Сергеевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ: ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Учебное пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Т. А. Федорова*
Корректор *Т. А. Федорова*
Компьютерная верстка *А. Б. Добросердова, В. С. Зверев*

Подписано в печать 30.09.2024 г. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 15,35.
Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 30 экз. Заказ 65

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ ЦСД
620062, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ ЦСД
620062, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
http://print.urfu.ru

Для заметок

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2022

9785799638542