Уравнение теплопроводности.

$u(t,x)$ – температура в стержне длины l

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$$

a^2 – коэффициент температуропроводности

λ – коэффициент теплопроводности

c – коэффициент удельной теплоёмкости

ρ – плотность вещества

Для однозначного решения задачи необходимы дополнительные условия:

а) начальное распределение температуры.

$$u(0,x) = \varphi(x) \leftarrow \text{НУ}$$

б) тепловой режим на границе (ГУ)

I-го рода (Дирихле)

$u(t,0) = \mu(t)$ задана температура на границе

II-го рода (Неймана)

$u_x(t,l) = \frac{q(t)}{\lambda} = \nu(t)$ на границу действует тепловой поток

$q(t)$ – плотность теплового потока

III-го рода (Робена или смешанное)

$u_x(t,0) - \frac{h}{\lambda} \cdot u(t,0) = -\frac{h}{\lambda}\theta(t)$ на границе происходит теплообмен с окружающей средой температуры $\theta(t)$

h – коэффициент теплообмена

$\theta(t)$ – температура внешней среды

$$u_x(t,0) - H u(t,0) = \sigma(t)$$

Решение уравнения теплопроводности на отрезке.

Применение метода разделения переменных.

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad t>0 \qquad 0<x<l$$

$$u(0,x) = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} u(t,0)=0 \\ u(t,l)=0 \end{cases}$$

Следуя методу разделения переменных (методу Фурье), ищем решение в виде $u(t,x) = T(t)X(x)$ подставляем в уравнение и ГУ

$$T'X = a^2 T X'' \quad / a^2 T X \qquad \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$T' = -\lambda^2 a^2 T \qquad X'' = -\lambda^2 X$$

$$\begin{cases} T(t)X(0)=0 \\ T(t)X(l)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$$

Для $X(x)$ опять задача Штурма-Лиувилля собств. ф-ции $X_n(x) = \sin \lambda_n x$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l} \qquad n=1,2,\dots$$

$$T_n' = -\lambda_n^2 a^2 T_n$$

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}$$

решение $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x$

подставляем в НУ

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n x = \varphi(x)$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{x} dx$$

Сведение неоднородных граничных условий к однородным см. стр. 6 и стр 9.

Решение задачи с неоднородным уравнением на отрезке.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x) \qquad t>0 \qquad 0<x<l$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad \begin{cases} u(t,0)=0 \\ u(t,l)=0 \end{cases}$$

Суть метода представлена на стр. 10

$u(t,x) = \sum\limits_k u_k(t) X_k(x)$, где X_k - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, т.е.

$$X_k(x) = \sin \lambda_k (x)$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k=1,2,\dots$$

подставляем $u(t,x)$ в виде ряда в исходное ур-ние:

$$\sum_k u_k'(t) X_k(x) = a^2 \sum_k u_k(t) X_k''(x) + f(t,x)$$

$$\sum_k u_k'(t) X_k(x) = -a^2 \sum_k u_k(t) \lambda_k^2 X_k(x) + \sum_k f_k(t) X_k(x),$$

где $f(t,x) = \sum\limits_k f_k(t) X_k(x)$

$$f_k(t) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l f(t,x) X_k(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x) X_k(x)dx$$

$$u_k'(t) = -a^2 \lambda_k^2 u_k(t) + f_k(t)$$

подставляем в НУ

$\sum\limits_k u_k(0) X_k(x) = \varphi(x) = \sum\limits_k \varphi_k X_k(x)$, где

$$\varphi_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx$$

Переходим к решению следующей задачи:

$$u_k'(t) = -a^2\lambda_k^2 u_k(t) + f_k(t)$$
$$u_k(0) = \varphi_k$$

Решаем методом из ОДУ

а) однородное ур-ние

$$u_k'(t) = -a^2\lambda_k^2 u_k(t)$$
$$u_k(t) = C_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}$$

и затем

вариация произвольной постоянной

подбор частного решения неоднородной задачи

Не такой мощный пример как на

странице 13

$$u_t = 9u_{xx} + 5\sin\frac{3\pi x}{2} + 1 - \frac{x}{2} \qquad t>0 \qquad 0<x<2$$

$$u(0,x) = \sin\pi x + x \qquad \begin{cases} u(t,0) = t \\ u(t,2) = 2 \end{cases}$$

ищем решение в виде $u = v + w$, где w выбираем из условий: $\begin{cases} w(t,0) = t \\ w(t,2) = 2 \end{cases}$

$$w(t,x) = Ax + B \Rightarrow \begin{cases} w(t,0) = B = t \\ w(t,2) = 2A + t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B = t \\ A = \frac{2-t}{2} \end{matrix}$$

$$w(t,x) = \frac{2-t}{2}x + t = x - \frac{tx}{2} + t$$

т.е. $u(t,x) = v(t,x) + \frac{2-t}{2}x + t$

подставляем это представление в исходную задачу

$$v_t - \frac{x}{2} + 1 = 9 v_{xx} + 5\sin\frac{3\pi x}{2} + 1 - \frac{x}{2}$$

$$v(0,x) + x = \sin \pi x + x \qquad \begin{cases} v(t,0) = 0 \\ v(t,2) = 0 \end{cases}$$

Собств. ф-ции и собств. значения задачи Ш.-Л.

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x \quad , \text{где} \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi n}{2} \quad , n = 1, 2, \ldots$$

$$v_t = 9 v_{xx} + 5\sin\frac{3\pi x}{2} \quad , t > 0 \qquad 0 < x < 2$$

$$v(0,x) = \sin \pi x \qquad \begin{cases} v(t,0) = 0 \\ v(t,2) = 0 \end{cases}$$

Ищем решение в виде $v(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x)$

$$\sum_n v_n'(t) X_n(x) = -9 \sum_n v_n(t) \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 X_n(x) + 5 X_3(x)$$

$$\sum_n v_n(0) X_n(x) = X_2(x) \quad , \text{т.е.}$$

1) если $n \neq 2$ и $n \neq 3$

$$\begin{cases} v_n'(t) = -9\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 v_n(t) \\ v_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow v_n(t) = 0$$

2) если $n = 2$

$$\begin{cases} v_2'(t) = -9\pi^2 v_2(t) \\ v_2(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow v_2(t) = C_2 e^{-9\pi^2 t}$$

$$v_2(0) = C_2 = 1 \qquad v_2(t) = e^{-9\pi^2 t}$$

3) при $n = 3$

$$\begin{cases} v_3'(t) = -\frac{81}{4}\pi^2 v_3(t) + 5 \\ v_3(0) = 0 \end{cases}$$

Решаем однородное ур-ние:

$$v_3'(t) = -\frac{81\pi^2}{4} v_3(t) \Rightarrow v_3(t) = C_3 e^{-\frac{81}{4}\pi^2 t}$$

Применяем метод вариации произвольной постоянной.

$$C_3' e^{-\frac{81}{4}\pi^2 t} - \frac{81}{4}\pi^2 C_3 e^{-\frac{81}{4}\pi^2 t} = -\frac{81\pi^2}{4} C_3 e^{-\frac{81}{4}\pi^2 t} + 5$$

$$C_3' = 5 e^{\frac{81}{4}\pi^2 t} \Rightarrow C_3(t) = \frac{20}{81\pi^2} e^{\frac{81}{4}\pi^2 t} + \tilde{C}_3$$

$$v_3(t) = \frac{20}{81\pi^2} + C_3 e^{-\frac{81}{4}\pi^2 t}$$

$$v_3(0) = \frac{20}{81\pi^2} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{20}{81\pi^2}$$

$$v_3(t) = \frac{20}{81\pi^2}\left(1 - e^{-\frac{81}{4}\pi^2 t}\right)$$

Собираем всё вместе и получаем

Ответ: $u(t,x) = e^{-9\pi^2 t} \sin \pi x + \frac{20}{81\pi^2}\left(1 - e^{-\frac{81}{4}\pi^2 t}\right) \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{2-t}{2} x + t$