Эллиптические уравнения

Уравнения не зависящие от времени, т.е. уравнения в которых присутствует лапласиан ф-ции (пример $\Delta u = 0$)

Лапласиан ф-ции позволяет оценить значение исследуемой ф-ции через значения ф-ции в соседних точках по теореме о среднем.

① если $\Delta u > 0$, в т. (x,y), то $u(x,y)$ < среднего значения в соседних т.

② $\Delta u < 0$, в т. (x,y), то $u(x,y)$ > среднего значения в соседних т.

③ $\Delta u = 0$, в т. (x,y), то $u(x,y)$ = среднему значению в соседних т.

Существует 3 основных типа эллиптического уравнения:

1) Уравнение Лапласа: $\Delta u = 0$

2) Уравнение Пуассона: $\Delta u = f$, где f зависит от пространственных переменных или const.

3) Уравнение Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = 0$

Лапласиан в разных системах координат.

1) Декартова система в двумерном пространстве

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

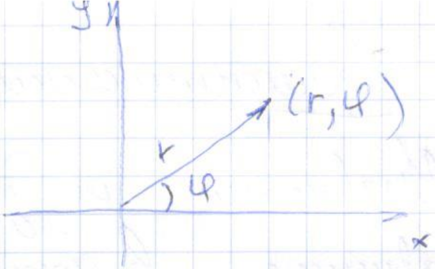
2) Декартова прямоугольная система в трёхмерном пространстве.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

3) Полярная система координат в двумерном пространстве

$r^2 = x^2 + y^2$ $\quad x = r\cos\varphi$ $\quad y = r\sin\varphi$ $\quad tg\varphi = y/x$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$$



Задачи в которых явление не зависит от времени называются краевыми задачами.

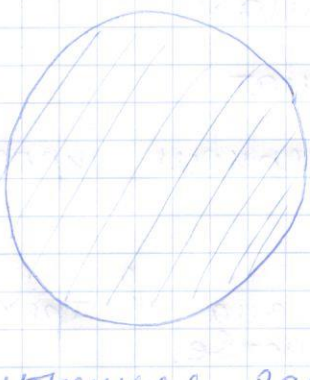
3 основных типа граничных условий.

1) Краевая задача с гр. условиями I-го рода (задача Дирихле)

Требуется найти решение ур-ния в некоторой области, которое принимает на границе заданные значения

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{\text{гр}} = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad 0 < r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\ u(R, \varphi) = g(\varphi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad 1 < r < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\ u(R, \varphi) = g(\varphi) \end{cases}$$



внутренняя задача Дирихле

внешняя задача Дирихле

2) Краевая задача с граничными условиями II-го рода (задача Неймана)

Требуется найти решение ур-ния в некоторой области пространства на границе которой задана внешняя нормальная производная.

Например:
$$\begin{cases}\Delta u = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \sin\theta\end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < r < 1 \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{matrix}$$

при $0 \le \theta < \pi$ $\dfrac{\partial u}{\partial r} \ge 0$ поток направлен внутрь

при $\pi \le \theta < 2\pi$ $\dfrac{\partial u}{\partial r} \le 0$ поток направлен наружу

т.е. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta = 0$

Задача Неймана имеет смысл $\Leftrightarrow$ когда полный поток (тепла) через границу равен 0.

т.е. $\displaystyle\int_C \frac{\partial u}{\partial n} = 0$

Задача Неймана имеет неединственное решение. Добавляя const получим множество других.

3. Краевая задача с граничными условиями III-го рода

$\dfrac{\partial u}{\partial n} + h(u-g) = 0$ на границе, где h - заданная const, а g - заданная ф-ция меняющаяся вдоль границы.

$\dfrac{\partial u}{\partial n} = -h(u-g)$ на Γ

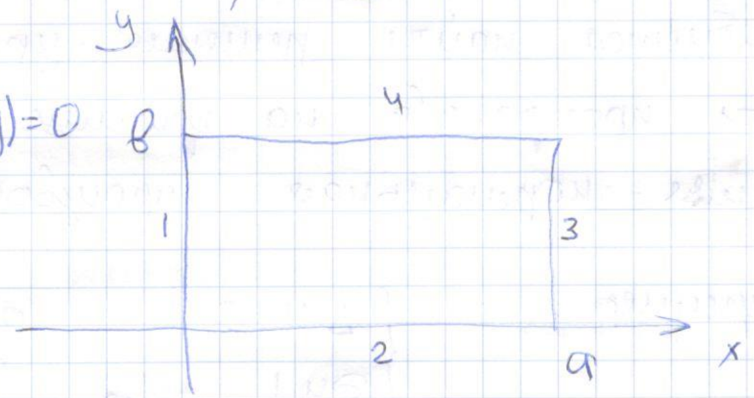
Решение эллиптических задач в декартовой системе координат.

$\Delta u = 0 \qquad 0 < x < a \quad , 0 < y < b$

/ $u(1,2,3)=0$ /

$u(0,y) = u(x,0) = u(a,y) = 0$

$u(x,b) = u_4(x)$



Решаем методом разделения переменных

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$X''Y + Y''X = 0 \quad / XY \qquad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = C$

$X(0)\,Y(y) = 0$

$X(x)\,Y(0) = 0$

$X(a)\,Y(y) = 0$

$\Downarrow$

Задача Ш.-Л.

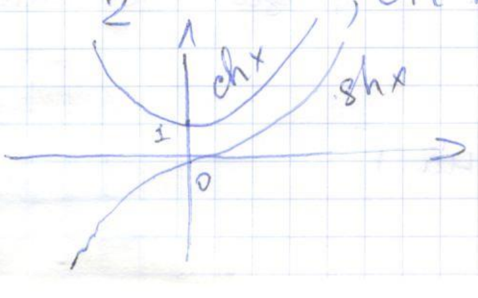
$X'' = CX \qquad\qquad Y'' = -CY$

$\begin{cases} X(0)=0 \\ X(a)=0 \end{cases} \qquad C = -\lambda^2 \qquad Y(0)=0$

$X_n(x) = \sin\lambda_n x$, где $\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$, $n=1,2,\dots$

$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch}\lambda_n y + B_n \operatorname{sh}\lambda_n y$

(*) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



$$Y_n(0) = A_n + 0 = 0 \Rightarrow A_n = 0$$

$$Y_n(y) = B_n \,\mathrm{sh}(\lambda_n y)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{sh}(\lambda_n y) \sin(\lambda_n x)$$

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{sh}(\lambda_n b) \sin(\lambda_n x) = u_4(x)$$

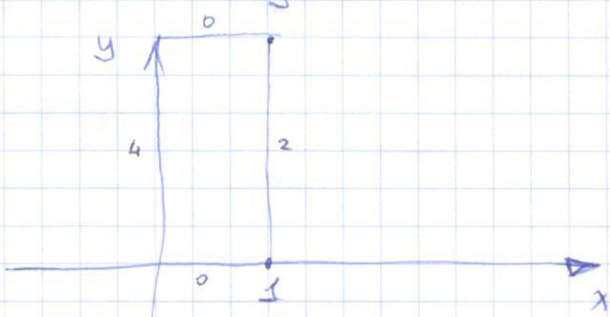
$$B_n = \frac{2}{a\,\mathrm{sh}(\lambda_n b)} \int_0^a u_4(x) \sin \lambda_n x \, dx$$

Пример:

$\Delta u = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 2$

$u(0,y) = 4 \qquad u_y(x,0) = 0$

$u_y(x,2) = 0 \qquad u(1,y) = 2$



Решаем методом разделения переменных

$u = X(x)\,Y(y) \qquad X''Y + Y''X = 0$

$X(0)\,Y(y) = 4 \qquad X(x)\,Y'(0) = 0$

$X(x)\,Y'(2) = 0 \qquad X(1)\,Y(y) = 2$

$$\left.\begin{aligned} &Y_n'' = -\lambda_n^2 Y_n \\ &Y_n'(0) = 0 \\ &Y_n'(2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Задача Ш.-Л.

$Y_n(y) = \cos \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{2}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

Решаем $X_n'' = \lambda_n^2 X_n$

при $n = 0 \qquad X_0'' = 0 \qquad X_0(x) = A_0 x + B_0$

при $n \neq 0 \qquad X_n(x) = A_n \,\mathrm{sh}\, \lambda_n x + B_n \,\mathrm{ch}\, \lambda_n x$

$$u(x,y) = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \,\mathrm{sh}\, \lambda_n x + B_n \,\mathrm{ch}\, \lambda_n x) \cos \lambda_n y$$

$$u(0,y) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n y = 4$$

$$u(1,y) = A_0 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} \lambda_n + B_n \operatorname{ch} \lambda_n) \cos \lambda_n y = 2$$

$$\Downarrow$$

$B_n = 0 \quad n \neq 0$

$A_n = 0 \quad n \neq 0$

$$\begin{cases} B_0 = 4 \\ A_0 + B_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow A_0 = -2$$

Ответ: $u(x,y) = -2x + 4$.