Решения эллиптических уравнений в полярной системе координат

Внутренняя задача Дирихле для круга

Покажем как методом разделения переменных решить данную задачу:

$$\Delta u = 0 \qquad\Rightarrow\qquad u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$$

$$u\big|_{\Gamma_p} = g(\varphi) \qquad\qquad u(R,\varphi) = g(\varphi) \qquad \begin{matrix} 0 \le r < R \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{matrix}$$

решение должно быть ограниченной и периодической ф-цией.

Решаем эту задачу методом разделения переменных: $u(r,\varphi) = Y(r)\,\Phi(\varphi)$

$$Y''\Phi + \frac{1}{r}Y'\Phi + \frac{1}{r^2}Y\Phi'' = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{r^2}{Y\Phi}$$

$$\frac{r^2 Y''}{Y} + \frac{rY'}{Y} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = C$$

$$\Phi'' = -C\Phi$$

1) $C = -\lambda^2 \qquad \Phi'' = \lambda^2\Phi \Rightarrow$ решения

$\Phi(\varphi) = Ae^{\lambda\varphi} + Be^{-\lambda\varphi}$ (решение не периодическая функция $\Rightarrow$ такого не может быть)

2) $C = 0 \qquad \Phi'' = 0 \quad\Rightarrow\quad \Phi(\varphi) = A\varphi + B$

решение - линейная ф-ция, которая может быть периодической.

3) $C = \lambda^2 \qquad \Phi'' = -\lambda^2\Phi \quad\Rightarrow$

$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi$, для периодичности решения, необходимо, чтобы λ - было натуральным рядом $\Rightarrow \Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$

$r^2 Y_n'' + r Y_n' - n^2 Y_n = 0$ ← уравнение Эйлера.
при $n \neq 0$

$Y_n \sim r^\alpha$

$r^2 \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} + r \alpha r^{\alpha-1} - n^2 r^\alpha = 0$

$\alpha^2 - \alpha + \alpha = n^2$ $\qquad \alpha = \pm n \Rightarrow$

$Y_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$ $\qquad \frac{1}{r^n} \xrightarrow[r \to 0]{} \infty \Rightarrow D_n = 0$

при $n = 0$

$r^2 Y_n'' + r Y_n' = 0$ $\qquad y' = V$

$\frac{V'}{V} = -\frac{1}{r}$ $\qquad \ln|V| = \ln\left|\frac{1}{r}\right| + F$

$V = \frac{A_0}{r}$ $\qquad y' = \frac{A_0}{r}$

$Y = A_0 \ln r + B_0$, т.к. $0 \le r < R$, а $\ln r \xrightarrow[r \to 0]{} -\infty$

т.е. $A_0 = 0$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

Для того, чтобы найти A_n и B_n подставляем решение в ГУ.

$$u(R,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi)$$

домножаем на $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ и помним, что

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cdot \cos k\varphi \, d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \pi, & n = k \end{cases} \quad n \neq 0$$

если $n = 0$ $\quad \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi \, d\varphi = 2\pi$

т.е. $A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi$, при $n \neq 0$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi$$

т.е.
$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right),\ \text{где}$$
$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi \qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi$$
$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\,d\varphi$$

Решение внутренней задачи Дирихле для круга ($0\le r<R$)

Решение внешней задачи Дирихле для круга

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0 \qquad R<r<+\infty$$
$$0\le\varphi<2\pi$$
$$u(R,\varphi)=g(\varphi)$$

Все как на стр. 32-33, отличия обведены зелёным, теперь $r^n \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow C_n=0$

$\ln r \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow A_0=0$

т.е.
$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right),\ \text{где}$$
A_n и B_n такие-же как в решении внутр. задачи

Решение внешней задачи Дирихле для круга ($R<r<+\infty$)

Решение задачи Дирихле в кольце.

$$\Delta u=0 \qquad R_1<r<R_2 \qquad 0\le\varphi<2\pi$$
$$u(R_1,\varphi)=g_1(\varphi)$$
$$u(R_2,\varphi)=g_2(\varphi)$$

Решения полностью повторяет решение для круга, только обведённое зелёным цветом не убирается. , т.е

$$u(r,\varphi) = A_0 \qquad + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\varphi +$$

$$+ (C_n r^n + C_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

подставляем в ГУ и получаем системы:

$$\begin{cases} A_0 \ln R_1 + B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varphi) d\varphi \\ A_0 \ln R_2 + B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\varphi) d\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n R_1^n + B_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \\ A_n R_2^n + B_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_n R_1^n + D_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi \\ C_n R_2^n + D_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi \end{cases}$$

Пример 1

$$\Delta u = 0 \qquad 0 < r < 1 \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$u(1,\varphi) = 1 + \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 3\varphi + \cos 4\varphi$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$u(R,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = 1 + \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 3\varphi + \cos 4\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$A_0 = 1 \quad B_1 = 1 \quad B_3 = \frac{1}{2} \quad A_4 = 1$$

остальные A_n и $B_n = 0$

Ответ: $u(r,\varphi) = 1 + r\sin\varphi + r^3 \sin 3\varphi + r^4 \cos 4\varphi$

Пример 2.

$\Delta u = 0 \qquad 1 < r < +\infty \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$u(1,\varphi) = 3 + 2\cos^2\varphi$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$u(1,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = 3 + 2\cos^2\varphi =$$
$$= 3 + 2(1+\cos 2\varphi)/2 =$$
$$= 4 + \cos 2\varphi$$

$A_0 = 4 \qquad B_2 = 1$

Ответ: $u(r,\varphi) = 4 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \cos 2\varphi$

Пример 3.

$\Delta u = 0 \qquad 1 \le r \le 2 \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$u(1,\varphi) = 10\cos\varphi$

$u(2,\varphi) = 17\cos\varphi$

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\varphi + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi \right]$$

$$u(1,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + B_n)\cos n\varphi + (C_n + D_n)\sin n\varphi \right] = 10\cos\varphi$$

$$u(2,\varphi) = A_0 + B_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n 2^n + B_n \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \cos n\varphi + \left(C_n 2^n + D_n \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \sin n\varphi \right] = 17\cos\varphi$$

$$(1)\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_0 + B_0 \ln 2 = 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} A_1 + B_1 = 10 \\ 2A_1 + \frac{1}{2}B_1 = 17 \end{cases}$$

$n \ne 0$
$n \ne 1$

$$(3)\begin{cases} A_n + B_n = 0 \\ A_n 2^n + B_n 2^{-n} = 0 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} C_n + D_n = 0 \\ C_n 2^n + D_n 2^{-n} = 0 \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} A_0 = 0 \\ B_0 = 0 \end{cases}$ (2) $\frac{3}{2} B_1 = 3$ $\begin{cases} B_1 = 2 \\ A_1 = 8 \end{cases}$

(3) $A_n = -B_n$

$B_n(2^{-n} - 2^{n}) = 0$

$\begin{cases} B_n = 0 \\ A_n = 0 \end{cases}$

(4) $C_n = D_n = 0$

Ответ: $u(r, \varphi) = \left(8r + \frac{2}{r}\right) \cos \varphi$