ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

ИОНЦ «Информационная безопасность»

Математико-механический факультет

Кафедра алгебры и дискретной математики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Графы и матроиды

Учебное пособие «Графы и матроиды»

Авторы:

Баранский В.А., доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дискретной математики

Расин В. В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дискретной математики

Екатеринбург
2008

Предисловие

Основой для данного учебного пособия послужили лекции, которые читались авторами для студентов математико-механического факультета Уральского государственного университета им. А. М. Горького, обучающихся по специальностям «Математика, прикладная математика», «Математика, компьютерные науки» и «Компьютерная безопасность».

В книге излагается ряд разделов теории графов и теории матроидов. Теория графов за последние десятилетия развилась в весьма обширную ветвь математики, имеющую многочисленные приложения в самых разнообразных сферах человеческой деятельности. В настоящее время практически невозможно в одном учебном пособии отразить все разделы теории графов. Подбор тем, поднятых в книге, во многом определен вкусами авторов. Нам хотелось представить основное, устоявшееся ядро современной теории графов. Мы стремились привести главные достижения, не останавливаясь на мелочах и не углубляясь в детальный обзор результатов по обсуждаемым темам. Мы стремились также привести самые лаконичные и изящные доказательства из известных нам. Часть доказательств была существенно переработана нами и некоторые из них стали относительно далеки от своих прототипов.

В качестве основной литературы отметим книги [3], [6], [24], [29], [46], [49], [52], [55]. Для удобства читателям приводится достаточно полный список литературы по рассматриваемому предмету, содержащий книги, которые были опубликованы на русском языке. Мы обращаем внимание читателя на фундаментальные книги [59] – [63], русских переводов которых, к сожалению, не имеется.

Нами используется терминология, наиболее распространенная в математической литературе как за рубежом, так и в России. Теоремы и предложения нумеруются в книге двумя числами: первое – номер главы, а второе – порядковый номер утверждения данного типа в указанной главе.

Компьютерная верстка книги выполнена В.В.Расиным с использованием пакета $\LaTeX2_\epsilon$

Мы выражаем нашу благодарность Е.Г.Третьяковой, которая выполнила компьютерную верстку части рисунков.

Уральский госуниверситет, В.А. Баранский
г. Екатеринбург В.В. Расин
сентябрь, 2008

1. Основные понятия теории графов

1.1. Основные определения

Пусть V — непустое конечное множество. Через $V^{(2)}$ обозначим множество всех двухэлементных подмножеств из V.

Обыкновенным графом G называется пара множеств (V, E), где E — произвольное подмножество из $V^{(2)}$.

Элементы множеств V и E называют соответственно вершинами и ребрами графа G. Множества вершин и ребер графа G будем обозначать также через VG и EG.

Обыкновенные графы удобно представлять в виде *диаграмм*, на которых вершинам соответствуют выделенные точки, а ребрам — непрерывные кривые, соединяющие эти точки. На рис. 1 изображены диаграммы трех обыкновенных графов.

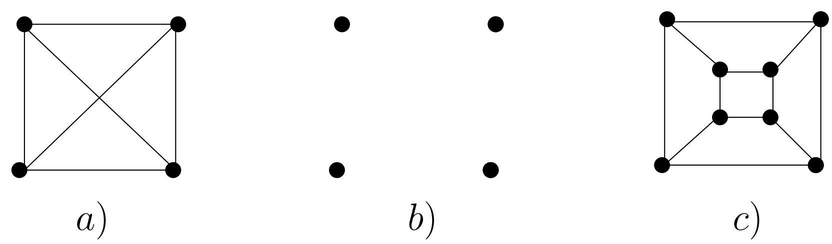


Рис. 1

Часто приходится рассматривать объекты более общего вида, чем обыкновенные графы (см. рис. 2). Такие объекты в дальнейшем будут называться *графами*. На рис. 2 a) изображен граф, в котором существуют пары вершин, соединенные более чем одним ребром. Различные ребра, соединяющие две данные вершины, называются *кратными*. Граф, изображенный на рис. 2 b), содержит ребра, соединяющие вершину саму с собой. Такие ребра называют *петлями*.

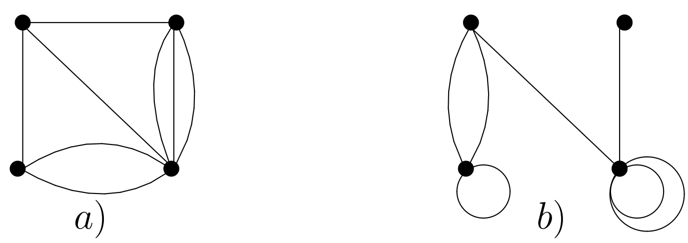


Рис. 2

Более точно, *графом* называют тройку (V, E, φ), где V, E — конечные множества, $V \neq \emptyset$ и φ — отображение из E в $V^{(2)} \cup V$. Если $\varphi(e) = \{u, v\}$, где $u \neq v$, то говорят, что ребро e *соединяет* вершины u, v. В этом случае будем писать $e = uv$. Если $\varphi(e) = u$, то ребро e называют *петлей* в вершине u. В этом случае будем также писать $e = uu$ и говорить, что e соединяет вершину u саму с собой.

Записывая произвольный граф, мы часто будем опускать φ и представлять граф в виде $G = (V, E)$.

Граф, по существу, есть набор из двух множеств произвольной природы — непустого множества вершин и множества ребер, причем каждому ребру соответствуют две концевые вершины, которые, вообще говоря, могут и совпадать (в этом случае ребро является петлей).

Отметим, что *обыкновенный граф* — это граф без петель и кратных ребер.

Граф G, имеющий n вершин, часто называют *n-графом*; если, кроме того, G содержит m ребер, то G — *(n, m)-граф*.

Если $e = uv$ — некоторое ребро данного графа, то вершины u, v называются *смежными*; говорят также, что u, v — *концевые* вершины ребра e. Ребро e и вершина v *инцидентны*, если v — концевая вершина для e. Ребра e и f называются *смежными*, если они имеют общую концевую вершину.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — два графа. Биективное отображение $\psi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется *изоморфизмом* G_1 на G_2, если для любых $u, v \in V_1$ число ребер, соединяющих вершины u и v в G_1, равно числу ребер, соединяющих $\psi(u)$ и $\psi(v)$ в G_2 (разумеется, при $u = v$ число петель в вершине u равно числу петель в вершине $\psi(u)$).

Отметим, что в случае обыкновенных графов изоморфизм — это биекция, сохраняющая отношение смежности; иными словами, изоморфизм ψ характеризуется свойством: произвольные вершины u, v смежны в графе G_1 тогда и только тогда, когда вершины $\psi(u), \psi(v)$ смежны в графе G_2.

Графы G_1 и G_2 *изоморфны* ($G_1 \cong G_2$), если существует изоморфизм G_1 на G_2. На рис. 3 приведены диаграммы двух изоморфных графов. Действительно, отображение ψ, определенное правилом $\psi(u_i) = v_i$, $(1 \leqslant \leqslant i \leqslant 6)$, очевидно, является изоморфизмом.

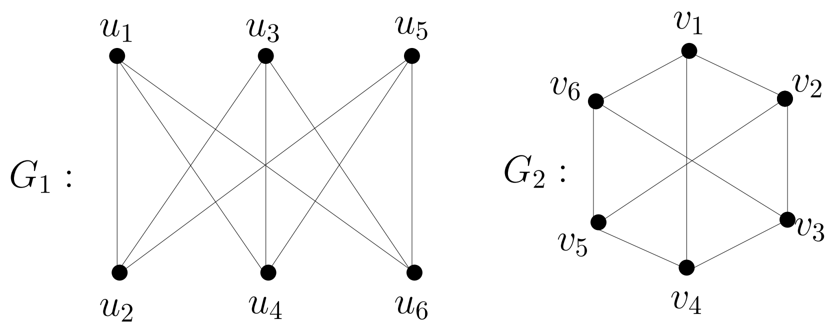


Рис. 3

Отношение «быть изоморфными» на множестве всех графов, очевидно, является отношением эквивалентности. Таким образом, множество всех графов разбивается на классы попарно изоморфных графов. Заметим, что диаграмма задает граф с точностью до изоморфизма.

Степенью вершины v называется число ребер, инцидентных этой вершине, причем каждая петля учитывается дважды. Степень вершины v обозначается через $\deg_G v$ или просто через $\deg v$. Ясно, что в обыкновенном графе степень вершины v равна количеству вершин, смежных с v. *Окружением* $N(v)$ вершины v называется множество всех вершин, смежных с v.

Если $\deg v = 0$, то вершина v называется *изолированной*, а если $\deg v = 1$, то — *висячей*. Ребро e, инцидентное висячей вершине, также называют *висячим*.

Лемма 1 (о рукопожатиях). *Пусть G — произвольный граф. Тогда*

$$\sum_{v \in VG} \deg v = 2|EG|.$$

Доказательство. При подсчете суммы степеней произвольное ребро $e = uw$ внесет свой вклад, равный единице, как в $\deg u$, так и в $\deg w$, причем петля будет учитыватся дважды. $\square$

Следствие. *Произвольный граф содержит четное число вершин нечетной степени.*

Доказательство. Пусть V_0 и V_1 — соответственно множества вершин четной и нечетной степени. Тогда

$$\sum_{v \in V_0} \deg v + \sum_{v \in V_1} \deg v = 2|EG|.$$

Ясно, что первое слагаемое четно. Поэтому второе слагаемое также четно. Так как во второй сумме все слагаемые нечетны, их число четно. Следовательно, множество V_1 содержит четное число вершин. □

Будем называть граф *одноэлементным*, если он имеет единственную вершину. Граф G называется *нулевым* или *вполне несвязным*, если множество его ребер EG пусто. Нулевой n-граф будем обозначать через O_n. Диаграмма графа O_4 приведена на рис. 1 b). Ясно, что нулевой граф является обыкновенным графом.

Обыкновенный граф G называется *полным* графом, если любые его две различные вершины смежны. Для полного n-графа применяется обозначение K_n. На рис. 1 a) изображен полный граф K_4. Очевидно, степень каждой вершины в графе K_n равна $n-1$. Поэтому из леммы о рукопожатиях следует, что число ребер в K_n равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Граф G называют *двудольным*, если множество VG можно разбить на два непустых подмножества X и Y так, что любое ребро графа соединяет вершину из X с вершиной из Y. Множества X и Y — это *доли* двудольного графа G. Если любые вершины $x \in X$ и $y \in Y$ смежны и двудольный граф является обыкновенным графом , то G называют *полным двудольным* графом. Если $|X| = p$, $|Y| = q$, то такой полный двудольный граф обозначают через $K_{p,q}$.

Граф H называется *подграфом* графа G, если $VH \subseteq VG$ и $EH \subseteq$ $\subseteq EG$. В число подграфов графа G будем включать и *пустой подграф* $\emptyset$. Если $VH = VG$, то подграф H называется *óстовным* подграфом. *Редукция* графа G — это такой его óстовный подграф H, что H является обыкновенным графом с наибольшим возможным числом ребер.

Пусть U — подмножество из VG. Обозначим через D множество всех ребер $e = uv \in EG$ таких, что $u, v \in U$. Граф $G(U) = (U, D)$ называется *подграфом, порожденным множеством вершин* U.

Аналогично определяется подграф, порожденный заданным множеством ребер. Пусть $D \subseteq EG$. Обозначим через U множество всех вершин, являющихся концевыми для ребер из D. Тогда граф $G(D) =$ $= (U, D)$ называют *подграфом, порожденным множеством ребер* D.

Пусть G — произвольный граф и H — его подграф. С каждой вершиной v и каждым ребром e можно связать подграфы $H - v$, $H - e$ и $H + e$.

Подграф $H - v$ получается из подграфа H удалением вершины v и всех инцидентных этой вершине ребер. Отметим, что если v не лежит в подграфе H, то $H - v = H$.

Подграф $H - e$ получается из H удалением ребра e. Здесь также $H - e = H$, если e не лежит в H.

Подграф $H + e$ получается из H добавлением ребра e и двух его концевых вершин. Если e лежит в H, то $H + e = H$.

Через $\mathrm{Sub}(G)$ будем обозначать множество всех подграфов графа G. Определим отношение $\leqslant$ на $\mathrm{Sub}(G)$, полагая $H_1 \leqslant H_2$ для подграфов H_1 и H_2 графа G тогда и только тогда, когда H_1 является подграфом в H_2, т. е. когда $VH_1 \subseteq VH_2$ и $EH_1 \subseteq EH_2$. Очевидно, отношение $\leqslant$ есть частичный порядок на $\mathrm{Sub}(G)$. Будем говорить, что H_1 *содержится* в H_2, если $H_1 \leqslant H_2$.

Пусть H_1 и H_2 — произвольные подграфы графа G.

Определим *объединение* $H_1 \cup H_2$ подграфов H_1 и H_2, полагая

$$V(H_1 \cup H_2) = VH_1 \cup VH_2 \quad \text{и} \quad E(H_1 \cup H_2) = EH_1 \cup EH_2.$$

Очевидно, $H_1 \cup H_2$ является точной верхней границей для H_1 и H_2 в $\mathrm{Sub}(G)$ относительно $\leqslant$.

Определим *пересечение* $H_1 \cap H_2$ подграфов H_1 и H_2, полагая

$$V(H_1 \cap H_2) = VH_1 \cap VH_2 \quad \text{и} \quad E(H_1 \cap H_2) = EH_1 \cap EH_2.$$

Очевидно, $H_1 \cap H_2$ является точной нижней границей для H_1 и H_2 в $\mathrm{Sub}(G)$ относительно $\leqslant$.

Нетрудно установить, что $\mathrm{Sub}(G)$ является дистрибутивной решеткой относительно $\leqslant$ с указанными операциями $\cup$ и $\cap$.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_t$ — подграфы графа G, и выполнено условие $H_i \cap$ $\cap H_j = \emptyset$, если $i \neq j$ и $i, j = 1, 2, \ldots, t$. Тогда $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_t$ называется *дизъюнктным объединением* и обозначается через $H_1 \,\dot\cup\, H_2 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, H_t$.

1.2. Маршруты, связность, циклы и разрезы

Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер

$$v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{t-1}, e_t, v_t,$$

в которой $e_i = v_{i-1}v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$.

Такой маршрут кратко называют (v_0, v_t)-*маршрутом* и говорят, что он *соединяет* v_0 с v_t; в свою очередь вершины v_0, v_t — это *концевые* вершины указанного маршрута. Часто маршрут изображают в виде

$$v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_t} v_t.$$

Отметим, что стрелки здесь указывают лишь порядок следования вершин в маршруте.

Длиной маршрута называют количество содержащихся в нем ребер. Случай, когда длина маршрута равна нулю, не исключается; в этом случае маршрут сводится к одной вершине.

Заметим, что в обыкновенном графе маршрут полностью определяется последовательностью $v_0, v_1, \ldots, v_t$ своих вершин.

Если $v_0 = v_t$, то (v_0, v_t)-маршрут называется *замкнутым.*

В произвольном маршруте любое ребро и любая вершина, разумеется, могут повторяться. Накладывая ограничения на число повторений вершин или ребер, мы приходим к следующим частным видам маршрутов.

Цепь — это маршрут без повторяющихся ребер. Цепь называется *простой цепью*, если в ней нет повторяющихся вершин кроме, быть может, совпадающих концевых вершин. Замкнутая простая цепь называется *циклом.* Заметим, что цикл полностью определяется множеством своих ребер, поэтому часто под циклом мы будем понимать соответствующее ему множество ребер. Петля дает цикл длины 1, пара кратных ребер образует цикл длины 2. Циклы длины 3 называют обычно *треугольниками.*

Лемма 1. *Если для некоторых вершин u, v в графе существует (u, v)-маршрут, то существует и простая (u, v)-цепь.*

Доказательство. Рассмотрим в графе (u, v)-маршрут наименьшей длины. Покажем, что этот маршрут является простой цепью. Если в нем имеется повторяющаяся вершина w, то, заменяя часть маршрута от первого вхождения вершины w до ее второго вхождения на одну вершину w, мы получим более короткий (u, v)-маршрут. $\square$

Граф G называется *связным*, если для любых двух различных вершин u, v существует (u, v)-маршрут.

Оказывается, произвольный граф можно получить как объединение связных графов. С этой целью на множестве вершин VG графа G определим *отношение связности* $\sim$, полагая

$$u \sim v \iff \text{существует } (u, v)\text{-маршрут.}$$

Легко видеть, что это отношение является отношением эквивалентности. Обозначим через $V_1, V_2, \ldots, V_k$ классы этого отношения. Пусть $G_i = G(V_i)$ — подграф, порожденный множеством вершин V_i, $(1 \leqslant i \leqslant$

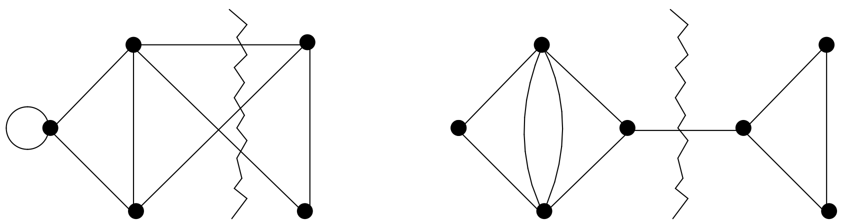
$\leqslant k$). Графы $G_1, G_2, \ldots, G_k$ называются *компонентами связности* графа G. Ясно, что каждая компонента связности является связным подграфом. Очевидно, каждый связный подграф графа G является подграфом некоторой его компоненты связности. Поэтому множество компонент связности — это множество всех максимальных связных подграфов данного графа, и любое ребро принадлежит некоторой компоненте связности.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Каждый граф является дизъюнктным объединением своих компонент связности.

В дальнейшем граф, имеющий n вершин, m ребер и k компонент связности будем называть (n, m, k)-*графом.*

Разрезающим множеством ребер графа называется множество ребер, удаление которого из графа приводит к увеличению числа компонент связности. Минимальное по включению разрезающее множество ребер графа называется его *разрезом. Мост* графа — это ребро, составляющее одноэлементный разрез. Иными словами, при удалении моста число компонент связности возрастает. На рис. 4 показаны примеры разрезов в графах, причем на рис. 4 b) показан мост.



a) b)

Рис. 4

Лемма 2. *При удалении из графа моста число компонент связности увеличивается точно на единицу.*

Доказательство. Пусть из графа удаляется мост $e = uv$. В графе $G - e$ вершины u и v нельзя соединить простой цепью, иначе сохранится отношение связности и, следовательно, сохранится число компонент связности. Таким образом, вершины u и v лежат в разных компонентах связности графа $G - e$.

Пусть x — произвольная вершина графа G, для которой существует простая (x, v)-цепь (в силу леммы 1 это в точности те вершины, которые лежат в той же компоненте связности графа G, что и вершина v). Если в этой простой цепи не встречается ребро e, то вершины x и v лежат в одной компоненте связности графа $G - e$. Если в такой простой цепи встречается ребро e, то цепь обязательно имеет вид

$$x \longrightarrow \ldots \longrightarrow u \xrightarrow{e} v.$$

Поэтому вершины x и u лежат в одной компоненте связности графа $G - e$.

Итак, при удалении моста e точно одна компонента связности графа G, а именно, компонента, содержащая v, распадается на две компоненты связности графа $G - e$. $\square$

Лемма 3. *При удалении из графа ребер его разреза число компонент связности увеличивается точно на единицу.*

Доказательство. Пусть из графа G удаляется разрез $\{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$. Можно считать, что $t > 1$. После удаления множества ребер $\{e_1, e_2, \ldots, e_{t-1}\}$ число компонент связности сохраняется и ребро e_t становится мостом. Дальнейшее удаление ребра e_t в силу леммы 2 приводит к увеличению числа компонент связности ровно на единицу. $\square$

Для произвольного ребра графа G есть две возможности: либо e содержится в некотором цикле графа, либо e не содержится ни в каком цикле графа. В первом случае ребро e называют *циклическим* ребром, а во втором — *ациклическим*. Выясним связь между ациклическими ребрами и мостами.

Лемма 4. *Ребро графа является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном цикле.*

Доказательство. Пусть $e = uv$ — мост. Если e содержится в некотором цикле, то существует простая (u, v)-цепь, не содержащая e. Следовательно, после удаления ребра e из графа отношение связности не изменится, что невозможно.

Обратно, пусть $e = uv$ не является мостом. После удаления e из графа G вершины u и v будут лежать в одной компоненте связности графа $G - e$. В силу леммы 1 в графе $G - e$ имеется простая (u, v)-цепь. Добавляя к этой цепи ребро e, получим цикл графа G, содержащий ребро e. $\square$

Из леммы 4 вытекает, что ациклические ребра — это в точности мосты.

Лемма 5. *Пусть множество вершин связного граф G разбито на два непустых непересекающихся подмножества U и W. Тогда существует такое ребро $e = uw$, что $u \in U$ и $w \in W$.*

Доказательство. Возьмем две вершины $x \in U$ и $y \in W$. В силу связности графа G существует простая (x, y)-цепь:

$$x = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_t} v_t = y.$$

Пусть v_i — последняя вершина цепи, лежащая в U. Тогда $v_i \neq y$ и $v_{i+1} \in W$. Следовательно, ребро $e_{i+1} = v_i v_{i+1}$ является искомым. $\square$

Теорема 1.1. *Пусть G — обыкновенный (n, m, k)-граф. Тогда выполнено двойное неравенство*

$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Доказательство. Проверим сначала верхнюю оценку. Обозначим через $\tilde{G}$ обыкновенный граф, имеющий n вершин, k компонент связности и наибольшее возможное число ребер $\tilde{m}$. Покажем, что

$$\tilde{m} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Легко понять, что каждая компонента связности графа $\tilde{G}$ является полным графом. Поэтому

$$\tilde{G} = K_{n_1} \dot{\cup} K_{n_2} \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} K_{n_k}.$$

Можно считать, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$.

Убедимся, что $n_2 = 1$. Предположим, что $n_2 > 1$. Пусть u — некоторая вершина графа K_{n_2}. Удалим $n_2 - 1$ ребер, инцидентных вершине u, а затем добавим n_1 ребер, соединяющих вершину u с каждой вершиной графа K_{n_1}, т. е. перенесем вершину u из второй компоненты связности в первую. Поскольку $n_1 > n_2 - 1$, получим граф, имеющий n вершин, k компонент связности и больше чем $\tilde{m}$ ребер. Это противоречит выбору графа $\tilde{G}$. Следовательно, $n_2 = 1$. Тогда $n_2 = \ldots = n_k = 1$, т. е. все ребра графа $\tilde{G}$ содержатся в полном графе K_{n_1} и $n_1 = n - k + 1$. Поэтому

$$\tilde{m} = \frac{(n_1 - 1)n_1}{2} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Обратимся теперь к нижней оценке. Для ее проверки применим индукцию по числу ребер. Если $m = 0$, то $n = k$, и требуемое неравенство очевидно. Пусть $m > 0$. Предположим, что для всех графов с числом ребер, меньшим чем m, оценка имеет место. Рассмотрим (n, m, k)-граф G. Пусть $G_1 = G - e$, где e — некоторое ребро графа G. Тогда G_1 является $(n, m-1, k_1)$-графом, где $k_1 \leqslant k+1$ в силу леммы 2. Следовательно,

$$m - 1 \geqslant n - k_1 \geqslant n - k - 1,$$

т. е. $m \geqslant n - k$. □

Следствие 1. *Пусть G — обыкновенный (n, m)-граф. Если*

$$m > \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

то граф G связен.

Доказательство. Пусть k — число компонент связности графа G. Если $k \geqslant 2$, то

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \leqslant \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

что невозможно. Следовательно, $k = 1$, т. е. граф G связен. □

Следствие 2. *Если G — произвольный (n, m, k)-граф, то $m \geqslant n-k$.*

Доказательство. Пусть обыкновенный (n, m_1, k)-граф G_1 является редукцией графа G. Тогда $m \geqslant m_1 \geqslant n - k$. □

Теорема 1.2 (Кёниг). *Ненулевой граф является двудольным графом тогда и только тогда, когда он не имеет циклов нечетной длины.*

Доказательство. В двудольном графе, очевидно, нет петель и и любой замкнутый маршрут имеет четную длину.

Обратное утверждение теоремы достаточно доказать для связного графа G. Пусть ненулевой граф G связен и не имеет циклов нечетной длины. Зафиксируем некоторую его вершину v_0. Разобьем множество всех вершин V на два непустых непересекающихся подмножества V_0 и V_1 следующим образом. В V_0 (в V_1) поместим все такие вершины u

графа G, что кратчайшая (v_0, u)-цепь имеет четную (соответственно нечетную) длину. Ясно, что $v_0 \in V_0$.

Покажем, что в графе G нет ребер $e = ab$ таких, что вершины a и b лежат одновременно в V_0 или в V_1. Пусть от противного, для ребра $e = ab$ выполняется $a, b \in V_0$ (случай $a, b \in V_1$ рассматривается аналогично). Пусть P_0 — кратчайшая (v_0, a)-цепь, а P_1 — кратчайшая (v_0, b)-цепь. Обе эти цепи имеют четную длину. Обозначим через u последнюю вершину цепи P_0, принадлежащую цепи P_1. Тогда подцепи от v_0 до u в цепях P_0 и P_1 имеют одинаковую длину (иначе, пробежав по более короткой подцепи от v_0 до u мы смогли бы найти более короткую цепь от v_0 до a или от v_0 до b, чем цепь P_0 или цепь P_1). Очевидно, подцепи от u до a и от u до b в цепях P_0 и P_1 имеют одинаковую четность. Тогда они вместе с ребром e образуют цикл нечетной длины, что невозможно. □

1.3. Ориентированные графы

Пусть V, D — произвольные множества, причем $V \neq \emptyset$. Обозначим через V^2 декартов квадрат множества V.

Ориентированным графом или, короче, *орграфом* G называется тройка (V, D, φ), где φ — некоторое отображение множества D в множество V^2. Элементы множеств V и D называются соответственно *вершинами* и *дугами* орграфа G. Множества вершин и дуг орграфа G удобно обозначать через VG и DG соответственно. Если f — дуга, то $\varphi(f)$ является упорядоченной парой (u, v), где $u, v \in V$. Дуга f *выходит из вершины* u и *заходит в вершину* v; в свою очередь u и v называются концевыми вершинами дуги f; в дальнейшем будем писать $f = \overrightarrow{uv}$ (а иногда даже — $f = uv$, если нет опасности возникновения путаницы).

При записи произвольного орграфа он, как правило, будет представляться в виде $G = (V, D)$.

Орграфы принято изображать при помощи диаграмм, аналогичных диаграммам для графов. Разница состоит лишь в том, что линия, изображающая дугу, имеет направление.

С каждым орграфом $G = (V, D)$ естественно связать граф $G_0 = (V, E)$, называемый *основанием* данного орграфа. Для получения основания необходимо в орграфе G заменить каждую дугу $f = \overrightarrow{uv}$ ребром $e = uv$. На рис. 5 изображены орграф и его основание.

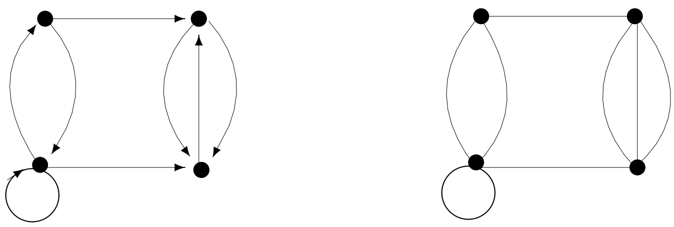


Рис. 5

Орграф G называется *связным*, если связным является его основание.

Ориентированым маршрутом или, короче, *ормаршрутом* в орграфе G называется чередующаяся последовательность вершин и дуг

$$v_0, f_1, v_1, \ldots, v_{t-1}, f_t, v_t,$$

в которой $f_i = \overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$.

Такой ормаршрут принято называть (v_0, v_t)-ормаршрутом; вершины v_0 и v_t называются соответственно *начальной* и *конечной* вершинами такого ормаршрута. Если $v_0 = v_t$, то ормаршрут называют *замкнутым.* Количество дуг, составляющих ормаршрут, — это длина ормаршрута.

Ормаршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называют *орцепью. Простая орцепь* — это орцепь без повторяющихся вершин (кроме, быть может, совпадающих начальной и конечной вершин). Замкнутая простая орцепь называется *орциклом* или *контуром.*

Нетрудно проверить, что существование (u, v)-ормаршрута гарантирует существование простой (u, v)-орцепи.

Говорят, что вершина v *достижима* из вершины u, если существует (u, v)-ормаршрут. Орграф G *сильно связен* или *орсвязен*, если любая его вершина достижима из любой другой вершины. Очевидно, сильно связный орграф является связным; обратное утверждение, разумеется, не верно.

Граф G называется *ориентируемым*, если он является основанием некоторого сильно связного орграфа.

Теорема 1.3. *Связный граф G ориентируем тогда и только тогда, когда каждое его ребро не является мостом.*

Доказательство. Пусть граф G является основанием орграфа H и G содержит мост e. Тогда в H имеется дуга $f = \overrightarrow{uv}$, где u, v — концы ребра e. Очевидно, в H нет (v, u)-ормаршрутов. Следовательно, граф G не является ориентируемым.

Обратно, пусть граф G не имеет мостов, т. е. каждое ребро графа G содержится в некотором цикле. Поскольку любой цикл является ориентируемым графом, в графе G существует максимальный ориентируемый подграф H. Убедимся, что $H = G$. Допустим, что это равенство не выполнено. В силу связности графа G существует ребро e, инцидентное вершине v из H и не лежащее в H. По предположению ребро e лежит в некотором цикле C. Обозначим через Q множество ребер цикла, не принадлежащих подграфу H. Нетрудно понять, что добавив к H все ребра из множества Q, мы снова получим ориентируемый подграф в противоречие с выбором H. $\square$

Пусть G — произвольный орграф. *Полустепенью исхода* $\overleftarrow{\deg}\, v$ вершины v называется число всех дуг, имеющих v в качестве начала. Аналогично, *полустепень захода* $\overrightarrow{\deg}\, v$ — это число всех дуг, для которых вершина v является концом. Орграф, содержащий n вершин и m дуг будем называть (n, m)-*орграфом.*

Полустепени исхода и полустепени захода связаны следующим очевидным образом.

Лемма 1. *Пусть G — произвольный (n, m)-орграф. Тогда*

$$\sum_{v \in VG} \overrightarrow{\deg}\, v = \sum_{v \in VG} \overleftarrow{\deg}\, v = m.$$

Это утверждение аналогично лемме 1 из разд. 1.1; его часто называют *орлеммой о рукопожатиях.*

1.4. Матрицы, ассоциированные с графом

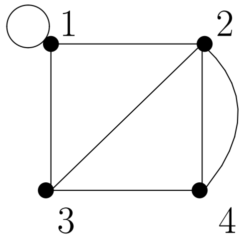
Пусть G — произвольный n-граф. Упорядочим множество вершин графа

$$VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Иными словами, занумеруем вершины графа числами от 1 до n. Граф, у которого множество вершин линейно упорядочено или, другими словами, занумеровано натуральными числами от 1 до n, где n — число вершин графа, называется *помеченным* графом.

Определим матрицу *смежности* $A = A(G) = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ графа G, полагая α_{ij} равным числу ребер, соединяющих вершины v_i и v_j, причем при $i = j$ каждую петлю учитываем дважды.

На рис. 6 приведен пример графа с некоторой нумерацией вершин и указана соответствующая матрица смежности.



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 6

Очевидно, матрица смежности — это квадратная симметрическая матрица. Сумма элементов i-ой строки равна $\deg v_i$, т. е. $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = \deg v_i$. Отметим, что для обыкновенных графов матрица смежности бинарна, т. е. состоит из нулей и единиц, причем ее главная диагональ целиком состоит из нулей.

Для данного графа имеется, вообще говоря, несколько матриц смежности, отвечающих различным его упорядочениям. Очевидно, одна матрица смежности графа получается из другой его матрицы смежности с помощью некоторой перестановки строк и точно такой же перестановки столбцов.

Пусть σ — произвольная подстановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Определим матрицу $S(\sigma) = (\sigma_{ij})_{n\times n}$, полагая

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(i) = j, \\ 0, & \text{если } \sigma(i) \neq j. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $S(\sigma^{-1}) = S^{-1}(\sigma)$ и матрица

$$S^{-1}(\sigma)AS(\sigma) = S(\sigma^{-1})AS(\sigma)$$

получается из матрицы A с помощью перестановки строк и перестановки столбцов, отвечающих подстановке σ.

Таким образом, две матрицы смежности графа G подобны.

В силу этого корректно следующее определение. *Характеристическим многочленом* графа G называется характеристический многочлен любой из его матриц смежности. Совокупность всех корней характеристического многочлена, с учетом их кратности, называется *спектром* графа G.

Далее, говоря о матрице смежности графа G, мы будем предполагать, что граф упорядочен каким-либо образом, хотя в явном виде это упорядочение не будем заранее указывать.

Приведем теперь один пример утверждения, иллюстрирующего важность матриц смежности.

Теорема 1.4. *Пусть* $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ *— матрица смежности графа* G *без петель и* $A^l = (\gamma_{ij})_{n\times n}$*, где* $l \in \mathbb{N}$*. Тогда* γ_{ij} *равно числу* (v_i, v_j)*-маршрутов длины* l*.*

Доказательство. Утверждение очевидно при $l = 1$. Пусть $l > 1$ и утверждение верно для $l - 1$. Тогда $A^{l-1} = (\xi_{ij})_{n\times n}$, где ξ_{ij} равно числу (v_i, v_j)-маршрутов длины $l - 1$. Следовательно,

$$\gamma_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \xi_{is}\alpha_{sj}$$

равно числу (v_i, v_j)-маршрутов длины l, так как каждый такой маршрут состоит из (v_i, v_s)-маршрута длины $l - 1$ и ребра, ведущего из предпоследней вершины v_s маршрута в его последнюю вершину v_j. $\square$

Заметим, что доказанная теорема верна и для графов с петлями, если считать, что каждая петля имеет два обхода (этим число маршрутов, проходящих через данную петлю увеличивается в два раза).

Поскольку матрица смежности A графа G является вещественной симметрической матрицей, она ортогонально подобна некоторой вещественной диагональной матрице D:

$$A = T^{-1}DT.$$

Тогда, очевидно, $A^l = T^{-1}D^lT$. Данная формула позволяет быстро вычислять число (v_i, v_j)-маршрутов длины l для больших значений l, так как при этом нужно лишь найти D^l, обычным образом вычислить две матрицы T, T^{-1} и два раза перемножить матрицы. Отметим, что главная диагональ матрицы D совпадает со спектром графа G.

Пусть теперь G — произвольный обыкновенный граф. Упорядочим множество его вершин

$$VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Определим *матрицу Кирхгофа* $B = B(G) = (\beta_{ij})_{n\times n}$, полагая

$$B(G) = \begin{pmatrix} \deg v_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \deg v_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \deg v_n \end{pmatrix} - A(G),$$

где $A(G)$ — матрица смежности графа G. Иными словами,

$$\beta_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } i \neq j \text{ и } v_i \text{ смежна с } v_j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ и } v_i \text{ не смежна с } v_j, \\ \deg v_i, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Отметим, что обыкновенный граф G может иметь несколько различных матриц Кирхгофа, отвечающих различным упорядочениям графа G, и все эти матрицы подобны между собой.

Лемма 1. *Алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа равны между собой.*

Доказательство. Обозначим столбец $(1, 1, \ldots, 1)^t$ длины n, состоящий из единиц, через $\mathbf{1}$. Здесь, как обычно, через t мы обозначаем операцию транспонирования матриц.

Для матрицы Кирхгофа $B = (\beta_{ij})_{n\times n}$ выполняется

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ \text{ т. е. } B \cdot \mathbf{1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n), \ \text{ т. е. } \mathbf{1}^t \cdot B = 0.$$

Отсюда следует, что $\det B = 0$ и $\operatorname{rank} B \leqslant n - 1$.

Если $\operatorname{rank} B < n - 1$, то все алгебраические дополнения элементов матрицы B равны 0. Пусть $\operatorname{rank} B = n - 1$ и $\hat{B}$ — присоединенная к B матрица, составленная из алгебраических дополнений B_{ij} элементов β_{ij}, т. е.

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \ldots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \ldots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \ldots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

В силу свойств матрицы $\hat{B}$ получаем

$$B\hat{B} = \hat{B}B = (\det B)E = 0.$$

Так как $B\hat{B} = 0$, любой столбец X матрицы $\hat{B}$ удовлетворяет системе $BX = 0$. Эта система линейных уравнений имеет ранг $n-1$ и дефект 1. Так как $B\cdot\mathbf{1} = 0$, этой системе удовлетворяет столбец $\mathbf{1}$. Следовательно, столбцы матрицы $\hat{B}$ пропорциональны столбцу $\mathbf{1}$, откуда следует

$$B_{i1} = B_{i2} = \ldots = B_{in} \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Аналогично получаем

$$B_{1j} = B_{2j} = \ldots = B_{nj} \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, все элементы матрицы $\hat{B}$ одинаковы. □

Пусть G — произвольный (n, m)-граф. Упорядочим множество вершин и множество ребер графа

$$VG = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ и } EG = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}.$$

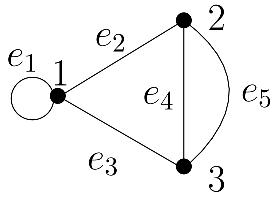
Будем говорить, что наш граф является *дважды помеченным.*

Определим теперь бинарную *матрицу инцидентности* $I = I(G) = (\iota_{ij})_{n\times m}$ графа G, полагая

1) $\iota_{ij} = 1 \iff$ вершина v_i инцидентна ребру e_j и e_j не является петлей;

2) $\iota_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.

На рис. 7 приведен пример графа и его матрицы инцидентности. Здесь вершинам отвечают строки, а ребрам — столбцы.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 7

Заметим, что одна матрица инцидентности графа G получается из другой его матрицы инцидентности с помощью некоторой перестановки строк и некоторой перестановки столбцов.

Рассмотрим теперь произвольный (n, m)-орграф $G = (V, D)$. Упорядочим множество вершин и множество дуг орграфа

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ и } D = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}.$$

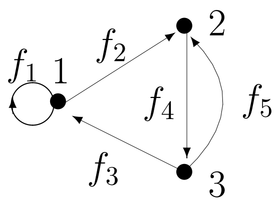
Определим *матрицу инцидентности* $I = I(G) = (\iota_{ij})_{n\times m}$ orграфа G, полагая

1) $\iota_{ij} = 1$ если v_i начало дуги f_j и f_j не петля;

2) $\iota_{ij} = -1$ если v_i конец дуги f_j и f_j не петля;

3) $\iota_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.

На рис. 8 приведен пример орграфа и его матрицы инцидентности. Здесь вершинам отвечают строки, а дугам — столбцы.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 8

Пусть G — произвольный граф. Превратим каждое его ребро в дугу, придав ребру одно из двух возможных направлений. Полученный орграф на том же самом множестве вершин будем называть *ориентацией* графа G. На рис. 8 приведен орграф, являющийся одной из ориентаций графа, изображенного на рис. 7.

Зафиксируем некоторый обыкновенный граф G и возьмем некоторую его ориентацию H. Кроме того, зафиксируем в G и H одинаковую нумерацию вершин и одинаковую нумерацию соответствующих ребер и дуг.

Лемма 2. *Пусть $B = B(G)$ — матрица Кирхгофа обыкновенного графа G и $I = I(H)$ — соответствующая матрица инцидентности некоторой его ориентации H. Тогда $B = I \cdot I^t$.*

Доказательство. Если умножить i-ю строку матрицы I на i-й столбец матрицы I^t, то получим сумму квадратов элементов i-й строки матрицы I, которая равна, очевидно, $\deg v_i$. Пусть теперь i-я строка матрицы I умножается на j-й столбец матрицы I^t. Если имеется дуга $f_s = \overrightarrow{v_i v_j}$ или дуга $f_s = \overrightarrow{v_j v_i}$, то получим -1. Если такой дуги нет, то получим 0. □

Заметим, что соотношения, указанные для обыкновенного графа в лемме 2, можно переписать в виде

$$I \cdot I^t = \begin{pmatrix} \deg v_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \deg v_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \deg v_n \end{pmatrix} - A.$$

Эта формула связывает матрицу смежности A обыкновенного графа с матрицей инцидентности I его ориентации.

2. Деревья

2.1. Леса, деревья, остовы

Ациклический граф, т. е. граф без циклов, называется *лесом. Дерево* — это связный ациклический граф. Очевидно, лес не содержит петель и кратных ребер, т. е. лес является обыкновенным графом.

Теорема 2.1. *Для (n, m)-графа G следующие условия эквивалентны:*

1) *G — дерево;*

2) *G — связный граф и $m = n - 1$;*

3) *G — ациклический граф и $m = n - 1$;*

4) *G — граф, в котором любые две вершины соединены единственной простой цепью.*

5) *G — ациклический граф, и добавление нового ребра приводит к появлению точно одного цикла.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Индукцией по m проверим, что в дереве выполнено равенство $m = n-1$. Если $m = 0$, то, очевидно, $n = 1$. Пусть $m > 0$ и для всех деревьев с меньшим чем m числом ребер требуемое равенство выполнено. Рассмотрим дерево G с m ребрами, и выберем в нем произвольное ребро e. Очевидно, e — ациклическое ребро, поэтому граф $G - e$ состоит из двух компонент связности G_1 и G_2, являющихся деревьями. Применяя к деревьям G_1, G_2 предположение индукции, получаем, что в каждом из них число ребер на единицу меньше числа вершин. Отсюда сразу следует равенство $m = n - 1$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть граф G содержит циклическое ребро e. Ясно, что $G - e$ является связным $(n, m - 1)$-графом. В силу следствия 2 из теоремы 1.1 имеем $m - 1 \geqslant n - 1$, что невозможно.

3) $\Longrightarrow$ 4). Проверим сначала, что G — связный граф. Поскольку G ацикличен, его компоненты связности являются деревьями. Так как из 1) следует 2), в каждой компоненте связности число ребер на единицу меньше числа вершин. Отсюда вытекает, что $m = n - k$, где k — число компонент связности. Учитывая, что $m = n - 1$, получаем $k = 1$.

Предположим, что в G для двух вершин u, v существуют различные простые (u, v)-цепи P_1 и P_2. Пусть Q — простая (u, x)-цепь, являющаяся длиннейшим общим началом цепей P_1 и P_2. Обозначим через y, z вершины, следующие за вершиной x в P_1 и P_2 соответственно. Очевидно, что ребро $f = xz$ не принадлежит цепи P_1. Отсюда следует, что подграф $P_1 \cup P_2 - f$ является связным графом. Поэтому f — не мост, следовательно, f принадлежит некоторому циклу, что невозможно.

4) $\Longrightarrow$ 5). Из условия следует, что в графе G нет циклов, в том числе и петель (если есть петля $e = uu$, то имеется две простые (u,u)-цепи: ими являются цепь из одной вершины u и цепь $u \xrightarrow{e} u$). Добавим к графу новое ребро $g = vw$, где $v, w \in VG$. Тогда возникнет цикл, состоящий из простой (v,w)-цепи и ребра g. Единственность такого цикла следует из единственности простой (v,w)-цепи.

5) $\Longrightarrow$ 1). Из условия вытекает, что любые две вершины графа G соединены простой цепью, т. е. G — связный граф. Используя ацикличность графа G, заключаем, что G — дерево. $\square$

Следствие 1. *Неодноэлементное дерево имеет по крайней мере две висячие вершины*

Доказательство. Пусть неодноэлементное дерево T имеет менее двух висячих вершин. Тогда $\deg v \geqslant 2$ для всех его вершин v, за исключением быть может некоторой вершины v_0, для которой $\deg v_0 \geqslant 1$. Тогда по лемме о рукопожатимях получаем

$$2(n-1) = 2m = \sum_{v \in V} \deg v \geqslant 2(n-1) + 1,$$

что противоречиво. $\square$

Лемма 1. *Пусть G — произвольный (n,m,k)-граф. G является лесом тогда и только тогда, когда $m = n - k$.*

Доказательство. Если G — лес, то в каждой его компоненте связности число ребер на единицу меньше числа вершин. Отсюда немедленно вытекает равенство $m = n - k$.

Если G — не лес, то, отбрасывая не менее одного ребра, получим подграф графа G, являющийся (n, m_1, k)-лесом. Тогда $m > m_1 = n - k$ в силу доказанного. $\square$

Пусть G — связный (n,m)-граф. Если G содержит хотя бы один цикл, то, удаляя из графа G некоторое ребро этого цикла, мы уменьшим число циклов по крайней мере на единицу, сохранив связность графа. Ясно, что последовательно разрушая циклы данного графа, можно прийти к óстовному подграфу, являющемуся деревом. Такой подграф называется *óстовным деревом* связного графа G. Поскольку дерево с n вершинами содержит $n-1$ ребер, для получения остовного дерева из графа G нужно удалить $m - n + 1$ ребер. Если G — произвольный (n, m, k)-граф, то объединение остовных деревьев его компонент связности приводит к *óстовному лесу* или *óстову* графа G. Поскольку лес с n вершинами и k компонентами связности содержит $n - k$ ребер, для получения óстова из графа G нужно удалить $m - n + k$ ребер.

На рис. 9 показан граф G и один из его остовов T.

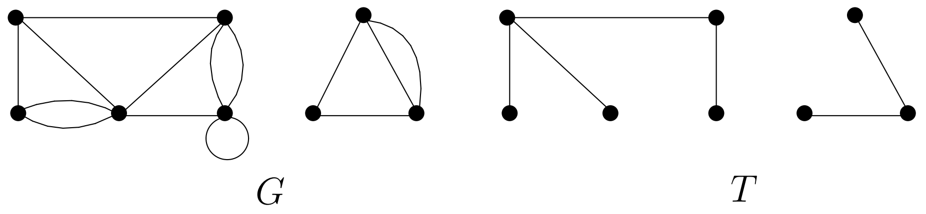


Рис. 9

Нетрудно заметить, что остов графа G — это его максимальный ациклический подграф.

Число $r^*(G) = m - n + k$ называется *цикломатическим числом*, а число $r(G) = n - k$ — *рангом* (n, m, k)-графа G. Следующее утверждение показывает, что если $r^*(G)$ равно 0 или 1, то $r^*(G)$ совпадает с числом циклов графа G.

Лемма 2. *Пусть G — произвольный граф. Тогда*

1) *G ацикличен, если и только если $r^*(G) = 0$;*

2) *G содержит единственный цикл, если и только если $r^*(G) = 1$.*

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из леммы 1.

Проверим утверждение 2). Если ребро e содержится в единственном цикле графа G, то подграф $G - e$ является остовом. Отсюда $(m - 1) - n + k = 0$, т. е. $r^*(G) = 1$.

Обратно, пусть T — произвольный остов графа G. Равенство $r^*(G) = 1$ означает, что разность между числами ребер графа G и его остова T равна 1. Отсюда следует, $G = T + e$ для некоторого ребра e. Ребро e добавляется к некоторой компоненте связности остова T, поэтому граф $G = T + e$ содержит единственный цикл. □

Лемма 3. *Любой ациклический подграф графа G содержится в некотором его остове.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда G — связный n-граф. Пусть H — ациклический подграф графа G. Обозначим через H_1 максимальный ациклический подграф, содержащий H. Ясно, что H_1 включает все вершины графа G. Проверим, что H_1 связен. Предположим, что граф H_1 несвязен. Обозначим через U множество вершин одной из компонент связности графа H_1, а через W — множество всех остальных вершин этого графа. В силу леммы 5 из разд. 1.2 существует ребро e, соединяющее вершины множеств U и W. Ребро e не образует цикла с ребрами подграфа H_1, поэтому подграф $H_1 + e$ ацикличен, что противоречит выбору H_1.

Из связности и ацикличности подграфа H_1 следует, что H_1 — остовное дерево. □

Лемма 4. *Пусть S и T — остовы графа G. Для любого ребра e из S существует такое ребро f из T, что подграф $S - e + f$ является остовом.*

Доказательство. Как и выше, достаточно рассмотреть случай, когда G — связный граф. Подграф $S-e$ имеет две компоненты связности; обозначим через U и W множества вершин этих компонент. Поскольку остов T является связным графом, существует ребро f из T, соединяющее вершины, одна из которых принадлежит U, а другая — W. Легко понять, что подграф $S - e + f$ ацикличен и связен. Следовательно, $S - e + f$ является остовом. □

2.2. Блоки и точки сочленения

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф. Вершина v называется *точкой сочленения*, если граф $G - v$ имеет больше компонент связности, чем граф G.

Связный граф называется *неразделимым*, если он не содержит точек сочленения.

В связном графе очень полезно выделить максимальные неразделимые подграфы. Это можно сделать подобно тому, как в произвольном графе были выделены максимальные связные подграфы (компоненты связности).

Блоком графа G называется любой его максимальный неразделимый подграф. На рис. 10 a) показаны точки сочленения u, v некоторого связного графа, а на рис. 10 b) приведены его блоки.

Очевидно, любой неразделимый подграф графа содержится в некотором его блоке. Поэтому любое ребро лежит в некотором блоке; то же самое относится и к произвольному циклу. Ясно, что любой блок связного неодноэлементного графа сам неодноэлементен.

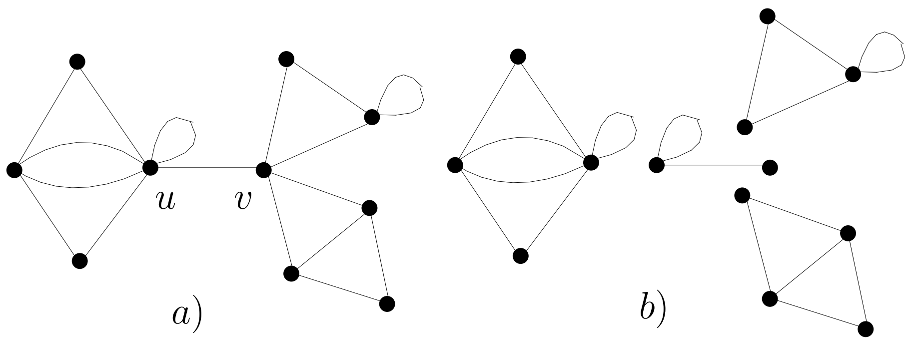


Рис. 10

Лемма 1. *Пусть v — произвольная вершина связного неодноэлементного графа G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *v — точка сочленения;*

2) *существуют различные вершины u и w, не равные v, такие, что v принадлежит любой простой (u, w)-цепи;*

3) *существует разбиение множества вершин графа $G - v$ на два непустых подмножества U и W такое, что для любых $u \in U$ и $w \in W$ вершина v принадлежит любой простой (u, w)-цепи.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 3). Так как v — точка сочленения, граф $G - v$ не связен. В качестве U возьмем множество вершин одной компоненты связности графа $G - v$, а в качестве W — множество его остальных вершин. Тогда любые вершины $u \in U$ и $w \in W$ лежат в разных компонентах связности графа $G - v$. Отсюда очевидно следует, что любая простая (u, w)-цепь графа G проходит через v.

3) $\Longrightarrow$ 2). Очевидно.

2) $\Longrightarrow$ 1). Ясно, что u и w лежат в разных компонентах связности графа $G - v$, поэтому v — точка сочленения графа G. $\square$

Лемма 2. *Любые два различных блока связного графа G имеют не более одной общей вершины.*

Доказательство. Предположим, что различные блоки B_1 и B_2 имеют более одной общей вершины. Очевидно, подграф $B_1 \cup B_2$ связен. В силу максимальности B_1 и B_2 этот подграф имеет точку сочленения v. Так как B_1 и B_2 — блоки, графы $B_1 - v$ и $B_2 - v$ связны. В силу предположения $(B_1 - v) \cap (B_2 - v) \neq \emptyset$. Тогда граф

$$(B_1 \cup B_2) - v = (B_1 - v) \cup (B_2 - v)$$

также связен. Следовательно, v не является точкой сочленения графа $B_1 \cup B_2$ и мы пришли к противоречию. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.2. 1) *Пусть B_1 и B_2 — два различных блока связного графа G. Тогда либо $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, либо B_1 и B_2 имеют единственную общую вершину, которая является точкой сочленения графа G.*

2) *Пусть v — точка сочленения связного графа G. Тогда v является общей вершиной по крайней мере двух различных блоков графа G.*

Доказательство. 1) В силу леммы 2 либо $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, либо B_1 и B_2 имеют единственную общую вершину. Пусть v — единственная общая вершина для B_1 и B_2. В силу связности блоков существуют вершины $u \in VB_1$ и $w \in VB_2$, смежные с v. Пусть $e_1 = uv \in EB_1$ и $e_2 = vw \in EB_2$.

Если существует простая (u, w)-цепь, не проходящая через v, то эта цепь и ребра e_1, e_2 образуют цикл C. Цикл C содержится в некотором блоке B_3 графа G, имеющем не менее двух общих вершин с B_1 (среди них u и v), а также не менее двух общих вершин с B_2 (среди них v и w). Тогда в силу леммы 2 получаем $B_1 = B_3 = B_2$, что противоречиво.

Таким образом, любая простая (u, w)-цепь проходит через v. Следовательно, v — точка сочленения графа G.

2) Пусть v — точка сочленения связного графа G. Тогда существуют две различные вершины u и w, отличные от v, и такие, что любая простая (u, w)-цепь проходит через v. Очевидно, можно считать, что u и w смежны с v. Пусть $e_1 = uv$ и $e_2 = vw$ — ребра графа G.

Если e_1 и e_2 лежат в одном блоке B графа G, то в блоке B имеется простая (u, w)-цепь, не проходящая через v (так как в блоке нет точек сочленения), а это противоречит выбору u и w. Пусть B_1 и B_2 — блоки, содержащие ребра e_1 и e_2 соответственно. Ясно, что $B_1 \neq B_2$ и v — общая вершина блоков B_1 и B_2. □

Заметим, что любой неразделимый граф совпадает со своим единственным блоком. Поэтому в дальнейшем неразделимые графы будут называться блоками.

Лемма 3. *Пусть G — блок, содержащий не менее трех вершин. Тогда любые две вершины графа G принадлежат некоторому общему циклу.*

Доказательство. Пусть u и v — две вершины блока G. Через U обозначим множество всех вершин, которые лежат на циклах, проходящих через u. Так как в G нет точек сочленения и имеется не менее трех вершин, в G нет мостов. Поэтому каждая вершина, смежная с u, лежит в U, причем через вершину u проходят циклы, не являющиеся петлями. Ясно, что $u \in U$ и $|U| > 1$.

Рассуждая от противного, предположим, что $v \notin U$. Возьмем кратчайшую (v, w)-цепь такую, что $w \in U$. Пусть она имеет вид

$$v = v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_{t-1} \xrightarrow{e} v_t = w,$$

где $t \geqslant 1$. Возьмем некоторый цикл C длины > 1, проходящий через w и u (случай $w = u$ не исключается). Пусть w_1 — вершина цикла C, отличная от w. Так как w не является точкой сочленения, существует простая (v_{t-1}, w_1)-цепь, не проходящая через w. Пусть P_1 — начальная подцепь этой цепи от вершины v_{t-1} до первой вершины w_2, лежащей в C (рис. 11). Обозначим через P_2 ту из простых (w_2, w)-цепей цикла C, которая содержит вершину u. Тогда цепи P_1, P_2 и ребро e образуют цикл длины > 1, содержащий u и v_{t-1}, т. е. $v_{t-1} \in U$, что противоречиво. □

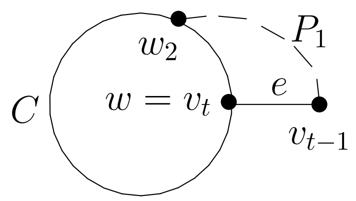


Рис. 11

Лемма 4. *Пусть G — блок, содержащий не менее трех вершин. Тогда любая вершина и любое ребро графа G, не являющееся петлей, принадлежат некоторому общему циклу.*

Доказательство. Возьмем произвольную вершину w блока G и его ребро $e = uv$, не являющееся петлей. В силу леммы 3 можно считать, что $w \neq u$ и $w \neq v$. По лемме 3 существует цикл C, проходящий через w и u. Можно считать, что вершина v не лежит на цикле C. Так как u не является точкой сочленения, существует простая (v, w)-цепь, не проходящая через u. Через P_1 обозначим начальную подцепь этой цепи от v до первой вершины w_1, принадлежащей циклу C (случай $w_1 = w$ не исключается). Обозначим через P_2 ту из простых (w_1, u)-подцепей цикла C, которая содержит w. Тогда цепи P_1, P_2 и ребро e образуют искомый цикл, содержащий w и e. □

Теорема 2.3. *Пусть G — связный граф, содержащий не менее трех вершин. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *G — блок;*

2) *любые две вершины графа G принадлежат некоторому общему циклу;*

3) *в графе G любая вершина и любое ребро, не являющееся петлей, принадлежат некоторому общему циклу;*

4) *в графе G любые два ребра, не являющиеся петлями, принадлежат некоторому общему циклу;*

5) *в графе G для любых двух вершин и любого ребра, не являющегося петлей, существует простая цепь, соединяющая эти вершины и проходящая через данное ребро;*

6) *для любых трех различных вершин u, v, w графа G существует простая (u, w)-цепь, проходящая через v;*

7) *для любых трех различных вершин u, v, w графа G существует простая (u, w)-цепь, не проходящая через v;*

Доказательство.

1) $\Longrightarrow$ 5). В силу леммы 4 можно считать, что для блока G выполняется 3). Возьмем две вершины w_1, w_2 блока G и его ребро $e = uv$, не являющееся петлей. В силу 3) можно считать, что вершины w_1, w_2, u, v попарно различны и существует цикл C, проходящий через w_2 и e. Будем считать, что вершина w_1 не лежит в цикле C. Так как w_2 не является точкой сочленения, существует простая (w_1, u)-цепь, не проходящая через w_2. Через P_1 обозначим начальную подцепь этой цепи от w_1 до первой вершины w_3, лежащей в C (рис. 12).

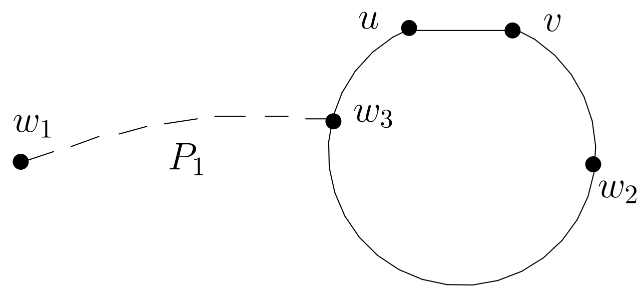


Рис. 12

Пусть P_2 — подцепь цикла C, соединяющая вершины w_3, w_2 и содержащая ребро e. Искомая цепь получается объединением цепей P_1 и P_2.

5) $\Longrightarrow$ 6). Пусть u, v, w — три различные вершины графа G. Возьмем произвольное ребро e, инцидентное v и не являющееся петлей. В силу 5) существует простая (u, w)-цепь, проходящая через e, и, следовательно, содержащая v.

6) $\Longrightarrow$ 7). Пусть u, v, w — три различные вершины графа G. В силу 6) существует простая (u, v)-цепь, проходящая через w. Тогда ее (u, w)-подцепь не содержит v.

7) $\Longrightarrow$ 1). Вытекает из леммы 1.

Итак, мы имеем 1) $\Longrightarrow$ 5) $\Longrightarrow$ 6) $\Longrightarrow$ 7) $\Longrightarrow$ 1). Для завершения доказательства осталось заметить, что импликации 5) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 7) очевидны. $\square$

В связи с блоками на множестве ребер EG связного графа G, не являющихся петлями, полезно рассмотреть следующее отношение:

$$e \approx f \Longleftrightarrow e = f \text{ или } e, f \text{ содержатся в некотором цикле.}$$

Заметим, что если $e \approx f$, то e и f лежат в одном и том же блоке графа G. Обратно, если e и f лежат в некотором блоке графа G, то в силу теоремы 2.3 выполняется $e \approx f$.

Таким образом, отношение $\approx$ является отношением эквивалентности, а каждый его класс состоит из всех ребер некоторого блока, не являющихся петлями. Что же касается петель, то они попадают в те блоки, в которых содержатся инцидентные им вершины.

Пусть G — связный граф. Рассмотрим семейство его блоков $B_1, \ldots, B_t$ и семейство его точек сочленения $v_1, \ldots, v_s$. Построим новый граф $bc(G)$ на множестве вершин

$$\{v_1, \ldots, v_s, B_1, \ldots, B_t\}.$$

В качестве ребер этого графа возьмем все пары вида $\{v_j, B_i\}$, где $v_j \in VB_i$, $i = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, s$. Иными словами, мы рассматриваем двудольный граф, вершинами которого являются блоки и точки сочленения, а ребра показывают, как точки сочленения распределены по блокам. На рис. 13 изображены граф G и его граф $bc(G)$.

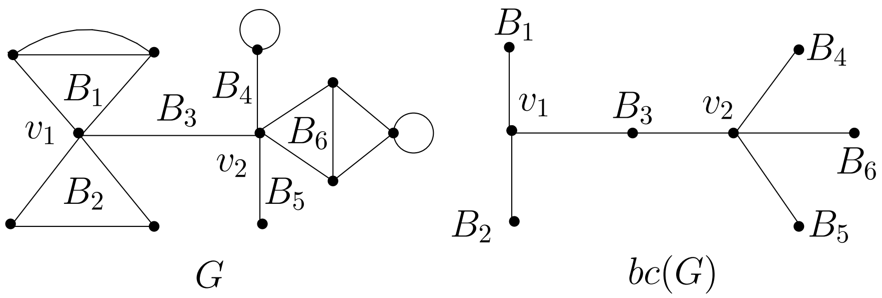


Рис. 13

Теорема 2.4. *Пусть G — связный граф. Тогда граф $bc(G)$ является деревом.*

Доказательство. Очевидно, связность графа G влечет связность графа $bc(G)$. В силу устройства ребер графа $bc(G)$ все они не являются петлями. Пусть в графе $bc(G)$ имеется цикл. Возьмем цикл кратчайшей длины

$$v_{i_1} \to B_{j_1} \to v_{i_2} \to B_{j_2} \to \ldots \to v_{i_p} \to B_{j_p} \to v_{i_{p+1}} = v_{i_1},$$

где $p \geqslant 2$, все точки сочленения $v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}$ попарно различны и все блоки $B_{j_1}, \ldots, B_{j_p}$ попарно различны. Заметим, что для любого $q = 1, \ldots, p$ точки сочленения v_{i_q}, $v_{i_{q+1}}$ лежат в блоке B_{j_q}. Поэтому в B_{j_q} имеется простая $(v_{i_q}, v_{i_{q+1}})$-цепь. Объединяя все эти цепи, мы получим цикл C в графе G. Возьмем блок B графа G, содержащий цикл C. Блок B имеет с каждым блоком B_{j_q} $(q = 1, \ldots, p)$ по крайней мере две различные общие вершины v_{i_q}, $v_{i_{q+1}}$, поэтому в силу леммы 2 мы получаем $B = B_{j_q}$ для любого $q = 1, \ldots, p$, что невозможно.

Итак, в связном графе $bc(G)$ нет циклов, т. е. $bc(G)$ — дерево. □

Учитывая доказанную теорему, граф $bc(G)$ называют *деревом блоков и точек сочленения* связного графа G. Иногда, допуская вольность речи, говорят, что связный граф является деревом своих блоков.

В силу теоремы 2.2 любая точка сочленения связного графа G имеет степень $\geqslant 2$ в дереве $bc(G)$, поэтому висячими вершинами дерева блоков и точек сочленения могут быть только блоки. Такие блоки называются *висячими*.

2.3. Число остовов в связном обыкновенном графе

Лемма 1. *Пусть H – обыкновенный $(n, n-1)$-граф, $n \geqslant 2$, I – матрица инцидентности некоторой его ориентации, M – произвольный минор порядка $n-1$ матрицы I. Тогда*

1) *если H не является деревом, то $M = 0$;*

2) *если H – дерево, то $M = \pm 1$.*

Доказательство. Заметим, что смена нумерации вершин и нумерации ребер графа H приводит к перестановке строк и перестановке столбцов матрицы I. Рассматриваемый минор при этом может сменить лишь знак.

Пусть v – вершина, соответствующая строке матрицы I, не вошедшей в матрицу минора M.

1) Пусть H не является деревом. Тогда граф H несвязен. Пусть $v_1, \ldots, v_t$ – множество вершин некоторой компоненты связности H_1 графа H, не содержащей v.

1.1. Если $t = 1$, то v_1 – изолированная вершина и в матрице минора M имеется нулевая строка, поэтому $M = 0$.

1.2. Пусть $t > 1$. С помощью подходящей перенумерации вершин и ребер из H матрицу I приведем к клеточному виду

$$\left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right),$$

где I_1 – матрица инцидентности ориентации компоненты H_1, а вершине v отвечает строка, проходящая через I_2. Каждый столбец, проходящий через I_1, содержит точно одну единицу и точно одну -1 (остальные элементы равны нулю). Следовательно, сумма первых t строк равна 0. Так как первые t строк входят в матрицу минора M, имеем $M = 0$.

2) Пусть H является деревом. Заново перенумеруем вершины и ребра графа H с помощью следуюшей процедуры. В качестве v_1 возьмем одну из висячих вершин дерева H, отличную от v. Через e_1 обозначим инцидентное ей висячее ребро. Рассмотрим дерево $H_1 = H - v_1$. Если его порядок $\geqslant 2$, то через v_2 обозначим одну из висячих вершин, отличных от v, а через e_2 – инцидентное ей висячее ребро. Положим $H_2 = H_1 - e_2$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не получим одноэлементное дерево H_{n-1}, единственной вершиной которого обязательно будет вершина v. Получим нумерацию вершин $v_1, \ldots, v_n = v$ и нумерацию ребер $e_1, \ldots, e_{n-1}$. В новой нумерации матрица I приведется к виду

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \pm1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ldots & \pm1 \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix},$$

причем вершине v отвечает последняя строка (здесь каждый диагональный элемент равен 1 или -1, а через $*$ обозначены элементы матрицы, значения которых мы не будем выписывать в явном виде). Теперь ясно, что матрица минора имеет треугольный вид и $M = \pm 1$. $\square$

Пусть P и Q – соответственно $(s \times t)$-матрица и $(t \times s)$-матрица, где $s \leqslant t$. Положим $C = PQ$.

Минор порядка s матрицы Q называется *соответствующим минором* минору порядка s матрицы P, если множество номеров строк, составляющих матрицу первого минора, равно множеству номеров столбцов, составляющих матрицу второго минора.

Сформулируем без доказательства один результат теории матриц, который нам вскоре понадобится. Его доказательство можно обнаружить, например, в книге [14] на стр. 20.

Формула Бине-Коши. Определитель матрицы C равен сумме всевозможных попарных произведений миноров порядка s матрицы P на соответствующие миноры матрицы Q.

Заметим, что при $s = t$ формула Бине-Коши утверждает, что определитель произведения двух квадратных матриц порядка s равен произведению определителей этих матриц.

Теорема 2.5 (Кирхгоф, 1847). *Число остовов в связном неодноэлементном обыкновенном графе G равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа $B(G)$.*

Доказательство. Пусть G – произвольный связный обыкновенный (n, m)-граф, $n \geqslant 2$ и I – матрица инцидентности некоторой ориентации графа G. Заметим, что $m \geqslant n - 1$ в силу связности графа G. По лемме 2 из раздела 1.4 выполняется

$$B = B(G) = I \cdot I^t.$$

Пусть B' – подматрица матрицы B, полученная удалением последней строки и последнего столбца, а J – подматрица матрицы I, полученная удалением последней строки. Тогда имеем

$$\mathrm{B}' = J \cdot J^t,$$

где J – это $((n-1) \times m)$-матрица. Очевидно, $B_{nn} = \det B'$ есть алгебраическое дополнение элемента β_{nn} в матрице Кирхгофа B. В силу формулы Бине-Коши B_{nn} равно сумме квадратов всех миноров порядка $n - 1$ матрицы J. Согласно лемме 1 каждый такой минор M равен ± 1, если остовный подграф графа G, ребра которого соответствуют столбцам, вошедшим в матрицу минора M, является деревом, и равен 0 в другом случае. Следовательно, B_{nn} равно числу остовов графа G. Осталось отметить, что по лемме 1 из раздела 1.4 алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа равны между собой. □

Следствие 1. *Ранг обыкновенного (n, m, k)-графа G равен рангу его матрицы Кирхгофа, т. е.* $\operatorname{rank} B(G) = n - k$.

Доказательство. Пусть $k = 1$, т. е. граф G связен. Тогда в G есть остовное дерево и по теореме $B_{nn} \neq 0$, т. е. $\operatorname{rank} B(G) \geqslant n - 1$. С другой стороны, $\det B(G) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{rank} B(G) = n - 1$.

Пусть теперь $k > 1$. Тогда при подходящей нумерации вершин матрица $B(G)$ подобна клеточно-диагональной матрице, составленной из матриц Кирхгофа $B_1, \ldots, B_k$ компонент связности графа G. Так как подобные матрицы имеют одинаковый ранг, в силу ранее доказанного получаем

$$\operatorname{rank} B(G) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank} B_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k.$$

□

Следствие 2. *Число остовов в полном графе K_n равно n^{n-2}.*

Доказательство. Утверждение очевидно для $n = 1$ и $n = 2$. Пусть $n > 2$. Мы имеем

$$B(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix},$$

Вычислив определитель $(n-1)$-го порядка, получаем $B_{nn} = n^{n-2}$. □

Так как число остовов в полном графе K_n равно числу помеченных деревьв порядка n, т. е. числу деревьев на множестве вершин $1, 2, \ldots, n$, следствие 2 эквивалентно следующему утверждению.

Теорема 2.6 (Кели, 1897). *Число помеченных деревьев порядка n равно n^{n-2}.*

Рассмотрим следующую задачу *об остове минимального веса.*

Пусть G – связный граф и $w : EG \to \mathbf{R}$ – отображение из EG в $\mathbf{R}$. Отображение w называют *весовой функцией*, а $w(e)$ – *весом ребра* $e \in EG$. Пусть T – остов графа G. Положим

$$w(T) = \sum_{e \in ET} w(e).$$

Число $w(T)$ называют *весом* остова T.

Задача состоит в следующем: построить алгоритм, который во взвешенном графе (G, w) находит остов минимального веса.

В дальнейшем мы укажем такие алгоритмы, которые достаточно быстро находят в графе остов минимального веса. Теорема Кели же показывает, что в графе может быть очень много остовов. Так в K_n число остовов экспоненциально зависит от n. Поэтому было бы нерационально решать задачу об остове минимального веса, основываясь на переборе всех остовов.

3. Обходы графов

3.1. Эйлеровы графы

Замкнутая цепь в графе G называется *эйлеровой цепью*, если она содержит все ребра и все вершины графа. Граф, содержащий эйлерову цепь, будет называться *эйлеровым графом*. Иными словами, эйлеров граф – это связный граф, в котором имеется замкнутая цепь, проходящая точно один раз через каждое его ребро.

Свое название эйлеровы графы получили в честь Л. Эйлера, который первым рассмотрел такие графы в 1736 году в своей знаменитой работе о кенигсбергских мостах. Этой работой Эйлер, по существу, положил начало новому разделу математики — теории графов.

Задача о кенигсбергских мостах состояла в следующем. На реке Прегель в Кенигсберге было два острова, соединенных между собой и с берегами семью мостами, как показано на рис. 14 a).

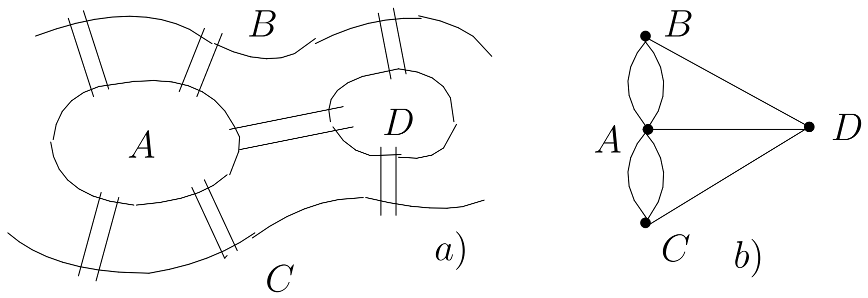


Рис. 14

Спрашивается, можно ли, начиная с некоторого места суши, обойти все мосты по одному разу и вернуться назад?

Эйлер предложил рассмотреть граф, изображенный на рис. 14 b). Нетрудно догадаться, что решение задачи о кенигсбергских мостах сводится к поиску эйлеровой цепи в этом графе. Однако, как показывает следующая теорема, в указанном графе нет эйлеровых цепей.

Теорема 3.1 (Эйлер, 1736). *Для неодноэлементного связного графа G следующие условия эквивалентны:*

1) *G — эйлеров граф;*

2) *каждая вершина графа G имеет четную степень;*

3) *множество всех ребер графа G можно разбить на циклы.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть P — эйлерова цепь графа G с начальной вершиной v_0. Двигаясь по цепи P, будем подсчитывать степени вершин. Прохождение каждой промежуточной вершины в цепи P

вносит число 2 в ее степень. Первое и последнее ребро цепи P дают вклад 2 в степень вершины v_0. Так как цепь P содержит каждое ребро графа точно один раз, отсюда следует четность степеней всех вершин графа G.

2) $\Longrightarrow$ 3). Граф G связен и не имеет висячих вершин, поскольку степень каждой его вершины четна. В силу следствия 1 из теоремы 2.1 в G содержится некоторый цикл. Обозначим через G_1 максимальный подграф графа G, удовлетворяющий условию 3). Поскольку из условия 3) вытекает условие 2), степени всех вершин графа G_1 четны. Обозначим через G_2 подграф, полученный из G удалением всех ребер графа G_1. Предположим, что G_2 содержит неодноэлементную компоненту связности H. Поскольку H — связный подграф, удовлетворяющий условию 2), в нем нет висячих вершин, и, следовательно, H — не дерево, т. е. в H содержится цикл C. Если добавить все ребра цикла C вместе с инцидентными им вершинами к подграфу G_1, то получится подграф, содержащий G_1 и удовлетворяющий условию 3), что невозможно. Следовательно, подграф G_2 не содержит ребер, поэтому G совпадает с G_1.

3) $\Longrightarrow$ 1). Разобьем множество всех ребер графа G на наименьшее число замкнутых цепей $P_1, P_2, \ldots, P_s$ (такое разбиение существует в силу условия 3)) и докажем, что $s = 1$. Пусть $s > 1$. В силу связности графа G найдется такое $i \geqslant 2$, что замкнутые цепи P_1 и P_i имеют общую вершину. Поскольку P_1 и P_i не имеют общих ребер, их можно объединить в одну замкнутую цепь, уменьшив, тем самым общее количество цепей s, что невозможно. Следовательно, все ребра графа G принадлежат некоторой замкнутой цепи, т. е. граф является эйлеровым. $\square$

Из теоремы 3.1 можно получить следствие, относящееся к произвольным графам.

Следствие 1. *Пусть G — произвольный граф, содержащий $2l$ вершин нечетной степени, где $l \geqslant 1$. Тогда множество всех ребер графа можно разбить на l цепей, каждая из которых соединяет две вершины нечетной степени.*

Доказательство. Очевидно, утверждение достаточно доказать для случая, когда граф G связен. Пусть

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2l-1}, u_{2l}$$

— все вершины нечетной степени связного графа G. Рассмотрим граф G_1, полученный из G добавлением l новых ребер $e_1, \ldots, e_l$ таких, что

$e_i = u_{2i-1}u_{2i}$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$. Граф G_1, очевидно, связен и степень каждой его вершины — четное число. Поэтому в G_1 существует эйлерова цепь P. Можно считать, что цепь P начинается с ребра e_1. Удаляя из P все ребра e_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$, мы, очевидно, получим l нужных нам цепей. $\square$

Цепь в графе G называется *полуэйлеровой*, если она содержит все ребра и все вершины графа. Граф называется *полуэйлеровым*, если в нем существует полуэйлерова цепь. Иными словами, полуэйлеров граф — это связный граф, в котором имеется цепь (возможно, незамкнутая), проходящая точно один раз через каждое ребро.

Предложение 3.1. *Связный граф G является полуэйлеровым графом тогда и только тогда, когда G содержит не более двух вершин нечетной степени.*

Это утверждение, очевидно, вытекает из теоремы 3.1 и следствия 1.

Следующее утверждение уточняет предложение 3.1.

Следствие 2. *Пусть связный граф G содержит две вершины нечетной степени u и v. Тогда существует (u, v)-цепь, содержащая все ребра графа G.*

Граф называется *произвольно вычерчиваемым из вершины v*, если любая его цепь с началом в вершине v может быть продолжена до эйлеровой цепи графа G. Разумеется, если граф произвольно вычерчиваем из вершины v, то он является эйлеровым графом.

Теорема 3.2. *Неодноэлементный эйлеров граф G является произвольно вычерчиваемым из вершины v тогда и только тогда, когда вершина v принадлежит любому циклу графа G.*

Доказательство. Пусть вершина v эйлерова графа G принадлежит любому циклу. Рассмотрим произвольную (v, w)-цепь P и покажем, что ее можно продолжить до эйлеровой цепи. Обозначим через G_1 подграф графа G, полученный удалением из G всех ребер цепи P. Если $w = v$, то все вершины подграфа G_1 имеют четную степень, если же $w \neq v$, то G_1 содержит в точности две вершины нечетной степени. Пусть H_0 — компонента связности графа G_1, содержащая вершину v. Ясно, что вершина w принадлежит H_0. Следовательно, H_0 — полуэйлеров граф, и потому в H_0 существует полуэйлерова (w, v)-цепь Q. Нетрудно понять, что H_0 содержит все ребра графа G_1. В самом деле, предположим, что G_1 содержит неодноэлементную компоненту связности H, отличную от

H_0. Тогда H — эйлеров граф, и потому в H содержится цикл. Этот цикл, очевидно, не проходит через вершину v, что невозможно. Следовательно, все компоненты связности подграфа G_1, отличные от H_0, одноэлементны.

Таким образом, цепь Q содержит все ребра графа G_1. Отсюда вытекает, что объединение цепей P и Q — эйлерова цепь в графе G, являющаяся продолжением цепи P.

Обратно, пусть в графе G существует цикл C, не содержащий вершину v. Рассмотрим подграф G_1, полученный удалением из G всех ребер цикла C. Пусть H — компонента связности подграфа G_1, содержащая вершину v. Легко понять, что H — эйлеров граф. Обозначим через P эйлерову цепь подграфа H. Можно считать, что началом и концом цепи P является вершина v. Поскольку v не принадлежит циклу C, цепь P нельзя продолжить до эйлеровой цепи графа G. $\square$

Опираясь на теорему 3.2, несложно описать строение всех графов, произвольно вычерчиваемых из вершины v.

Для этого возьмем произвольный лес H, т. е. ациклический граф, не содержащий вершину v. Каждую вершину нечетной степени из H соединим некоторым нечетным числом кратных ребер с v, а каждую вершину четной степени — четным числом (не исключая 0) кратных ребер с v, причем каждую изолированную вершину из H обязательно соединим с v (см. рис. 15). Кроме того, в вершине v можно присоединить несколько петель.

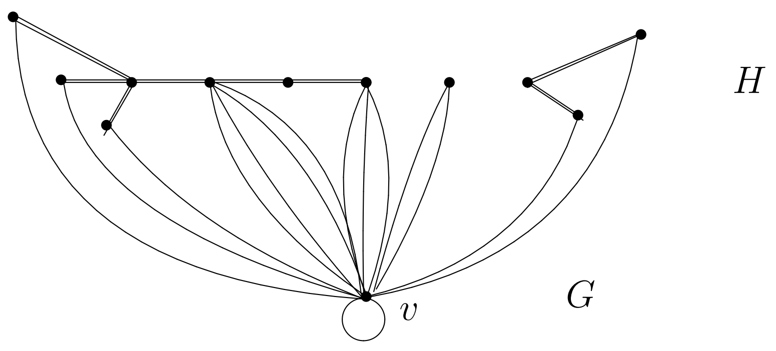


Рис. 15

Полученный граф G

1) связен;

2) имеет только вершины четной степени ($\deg v$ четно, так как в графе H содержится четное число вершин нечетной степени);

3) является произвольно вычерчиваемым из вершины v, (как эйлеров граф, у которого вершина v принадлежит всем циклам).

Очевидно, верно и обратное, т. е. любой неодноэлементный граф, произвольно вычерчиваемый из вершины v, можно получить с помощью указанной конструкции.

Заметим, что в графе G, произвольно вычерчиваемом из вершины v, на основании определения можно следующим образом построить эйлерову цепь:

выходим из вершины v и идем произвольным образом по маршруту в графе G, соблюдая лишь одно ограничение — из каждой достигнутой вершины выходим только по любому из ранее не пройденных ребер, причем движемся до тех пор, пока это возможно.

Итак, в графе, произвольно вычерчиваемом из вершины v, существует очень простой алгоритм построения эйлеровой цепи. В связи с этим графы произвольно вычерчиваемые из данной вершины, весьма удобны для планирования выставок. Здесь ребра соответствуют помещениям, где выставляются экспонаты, а вершины — местам перехода из одних помещений в другие. На выставке, спланированной таким образом, начав с входа v, можно автоматически обойти всю выставку, если придерживаться простого правила: войти в помещение, осмотреть его и через другой выход перейти в еще непросмотренное помещение.

3.2. Гамильтоновы графы

Гамильтоновой цепью графа называется его незамкнутая простая цепь, которая проходит через каждую вершину графа точно один раз. Цикл графа, проходящий через каждую его вершину, называется *гамильтоновым циклом*. Граф называется *гамильтоновым*, если он обладает гамильтоновым циклом.

Очевидно, вопрос о существовании гамильтоновых цепей и циклов достаточно изучить только для класса обыкновенных графов.

Указанные названия цепей и циклов связаны с именем Уильяма Гамильтона, который в 1859 году предложил следующую игру-головоломку:

требуется, переходя по очереди от одной вершины додекаэдра к другой вершине по его ребру, обойти все 20 вершин по одному разу и вернуться в начальную вершину.

Отметим, что придумано еще много других развлекательных и полезных задач, связанных с поиском гамильтоновых циклов. Сформулируем две из них.

1. Компанию из нескольких человек требуется рассадить за круглым

столом таким образом, чтобы по обе стороны от каждого сидели его знакомые.

Очевидно, для решения этой задачи нужно найти гамильтонов цикл в графе знакомств компании.

2. (*Задача о шахматном коне.*) Можно ли, начиная с произвольного поля шахматной доски, обойти конем последовательно все 64 поля по одному разу и вернуться в исходное поле?

Несмотря на внешнее сходство задач об эйлеровых цепях и гамильтоновых циклах, оказалось, что проблемы нахождения эффективных критериев существования таких цепей и циклов имеют принципиально различную сложность. Как было показано в предыдущем разделе, простой и эффективный критерий существования эйлеровой цепи устанавливается достаточно просто. Конечно, хотелось бы найти подобный критерий и для существования гамильтонова цикла. Однако, поиск эффективного критерия такого сорта является одной из труднейших нерешенных задач теории графов.

В данном разделе мы приведем одно из наиболее интересных достаточных условий существования гамильтонова цикла в обыкновенном графе, полученное к настоящему времени.

Сначала дадим необходимые определения и докажем одну вспомогательную лемму.

Пусть граф G имеет n вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Положим $d_i = \deg v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и будем считать, что вершины графа упорядочены таким образом, что $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Последовательность $d_1, d_2, \ldots, d_n$ называют *последовательностью степеней* графа G.

Будем говорить, что числовая последовательность $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ *мажорируется* числовой последовательностью $d'_1 \leqslant d'_2 \leqslant \ldots \leqslant d'_n$, если $d_i \leqslant d'_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 1. *Пусть обыкновенный граф G' получен из обыкновенного графа G добавлением одного нового ребра e. Тогда последовательность степеней графа G мажорируется последовательностью степеней графа G'.*

Доказательство. Заметим сначала, что если в неубывающей последовательности $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ увеличить число d_i на 1, а затем полученную последовательность привести к неубывающему виду, переставив число $d_i + 1$ на положенное место, то новая последовательность будет мажорировать исходную последовательность (очевидно, ту же новую последовательность можно получить сразу добавив 1 к последнему числу исходной последовательности, равному d_i).

Ясно, что при добавлении к графу нового ребра $e = uv$, где $u \neq v$, точно у двух вершин u и v степени увеличатся на 1. Осталось два раза воспользоваться сделанным замечанием. □

Теорема 3.3 (Хватал, 1972). *Пусть G — обыкновенный граф, $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ — его последовательность степеней и $n \geqslant 3$. Если для любого натурального числа k верна импликация*

$$d_k \leqslant k < n/2 \to d_{n-k} \geqslant n - k, \qquad (*)$$

то граф G гамильтонов.

Доказательство. Сделаем сначала три очевидных замечания.

1) Если $d_k \leqslant k$, то число вершин, степень которых не превосходит k, больше или равно k. Очевидно, верно и обратное утверждение.

2) Если $d_{n-k} \geqslant n - k$, то число вершин, степень которых не меньше $n - k$, больше или равно $k + 1$ (достаточно заметить, что в последовательности $d_{n-k}, d_{n-k+1}, \ldots, d_n$ имеется $k + 1$ чисел). Конечно, и здесь верно обратное утверждение.

3) Если условие $(*)$ верно для некоторой последовательности степеней, то оно верно и для мажорирующей её неубывающей последовательности.

Пусть теперь, от противного, существует обыкновенный n-граф, где $n \geqslant 3$, который удовлетворяет условию $(*)$, но не является гамильтоновым графом. Будем добавлять к нему новые ребра до тех пор, пока не получим максимальный негамильтонов обыкновенный граф G. В силу 3) граф G удовлетворяет условию $(*)$.

Заметим, что граф K_n гамильтонов при $n \geqslant 3$. Будем считать, что граф G — это максимальный негамильтонов остовный подграф графа K_n.

Возьмем две такие несмежные вершины u и v графа G, что сумма $\deg u + \deg v$ является наибольшей из возможных. Без ограничения общности будем считать, что $\deg u \leqslant \deg v$. Добавим к G новое ребро $e = uv$. Тогда граф $G + e$ гамильтонов.

Рассмотрим гамильтонов цикл графа $G + e$. В нем обязательно присутствует ребро $e = uv$. Отбрасывая ребро e из цикла, получим гамильтонову (u, v)-цепь в графе G:

$$u = u_1, u_2, \ldots, u_n = v.$$

Положим

$$S = \{i \,|\, \text{существует } e_i = u_1 u_{i+1} \in EG\},$$

$$T = \{i \,|\, \text{существует } f_i = u_i u_n \in EG\}.$$

Покажем, что $S \cap T = \emptyset$. Действительно, если $j \in S \cap T$, то в графе G имеется гамильтонов цикл:

$$u_1 \xrightarrow{e_j} u_{j+1} \to u_{j+2} \to \ldots \to u_n \xrightarrow{f_j} u_j \to u_{j-1} \to \ldots \to u_1.$$

Из определения S и T следует $S \cup T \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, поэтому $2\deg u \leqslant \deg u + \deg v = |S| + |T| = |S \cup T| < n$, т. е. $\deg u < n/2$ и $\deg u + \deg v < n$.

Так как $S \cap T = \emptyset$, ни одна вершина u_j, где $j \in S$, не смежна с $v = u_n$. Отсюда в силу выбора u и v имеем $\deg u_j \leqslant \deg u$. Положим $k = \deg u$. Тогда имеется по крайней мере $|S| = \deg u = k$ вершин, степень которых не превосходит k. В силу 1) выполняется

$$d_k \leqslant k < n/2.$$

По условию $(*)$ получаем

$$d_{n-k} \geqslant n - k.$$

В силу 2) имеется по крайней мере $k+1$ вершин, степень которых не меньше $n-k$.

Вершина u может быть смежна, самое большее, с k из этих $k+1$ вершин, так как $k = \deg u$. Следовательно, существует вершина w, не смежная с u, для которой $\deg w \geqslant n-k$. Тогда получаем $\deg u + \deg w \geqslant$ $\geqslant k + (n-k) = n > \deg u + \deg v$, что противоречит выбору u и v. $\square$

Следствие 1. *Пусть G — обыкновенный граф, $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ — его последовательность степеней и $n \geqslant 3$. Граф G гамильтонов, если выполнено одно из условий:*

1) *$d_k \geqslant n/2$ для любого $k = 1, \ldots, n$ (*теорема Дирака, 1952*),*

2) *$\deg u + \deg v \geqslant n$ для любых двух различных несмежных вершин u, v графа G (*теорема Оре, 1960*),*

3) *$d_k > k$ для любого натурального числа k такого,что $1 \leqslant k < n/2$.*

Доказательство. Достаточно установить, что 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ $(*)$. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 3) $\Rightarrow$ $(*)$ совершенно очевидны.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть, от противного, верно 2), но не верно 3). Тогда существует такое t, что $1 \leqslant t < n/2$ и $d_t \leqslant t$. Возьмем произвольные числа t_1, t_2 такие, что $1 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t$. Тогда $d_{t_1}, d_{t_2} \leqslant d_t \leqslant t < n/2$ влечет $d_{t_1} + d_{t_2} < n$, откуда в силу 2) вершины v_{t_1}, v_{t_2} смежны. Таким образом, вершины $v_1, v_2, \ldots, v_t$ порождают полный подграф.

Так как $d_t \leqslant t$, любая вершина v_i для $i = 1, \ldots, t$ смежна не более чем с одной вершиной v_j для $j \in \{t+1, \ldots, n\}$, причем $|\{t+1, \ldots, n\}| = n-t$. Заметим, что $n - t > t$, поскольку $t < n/2$. Поэтому существует вершина v_j для некоторого $j = t+1, \ldots, n$, которая несмежна с вершинами $v_1, \ldots, v_t$. Поскольку v_j несмежна сама с собой, отсюда следует

$$d_j \leqslant n - t - 1.$$

Тогда $d_t + d_j \leqslant t + n - t - 1 < n$ и вершины v_t, v_j несмежны и различны, что противоречит 2). $\square$

Гамильтоновой орцепью орграфа называется его незамкнутая простая орцепь, которая проходит через каждую вершину орграфа точно один раз. Орцикл орграфа, проходящий через каждую его вершину, называется *гамильтоновым орциклом*. Орграф называется *полугамильтоновым*, если он обладает гамильтоновой орцепью, и — *гамильтоновым*, если он обладает гамильтоновым орциклом.

О гамильтоновых орграфах в целом известно не очень много. Приведем без доказательства аналог теоремы Дирака.

Теорема 3.4 (Гуйя-Ури). *Пусть G — орсвязный n-орграф. Если $\overrightarrow{\deg}\, v \geqslant n/2$ и $\overleftarrow{\deg}\, v \geqslant n/2$ для любой его вершины v, то G — гамильтонов орграф.*

Рассмотрим теперь один важный класс орграфов и выясним, когда орграф из этого класса будет гамильтоновым.

Турниром называется орграф, основание которого есть полный граф, т. е. любые две его различные вершины соединены точно одной дугой и нет петель. Такое название выбрано в связи с тем, что эти графы удобно использовать для описания результатов командных соревнований в некоторых видах спорта.

Так как турнир может иметь источник (или сток), т. е. вершину, в которой дуги только выходят (заходят), турнир может быть и негамильтоновым. Тем не менее, справедлива

Теорема 3.5 (Редеи и Камион). 1) *Любой турнир полугамильтонов.*

2) *Любой орсвязный турнир гамильтонов.*

Доказательство. 1) Утверждение очевидно для турнира, содержащего менее трех вершин. Предположим по индукции, что любой турнир на n вершинах полугамильтонов. Рассмотрим произвольный турнир G, имеющий $n+1$ вершин, где $n \geqslant 2$, и произвольную вершину u в нем. По предположению индукции турнир $G - u$ полугамильтонов, т. е. в нем существует гамильтонова орцепь

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n.$$

Если в G имеется дуга $e_1 = uv_1$ или дуга $f_n = v_n u$, то, очевидно, турнир G полугамильтонов. Поэтому можно считать, что в G присутствуют дуги $f_1 = v_1 u$ и $e_n = uv_n$. В указанной выше гамильтоновой орцепи турнира $G - u$ возьмем первую вершину v_i, для которой в G имеется дуга $e_i = uv_i$. В силу выбора вершины v_i в G имеется дуга $f_{i-1} = v_{i-1} u$. Тогда в турнире G получаем гамильтонову орцепь

$$v_1 \to \ldots \to v_{i-1} \to u \to v_i \to \ldots \to v_n.$$

2) Будем доказывать более сильное утверждение: любой орсвязный турнир G на n вершинах содержит орциклы длины $3, 4, \ldots, n$.

Отметим, что любой неодноэлементный орсвязный турнир, очевидно, содержит не менее трех вершин.

Пусть G — неодноэлементный орсвязный турнир. Возьмем в турнире G произвольную вершину v. Множество вершин турнира $G - v$ распадается на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, где в V_1 собраны все вершины u, для которых в G имеется дуга из u в v, а в V_2 — все вершины w, для которых в G имеется дуга из v в w. Если $V_1 = \emptyset$, то v — источник турнира G, что невозможно. Следовательно, $V_1 \neq \emptyset$, и, аналогично, $V_2 \neq \emptyset$. Тогда в силу орсвязности турнира G обязательно существует дуга $g = wu$ для некоторых $w \in V_2$ и $u \in V_1$. Поэтому в турнире G получаем орцикл $v \to w \to u \to v$ длины 3.

Предположим теперь, что в G имеется орцикл

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_t \to v_1$$

длины t, где $3 \leqslant t < n$. Покажем, что в G сущестует орцикл длины $t + 1$. Положим

$$U = VG \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}.$$

Пусть в множестве U найдется вершина u такая, что в G имеются дуги $f_i = v_i u$ и $e_j = uv_j$ для некоторых i, j таких, что $1 \leqslant i, j \leqslant t$ и $i \neq j$. Рассмотрим два случая.

1. Если $i < j$, то существует s такое, что $i < s \leqslant j$ и в G присутствуют дуги $f_{s-1} = v_{s-1}u$ и $e_s = uv_s$. Тогда в турнире G получаем орцикл длины $t+1$:

$$v_1 \to \ldots \to v_{s-1} \to u \to v_s \to \ldots \to v_t \to v_1.$$

2. Пусть $j < i$. Если в G существует дуга $f_1 = v_1u$, то мы оказываемся в условиях рассмотренного случая, где вместо пары i, j надо взять пару $1, j$. Следовательно, мы можем считать, что существует дуга $e_1 = uv_1$ и, аналогично, существует дуга $f_t = v_tu$. Тогда в турнире G получаем орцикл длины $t+1$:

$$v_1 \to \ldots \to v_t \to u \to v_1.$$

Таким образом, мы можем считать, что множество U распадается на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 таких, что

1) в V_1 собраны все вершины $u \in U$, для которых дуга, инцидентная u и вершине v_i $(i = 1, \ldots, t)$, имеет вид $e_i = uv_i$,

2) в V_2 собраны все вершины $u \in U$, для которых дуга, инцидентная u и вершине v_i $(i = 1, \ldots, t)$, имеет вид $f_i = v_iu$.

Если $V_1 = \emptyset$, то турнир G не будет орсвязным, так как тогда не существует простых орцепей с началом в V_2 и концом в $\{v_1, \ldots, v_t\}$. Следовательно, $V_1 \neq \emptyset$ и, аналогично, $V_2 \neq \emptyset$.

Легко видеть, что в силу орсвязности турнира G существуют вершины $w_2 \in V_2$ и $w_1 \in V_1$, для которых в G имеется дуга

$$g = w_2w_1.$$

Тогда в турнире G получаем орцикл длины $t+1$:

$$w_2 \to w_1 \to v_2 \to \ldots \to v_t \to w_2.$$

□

4. Матроиды

4.1. Полумодулярные решетки, условие Жордана-Дедекинда

Напомним, что *решеткой* называется алгебра L с двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$ такими, что для любых $a, b, c \in L$ выполняется

1) $a \wedge a = a$,	1$'$) $a \vee a = a$,
2) $a \wedge b = b \wedge a$,	2$'$) $a \vee b = b \vee a$,
3) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$,	3$'$) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
4) $a \wedge (a \vee b) = a$,	4$'$) $a \vee (a \wedge b) = a$,

В решетке L можно ввести отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \ (a, b \in L).$$

Отметим, что $a \wedge b$ и $a \vee b$ являются соответственно точной нижней и точной верхней границами для элементов a и b относительно $\leqslant$.

Решетка L называется *модулярной*, если

$$a \geqslant b \to a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$$

для любых $a, b, c \in L$.

Для элементов a и b решетки L таких, что $a \leqslant b$, положим

$$[a, b] = \{x \in L \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Это подмножество замкнуто относительно операций $\wedge$ и $\vee$, т. е. является подрешеткой, и называется *интервалом* решетки L.

Лемма 1. *Для любых элементов a и b модулярной решетки L интервалы $[a \wedge b, a]$ и $[b, a \vee b]$ изоморфны.*

Доказательство. Определим отображение ϕ из $[a \wedge b, a]$ в $[b, a \vee b]$ и отображение ψ из $[b, a \vee b]$ в $[a \wedge b, a]$, полагая

$$\phi(x) = x \vee b \ (x \in [a \wedge b, a]),$$

$$\psi(y) = y \wedge a \ (y \in [b, a \vee b]).$$

Заметим, что

$$a \wedge b \leqslant x \leqslant a \Rightarrow b = (a \wedge b) \vee b \leqslant \phi(x) \leqslant a \vee b$$

и

$$b \leqslant y \leqslant a \vee b \Rightarrow a \wedge b \leqslant \psi(y) \leqslant a \wedge (a \vee b) = a.$$

Далее, для любого $x \in [a \wedge b, a]$ выполняется

$$\psi\phi(x) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (a \wedge b) = x,$$

т. е. $\psi\phi$ тождественно на $[a \wedge b, a]$ и, аналогично, $\phi\psi$ тождественно на $[b, a \vee b]$. Следовательно, ϕ и ψ — две взаимно обратные биекции.

Кроме того, ϕ и ψ сохраняют отношение $\leqslant$:

$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \leqslant \phi(x_2),$$

$$y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \psi(y_1) \leqslant \psi(y_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in [a \wedge b, a]$ и $y_1, y_2 \in [b, a \vee b]$.

Отсюда следует, что ϕ — изоморфизм подрешетки $[a \wedge b, a]$ на подрешетку $[b, a \vee b]$. $\square$

Через $\lessdot$ будем обозначать *отношение покрытия* в решетке L , т. е. мы полагаем $a \lessdot b$, если $a < b$ и интервал $[a, b]$ двухэлементен.

Решетка L называется *полумодулярной*, если

$$a \wedge b \lessdot a \Rightarrow b \lessdot a \vee b$$

для любых $a, b \in L$. В силу леммы 1 любая модулярная решетка полумодулярна.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над телом F. Тогда решетка $\mathrm{Sub}\, V$ подпространств пространства V, как известно, модулярна и, следовательно, полумодулярна.

Рассмотрим теперь решетку L, в которой все цепи конечны. Будем говорить, что L удовлетворяет *условию Жордана-Дедекинда*, если для любых двух элементов $a, b \in L$ таких, что $a < b$, все максимальные (a, b)-цепи в L имеют одинаковую длину, т. е. всегда из условий

$$a = u_0 \lessdot u_1 \lessdot \ldots \lessdot u_m = b,$$

$$a = v_0 \lessdot v_1 \lessdot \ldots \lessdot v_n = b$$

вытекает $m = n$.

Теорема 4.1. *Любая полумодулярная решетка, в которой все цепи конечны, удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда.*

Доказательство. Будем доказывать следующее утверждение:

для любых $a, b \in L$ таких, что $a < b$, если какая-либо максимальная (a, b)-цепь имеет длину m, то любая максимальная (a, b)-цепь имеет длину m.

При $m = 1$ имеем $a \lessdot b$ и утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для любого интервала, имеющего максимальную цепь длины меньшей m, и $m \geqslant 2$. Рассмотрим две максимальные (a, b)-цепи:

$$a = u_0 \lessdot u_1 \lessdot \ldots \lessdot u_m = b,$$

$$a = v_0 \lessdot v_1 \lessdot \ldots \lessdot v_n = b.$$

В силу предположения индукции мы можем считать, что $n \geqslant m$. Если $u_1 = v_1$, то, применяя предположение инукции к интервалу $[u_1, b]$, получаем $m-1 = n-1$, т. е. $m = n$. Пусть $u_1 \neq v_1$. В силу полумодулярности выполняется $u_1, v_1 \lessdot u_1 \vee v_1$. По предположению индукции любая максимальная (u_1, b)-цепь имеет длину $m - 1$. Следовательно, любая максимальная $(u_1 \vee v_1, b)$-цепь имеет длину $m - 2$. Отсюда следует, что любая максимальная (v_1, b)-цепь имеет длину $m-1$. Тогда $m-1 = n-1$, т. е. опять имеем $m = n$. $\square$

Далее под отношением $\lessdot\!\!\!=$ на решетке L будем понимать объединение отношения покрытия $\lessdot$ и отношения равенства $=$. В дальнейшем мы будем рассматривать решетки, обладающие наименьшим элементом, который будем называть нулем и будем обозначать через 0. *Атомом* будем называть элемент решетки, покрывающий ее наименьший элемент 0.

Лемма 2. *Пусть L — полумодулярная решетка с нулем 0. Тогда для любых $u, v, w \in L$ выполняется*

$$u \lessdot v \rightarrow u \vee w \lessdot\!\!\!= v \vee w.$$

В частности, для любого $a \in L$ и атома p такого, что $p \nleqslant a$, выполняется

$$a \lessdot a \vee p.$$

Доказательство. Если $v \leqslant u \vee w$, то $u \vee w = (u \vee w) \vee v = v \vee w$. Пусть $v \nleqslant u \vee w$. Тогда $u = v \wedge (u \vee w)$, так как $u \lessdot v$, и $v \vee (u \vee w) = v \vee w$. Отсюда в силу полумодулярности получаем $u \vee w \lessdot v \vee w$. $\square$

Пусть L — полумодулярная решетка с нулем 0, в которой все цепи конечны. Через $\dim a$ будем обозначать длину максимальной $(0, a)$-цепи. Это определение корректно в силу теоремы 4.1. Функцию $\dim x$ будем называть *функцией размерности* на решетке L.

Теорема 4.2. *Пусть L — полумодулярная решетка с нулем 0, в которой все цепи конечны. Тогда*

1) *для любых $a, b \in L$*

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) \leqslant \dim a + \dim b;$$

2) *решетка L модулярна в том и только в том случае, когда для любых $a, b \in L$*

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) = \dim a + \dim b.$$

Доказательство. 1) Пусть $a \wedge b = u_0 \lessdot u_1 \lessdot \ldots \lessdot u_m = a$. Объединяя все элементы этой цепи с b, в силу леммы 2 получаем

$$b = u_0 \vee b \leqslant\!\cdot\, u_1 \vee b \leqslant\!\cdot\, \ldots \leqslant\!\cdot\, u_m \vee b = a \vee b.$$

Отсюда следует

$$\dim a - \dim(a \wedge b) = m \geqslant \dim(a \vee b) - \dim b,$$

т. е.

$$\dim a + \dim b \geqslant \dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b).$$

2) Если решетка модулярна, то интервалы $[a \wedge b, a]$ и $[b, a \vee b]$ изоморфны по лемме 1. Следовательно,

$$\dim a - \dim(a \wedge b) = \dim(a \vee b) - \dim b.$$

Обратно, предположим, что для любых $a, b \in L$ выполняется равенство

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) = \dim a + \dim b.$$

Пусть, от противного, решетка L немодулярна. Тогда, как известно, она содержит пентагон (рис. 16) в качестве подрешетки.

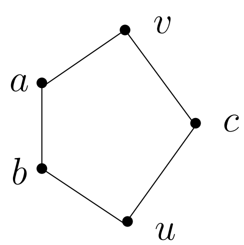


Рис. 16

Для элементов пентагона в силу нашего предположения получаем

$$\dim u + \dim v = \dim c + \dim a,$$

$$\dim u + \dim v = \dim c + \dim b,$$

т. е. $\dim a = \dim b$, что невозможно. □

Отметим, что неравенство из 1) называют *неравенством полумодулярности.*

Пример. Пусть V — конечномерное векторное пространство над телом F. Тогда решетка $\operatorname{Sub} V$ подпространств пространства V — это модулярная решетка с нулем, в которой все цепи конечны, и $\dim U$ совпадает с обычной размерностью подпространства U. Конечно, $\operatorname{Sub} V$ удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда, а равенство из утверждения 2) теоремы 4.2 есть обычная формула для размерности суммы и пересечения подпространств.

4.2. Конечномерные геометрические решетки и матроиды

Неодноэлементную решетку L называют *конечномерной геометрической решеткой*, если она

1) *полна*, т. е. существуют точная нижняя и точная верхняя границы любого множества ее элементов;

2) не содержит бесконечных цепей;

3) *точечна*, т. е. любой её элемент представим в виде объединения некоторого (возможно бесконечного) множества атомов;

4) полумодулярна.

Заметим, что в силу 2) решетка L имеет наименьший и наибольший элементы, которые удобно считать соответственно точной верхней и точной нижней границей пустого множества.

Примером конечномерной геометрической решетки может служить решетка подпространств $\operatorname{Sub} V$ любого конечномерного векторного пространства V над телом F.

Решетка L называется *решеткой с дополнениями*, если она имеет наименьший элемент 0, наибольший элемент 1 и для любого $u \in L$ существует $v \in L$ такой, что

$$u \wedge v = 0, u \vee v = 1.$$

Элемент v называют тогда *дополнением* элемента u.

Решетка называется *решеткой с относительными дополнениями*, если любой ее интервал есть решетка с дополнениями.

Теорема 4.3. *Любая конечномерная геометрическая решетка является решеткой с относительными дополнениями.*

Доказательство. Пусть $[a, b]$ — интервал конечномерной геометрической решетки L и $u \in [a, b]$. Среди элементов $u' \in [a, b]$ таких, что $u \wedge u' = a$ (отметим, что это равенство верно при $u' = a$), возьмём максимальный элемент u'. Покажем, что $u \vee u' = b$, т. е. u' – дополнение для u в интервале $[a, b]$.

Пусть, от противного, $u \vee u' < b$. Возьмём атом $q \leqslant b$ решетки L такой, что $q \nleqslant u \vee u'$. Такой атом существует в силу точечности решетки L. Тогда $q \nleqslant u$ и $q \nleqslant u'$. Положим $u'' = u' \vee q$. Очевидно, $a \leqslant u' \vee q \leqslant b$, т. е. $u'' \in [a, b]$. Так как $q \nleqslant u'$, по лемме 2 получаем $u' \lessdot u' \vee q = u''$.

В силу максимальности u' выполняется $a < u \wedge u''$. Тогда существует атом $p \leqslant u \wedge u'' \leqslant u, u''$ решетки L такой, что $p \nleqslant a = u \wedge u'$. Ясно, что $p \nleqslant u'$, иначе из $p \leqslant u'$ и $p \leqslant u$ получаем $p \leqslant u \wedge u' = a$. Так как $p \leqslant u''$, отсюда следует $u' \lessdot u' \vee p \leqslant u''$, т. е. $u'' = u' \vee p$. Тогда получаем

$$q \leqslant u'' \leqslant u'' \vee u = (u' \vee p) \vee u = u' \vee (p \vee u) = u' \vee u,$$

что противоречит выбору q.

Таким образом, $u \vee u' = b$ и, следовательно, u' – дополнение для u в $[a, b]$. $\square$

Теорема 4.4. *Любой интервал конечномерной геометрической решетки является конечномерной геометрической решеткой.*

Доказательство. Очевидно, нужно проверить лишь точечность интервала. Пусть в решетке L выполняется $a < c \leqslant b$. Тогда $c = \vee_{i \in I} p_i$ для некоторых атомов p_i $(i \in I)$ решетки L. Очевидно, среди указанных атомов существует такой атом p_i, что $p_i \nleqslant a$. Будем считать, что $p_j \nleqslant a$ для $j \in J \subseteq I$ и $p_k \leqslant a$ для $k \in I \setminus J$. Тогда по лемме 2 предыдущего раздела элементы $p_j \vee a$ являются атомами в интервале $[a, b]$ для $j \in J$ и

$$c = c \vee a = (\bigvee_{i \in I} p_i) \vee a = \bigvee_{i \in I} (p_i \vee a) = (\bigvee_{j \in J} (p_j \vee a)) \vee a = \bigvee_{j \in J} (p_j \vee a).$$

$\square$

Пусть E — непустое множество. Отображение $A \to \langle A \rangle$ множества $\mathcal{P}(E)$ всех подмножеств множества E в себя называется *оператором замыкания*, если для любых $A, B \subseteq E$ выполняется

1) $A \subseteq \langle A \rangle$;

2) $A \subseteq B \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$;

3) $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$.

Условие 1) называется *направленностью*, условие 2) – *монотонностью*, а условие 3) – *идемпотентностью* оператора замыкания.

Подмножество $A \subseteq E$ называется *замкнутым*, если $A = \langle A \rangle$.

Лемма 1. *Пересечение любого семейства замкнутых подмножеств замкнуто.*

Доказательство. Пусть A_i $(i \in I)$ – семейство замкнутых подмножеств. Тогда в силу монотонности $\langle \cap_i A_i \rangle \subseteq \langle A_j \rangle = A_j$ для любого $j \in I$. Отсюда получаем $\langle \cap_i A_i \rangle \subseteq \cap_i A_i$, т. е. $\cap_i A_i = \langle \cap_i A_i \rangle$ в силу направленности оператора замыкания. $\square$

Через $\mathrm{Sub}\, E$ обозначим множество всех замкнутых подмножеств оператора замыкания на E. Ясно, что в силу направленности $E \in \mathrm{Sub}\, E$.

Следствие 1. $\mathrm{Sub}\, E$ — *полная решетка относительно* $\subseteq$.

Доказательство. В $\mathrm{Sub}\, E$ существует точная нижняя граница для любого семейства элементов – это их пересечение, а также имеется наибольший элемент E (удобно считать, что наибольший элемент есть пересечение пустого семейства элементов). Как хорошо известно, в таком случае частично упорядоченное множество является полной решеткой (т. е. существует и точная верхняя граница для любого семейства элементов). $\square$

Заметим, что в $\mathrm{Sub}\, E$ операции пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ устроены следующим образом

$$A \wedge B = A \cap B \text{ и } A \vee B = \langle A \cup B \rangle.$$

Пример. Пусть V — векторное пространство над телом F. Через $\langle A \rangle$ обозначим линейную оболочку множества $A \subseteq V$. Очевидно, $A \to \langle A \rangle$ $(A \subseteq V)$ – оператор замыкания на V, а решетка $\mathrm{Sub}\, V$ подпространств пространства V и есть решетка замкнутых подмножеств.

Матроидом или *комбинаторной предгеометрией* $M(E)$ называется непустое множество E вместе с оператором замыкания $A \to \langle A \rangle (A \subseteq E)$ такое, что

4) (аксиома замены) для любых $p, q \in E$ и $A \subseteq E$ из $q \notin \langle A \rangle$ и $q \in \langle A \cup p \rangle$ вытекает $p \in \langle A \cup q \rangle$;

5) (аксиома существования конечного базиса) для любого $A \subseteq E$ существует такое конечное множество $B \subseteq A$, что $\langle B \rangle = \langle A \rangle$.

Матроид $M(E)$ называется *обыкновенным* или *комбинаторной геометрией*, если

6) $\langle\emptyset\rangle = \emptyset$ и $\langle\{p\}\rangle = \{p\}$ для любого $p \in E$.

В дальнейшем мы будем отождествлять множество $\{p\}$ с его элементом p, что не вызовет недоразумений, и будем писать $\langle p\rangle = p$.

Замкнутые подмножества матроида $M(E)$ будем называть его *листами* или *подпространствами*. Ясно, что $\langle\emptyset\rangle$ – наименьший лист в решетке листов $\operatorname{Sub} E$ матроида $M(E)$.

Лемма 2. *Пусть A — лист матроида $M(E)$ и $p \in E \setminus A$. Тогда $A \lessdot \langle A \cup p\rangle$ в решетке* $\operatorname{Sub} E$ *листов матроида $M(E)$.*

Доказательство. Очевидно, $A \subset \langle A \cup p\rangle$. Пусть B – такой лист, что $A \subset B \subseteq \langle A \cup p\rangle$. Возьмем элемент $q \in B \setminus A$. Тогда $q \notin A = \langle A\rangle$ и $q \in \langle A \cup p\rangle$. Откуда в силу аксиомы замены получаем $p \in \langle A \cup q\rangle \subseteq B$, т. е. $A \cup p \subseteq B$. Следовательно, $\langle A \cup p\rangle \subseteq B$ и поэтому $B = \langle A \cup p\rangle$. $\square$

Следствие 2. *Если $p \in E \setminus \langle\emptyset\rangle$, то $\langle p\rangle$ – атом решетки* $\operatorname{Sub} E$.

Теорема 4.5 (Биркгоф и Уитни). 1) *Решетка листов матроида является конечномерной геометрической решеткой.*

2) *Пусть L — конечномерная геометрическая решетка и E – множество её атомов. Для каждого $A \subseteq E$ положим*

$$\langle A\rangle = \{p \in E \mid p \leqslant \vee A\}.$$

Тогда множество E вместе с отображением $A \to \langle A\rangle$ является обыкновенным матроидом, решетка листов которого изоморфна L.

Доказательство. 1) Рассмотрим решетку $\operatorname{Sub} E$ листов некоторого матроида $M(E)$. В силу следствия 1 эта решетка полна. Она является точечной, так как

$$A = \vee\{\langle p\rangle \mid p \in A \setminus \langle\emptyset\rangle\}$$

для любого $A \in \operatorname{Sub} E$ и по следствию 2 элементы $\langle p\rangle$, где $p \in A \setminus \langle\emptyset\rangle$, есть атомы решетки $\operatorname{Sub} E$.

Покажем, что решетка $\operatorname{Sub} E$ полумодулярна. Пусть A, B – листы и $A \cap B \lessdot A$. Возьмем элемент $p \in A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$. Тогда $A = \langle (A \cap B) \cup p\rangle$. Отсюда получаем

$$A \vee B = \langle A \cup B\rangle = \langle B \cup p\rangle$$

и $B \lessdot \langle B \cup p\rangle$ по лемме 2, т. е. $B \lessdot A \vee B$.

Проверим теперь, что $\operatorname{Sub} E$ не содержит бесконечных цепей.

Покажем сначала, что $\operatorname{Sub} E$ не имеет счетных возрастающих цепей, т. е. $\operatorname{Sub} E$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Пусть, от противного, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ — возрастаяющая цепь листов. В силу аксиомы существования конечного базиса существует конечное множество $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ такое, что $\langle B \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \rangle$. В силу конечности B для некоторого $j \in \mathbf{N}$ выполняется $B \subseteq A_j$. Тогда

$$A_{j+1} \subseteq \langle \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \rangle = \langle B \rangle \subseteq A_j,$$

что невозможно.

Покажем теперь, что $\operatorname{Sub} E$ не имеет счетных убывающих цепей, т. е. $\operatorname{Sub} E$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Пусть, от противного, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ — убывающая цепь листов. Для каждого $i \in \mathbf{N}$ выберем элемент $a_i \in A_i \setminus A_{i+1}$ и положим $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Положим также $B_i = \{a_i, a_{i+1}, \ldots\}$ для любого $i \in \mathbf{N}$. Поскольку $\langle B_{i+1} \rangle \subseteq A_{i+1}$, для любого $i \in \mathbf{N}$ выполняется $a_i \notin \langle B_{i+1} \rangle$.

Предположим, что $a_t \in \langle A \setminus a_t \rangle$ для некоторого $t \in \mathbf{N}$. Тогда $a_t \in \langle B_1 \setminus a_t \rangle$ и $a_t \notin \langle B_{t+1} \rangle = \langle B_t \setminus a_t \rangle$ (здесь, очевидно, $t \neq 1$). Отсюда следует, что существует $j \in 1, \ldots, t-1$ такое, что

$$a_t \in \langle B_j \setminus a_t \rangle, a_t \notin \langle B_{j+1} \setminus a_t \rangle.$$

Преобразуя первое условие, получаем

$$a_t \in \langle (B_{j+1} \cup a_j) \setminus a_t \rangle = \langle (B_{j+1} \setminus a_t) \cup a_j \rangle.$$

Теперь в силу аксиомы замены заключаем, что

$$a_j \in \langle (B_{j+1} \setminus a_t) \cup a_t \rangle = \langle B_{j+1} \rangle,$$

что невозможно.

Мы установили, что $a_t \notin \langle A \setminus a_t \rangle$ для любого $t \in \mathbf{N}$, но это противоречит аксиоме существования конечного базиса.

Таким образом, $\operatorname{Sub} E$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей и условию обрыва убывающих цепей.

Пусть P — произвольная цепь из $\operatorname{Sub} E$. В силу условия обрыва убывающих цепей в P имеется наименьший элемент A_1. Если $P \setminus \{A_1\} \neq \emptyset$, то в $P \setminus \{A_1\}$ имеется наименьший элемент A_2. Если $P \setminus \{A_1, A_2\} \neq \emptyset$, то в $P \setminus \{A_1, A_2\}$ имеется наименьший элемент A_3. Продолжая этот процесс, мы будем строить возрастающую цепь $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$. В силу условия обрыва возрастающих цепей процесс построения возрастающей цепи завершится на некотором шаге, т. е. цепь P конечна.

Итак, в решетке $\mathrm{Sub}\, E$ нет бесконечных цепей и мы завершили доказательство утверждения 1).

2) Легко проверить, что отображение $A \to \langle A\rangle (A \subseteq E)$ является оператором замыкания на множестве атомов E конечномерной геометрической решетки L.

Заметим также, что подмножество из E замкнуто тогда и только тогда, когда оно состоит из всех атомов, лежащих под некоторым элементом решетки L.

Покажем, что выполняется аксиома замены. Пусть $q \notin \langle A\rangle$ и $q \in \in \langle A \cup p\rangle$ для некоторых $p, q \in E$ и $A \subseteq E$. Тогда в решетке L имеем $q \nleqslant \vee A$ и $q \leqslant (\vee A) \vee p$. Из этих условий вытекает $p \nleqslant \vee A$. Тогда в силу полумодулярности и леммы 2 из предыдущего раздела получаем

$$\vee A \lessdot (\vee A) \vee p \text{ и } \vee A \lessdot (\vee A) \vee q \leqslant (\vee A) \vee p.$$

Следовательно, $(\vee A) \vee q = (\vee A) \vee p$ и поэтому $p \leqslant (\vee A) \vee q$, т. е. $p \in \langle A \cup q\rangle$.

Проверим теперь аксиому существования конечного базиса. Пусть $A \subseteq E$ и $A \neq \emptyset$. В интервале $[0, \vee A]$ будем строить возрастающую цепь. Пусть для некоторого $i \in \mathbf{N}$ уже построена цепь

$$0 = u_0 \lessdot u_1 \lessdot \ldots \lessdot u_{i-1}$$

и $u_{i-1} < \vee A$. Очевидно, существует атом $p_i \in A$ такой, что $p_i \nleqslant u_{i-1}$. Положим $u_i = u_{i-1} \vee p_i$. Ясно, что $u_{i-1} \lessdot u_i \leqslant \vee A$ и мы получаем цепь

$$0 = u_0 \lessdot u_1 \lessdot \ldots \lessdot u_{i-1} \lessdot u_i.$$

Так как в решетке L нет бесконечных цепей, указанный процесс построения возрастающей цепи завершится на некотором шаге и мы получим цепь

$$0 = u_0 \lessdot u_1 \lessdot \ldots \lessdot u_n = \vee A,$$

где $n \in \mathbf{N}$. Положим $B = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Мы имеем $B \subseteq A$ и

$$\vee A = u_n = u_{n-1} \vee p_n = u_{n-2} \vee p_{n-1} \vee p_n =$$

$$= \ldots = p_1 \vee \ldots \vee p_n = \vee B.$$

Следовательно, $\langle A\rangle = \langle B\rangle$ и мы проверили выполнение аксиомы существования конечного базиса.

Итак, множество E вместе с указанным оператором замыкания образует матроид. Поскольку

$$\langle\emptyset\rangle = \{p \in E \mid p \leqslant \vee\emptyset = 0\} = \emptyset$$

и

$$\langle p\rangle = \{q \in E \mid q \leqslant p\} = p,$$

этот матроид является обыкновенным.

Рассмотрим отображение

$$\phi(u) = \{p \in E \mid p \leqslant u\}$$

решетки L в решетку $\operatorname{Sub} E$. Очевидно, это отображение сюрьективно. Оно инъективно, поскольку в силу точечности решетки L выполняется $u = \vee\phi(u)$ для любого $u \in L$. Следовательно, ϕ – биекция L на $\operatorname{Sub} E$.

Если $u_1 \leqslant u_2$ в L, то $\phi(u_1) \subseteq \phi(u_2)$ и, обратно, если $\phi(u_1) \subseteq \phi(u_2)$, то $u_1 = \vee\phi(u_1) \leqslant \vee\phi(u_2) = u_2$.

Таким образом, ϕ — изоморфизм решетки L на решетку $\operatorname{Sub} E$. $\square$

Заметим, что доказанная теорема говорит о том, что существует взаимно однозначное соответствие между конечномерными геометрическими решетками и обыкновенными матроидами.

В решетке $\operatorname{Sub} E$ листов матроида $M(E)$ в силу ее полумодулярности и отсутствия бесконечных цепей определена функция размерности. Листы размерности 1, 2 и 3 будем называть соответственно *точками, прямыми* и *плоскостями.*

Пример. Пусть V — n-мерное векторное пространство над телом F. Решетка $\operatorname{Sub} V$ подпространств пространства V является конечномерной геометрической решеткой, поэтому по теореме Биркгофа-Уитни ей отвечает некоторый обыкновенный матроид, который называют *векторной проективной геометрией* $PG(n-1, F)$ *над телом* F.

В заключение этого раздела обсудим без доказательства строение модулярных конечномерных геометрических решеток.

Пусть $\mathcal{U}$ – некоторое непустое множество элементов, называемых *точками*, а $\mathcal{L}$ – некоторое семейство подмножеств из $\mathcal{U}$, называемых *прямыми.* Множество точек $\mathcal{U}$ и прямых $\mathcal{L}$ называется *проективной геометрией*, если

1) через любые две различные точки проходит точно одна прямая;

2) любая прямая содержит не менее трех различных точек;

3) (аксиома Паша) если три точки a, b, c образуют треугольник, т. е. не лежат на одной прямой, и некоторая прямая l пересекает две стороны

треугольника, но не в точках a, b, c, то она пересекает и третью сторону треугольника.

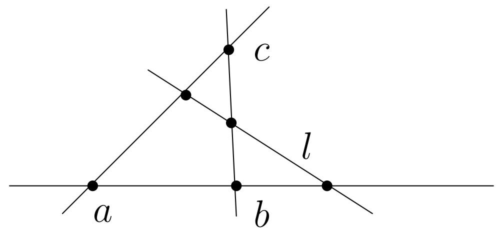


Рис. 17

Подпространством A проективной геометрии называется такое её множество точек, которое вместе с любыми двумя различными точками из A содержит и прямую, проходящую через них.

Введем понятие *g-размерности* или *геометрической размерности* для подпространств проективной геометрии. По определению точки имеют g-размерность 0, а прямые – g-размерность 1. Пусть A – произвольное подпространство g-размерности k и p – точка, не лежащая в A. Объединим все прямые, проходящие через p и точку из A. Получим, как нетрудно установить, подпространство. Это подпространство по определению имеет g-размерность $k+1$. Можно проверить, что понятие g-размерности введено корректно.

Добавим к нашим трем аксиомам еще одну аксиому:

4) $\mathcal{U}$ имеет конечную g-размерность.

Если $\mathcal{U}$ имеет g-размерность m, то говорят, что проективная геометрия $(\mathcal{U}, \mathcal{L})$ имеет g-размерность m.

Пересечение любого семейства подпространств проективной геометрии, очевидно, является подпространством. Поэтому множество $\mathrm{Sub}\,\mathcal{U}$ всех подпространств проективной геометрии $(\mathcal{U}, \mathcal{L})$ является полной решеткой относительно теоретико-множественного включения. Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.6. $\mathrm{Sub}\,\mathcal{U}$ — *модулярная конечномерная геометрическая решетка для любой проективной геометрии* $(\mathcal{U}, \mathcal{L})$.

Теорема 4.7. *Любая проективная геометрия g-размерности* $m > 2$ *изоморфна векторной проективной геометрии* $PG(m, F)$ *для некоторого тела* F.

Для проективных плоскостей, т. е. проективных геометрий g-размерности 2, справедлива следующая

Теорема 4.8. *Проективная плоскость изоморфна векторной проективной геометрии $PG(2, F)$ для некоторого тела F тогда и только тогда, когда она удовлетворяет аксиоме Дезарга: если два треугольника a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 перспективны относительно некоторой точки v (т. е. для любого $i = 1, 2, 3$ прямая, проходящая через a_i и b_i, проходит и через v), то точки пересечения соответственных сторон треугольника лежат на некоторой прямой l* (рис. 18).

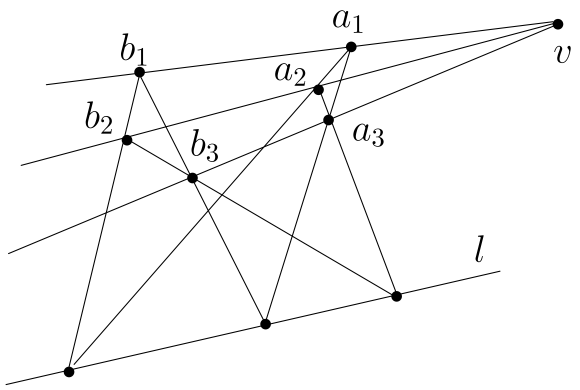


Рис. 18

Заметим, что если для обычной евклидовой плоскости во-первых, расширить множество точек, добавив семейство несобственных точек по одной для каждого пучка параллельных прямых, во-вторых, расширить каждую прямую, добавив несобственную точку пучка параллельных ей прямых, и, наконец, в-третьих, расширить множество прямых, добавив одну несобственную прямую, состоящую из всех несобственных точек, то получим *дезаргову* (т. е. удовлетворяющую аксиоме Дезарга) проективную плоскость. Рис. 19 служит иллюстрацией для этого построения.

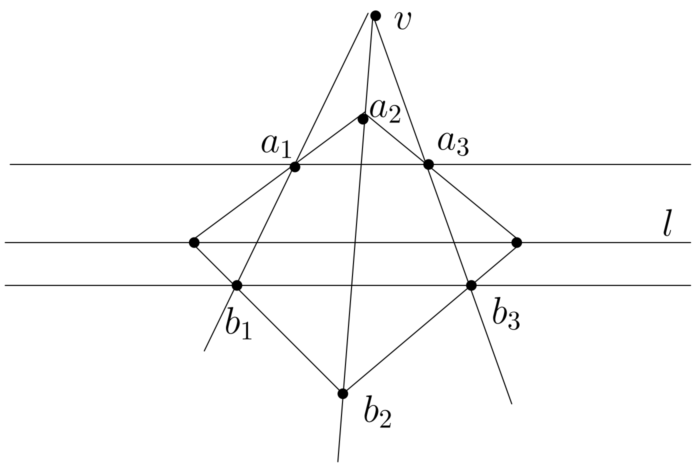


Рис. 19

Теорема 4.9 (Биркгоф). *Модулярные конечномерные геометрические решетки исчерпываются прямыми произведениями конечного числа решеток вида* $\mathrm{Sub}\,\mathcal{U}$ *для проективных геометрий* $(\mathcal{U}, \mathcal{L})$.

Отметим, что в силу предыдущих теорем фигурирующие здесь прямые множители $\mathrm{Sub}\,\mathcal{U}$ представляют из себя решетки подпространств конечномерных векторных пространств над телами, за исключением случаев, когда $(\mathcal{U}, \mathcal{L})$ — недезарговы проективные плоскости. К настоящему времени ещё не получено полной классификации недезарговых проективных плоскостей.

Отметим также, что дистрибутивные конечномерные геометрические решетки исчерпываются конечными булевыми алгебрами.

4.3. Основные понятия теории матроидов

Примем сначала важное соглашение:

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только конечные матроиды.

Таким образом, *матроид* $M(E)$ для нас – это конечное непустое множество E вместе с отображением $A \to \langle A \rangle$ множества $\mathcal{P}(E)$ в себя, удовлетворяющее аксиомам:

1) (направленность) $A \subseteq \langle A \rangle$ для любого $A \subseteq E$;

2) (монотонность) для любых $A, B \subseteq E$

$$A \subseteq B \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle;$$

3) (идемпотентность) $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$ для любого $A \subseteq E$;

4) (аксиома замены) для любых $p, q \in E$ и $A \subseteq E$

$$q \notin \langle A \rangle, q \in \langle A \cup p \rangle \Rightarrow p \in \langle A \cup q \rangle.$$

Матроид называется *обыкновенным*, если он удовлетворяет следующей дополнительной аксиоме:

5) $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$ и $\langle p \rangle = p$ для любого $p \in E$.

Из доказанного ранее вытекает, что решетка $\mathrm{Sub}\, E$ листов (конечного) матроида $M(E)$ является конечной геометрической решеткой, т. е. она

1) конечна;

2) точечна (любой её элемент есть объединение конечного числа атомов);

3) полумодулярна.

Перейдем теперь к рассмотрению основных понятий теории матроидов.

Пусть $M = M(E)$ — произвольный матроид. Множество $A \subseteq E$ называется *независимым*, если $p \notin \langle A \setminus p \rangle$ для любого $p \in A$ (в противном случае множество A называется *зависимым*). Через $\mathrm{Ind}(M)$ или просто Ind будем обозначать множество всех независимых подмножеств из E. Отметим, что $\emptyset \in \mathrm{Ind}$.

Лемма 1. 1) *Любое подмножество независимого множества независимо.*

2) *Пусть A — независимо и $p \in E \setminus A$. Тогда множество $A \cup p$ независимо в том и только в том случае, когда $p \notin \langle A \rangle$.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно.

2) Необходимость условия следует из определения. Обратно, пусть $p \notin \langle A \rangle$. Возьмем $q \in A$. Если $q \in \langle (A \setminus q) \cup p \rangle$, то на основании аксиомы замены и условия $q \notin \langle A \setminus q \rangle$ получаем $p \in \langle (A \setminus q) \cup q \rangle = \langle A \rangle$. Таким образом, $q \notin \langle (A \setminus q) \cup p \rangle$ и, очевидно, $p \notin \langle (A \cup p) \setminus p \rangle$, т. е. $A \cup p$ — независимое множество. $\square$

Пусть A — произвольное подмножество из E. Любое максимальное независимое подмножество B, содержащееся в A, будем называть *базой множества A*. Базы множества E будем называть *базами матроида M*. Через $\mathrm{Bs}(M)$ или просто Bs будем обозначать совокупность всех баз матроида M. Минимальные зависимые подмножества из E будем называть *циклами* матроида M. Через $\mathrm{Ccl}(M)$ или просто Ccl будем обозначать множество всех циклов матроида M.

Лемма 2. *Для любого подмножества A из E выполняется*

1) $\langle B \rangle = \langle A \rangle$ *для любой базы B множества A;*

2) *если I — независимое множество из A и B — база множества A, то $|I| \leqslant |B|$; в частности, все базы множества A равномощны;*

3) *любое независимое подмножество, содержащееся в A, может быть расширено до базы множества A.*

Доказательство. 1) Пусть B — база множества A. Если $p \in A \setminus B$, то $B \cup p$ зависимо и поэтому $p \in \langle B \rangle$ в силу леммы 1. Следовательно, $A \subseteq \langle B \rangle$, т. е. $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle$. Откуда вытекает равенство $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.

2) Если $I \subseteq B$, то, очевидно, $|I| \leqslant |B|$. Пусть $p_1 \in I \setminus B$. Тогда $p_1 \notin \langle I \setminus p_1 \rangle$ и множество $B \cup p_1$ зависимо. По лемме 1 имеем $p_1 \in$ $\in \langle B \rangle$. Следовательно, $B \nsubseteq \langle I \setminus p_1 \rangle$. Тогда существует $q_1 \in B$ такой, что

$q_1 \notin \langle I \setminus p_1 \rangle$. В силу леммы 1 множество $I_1 = (I \setminus p_1) \cup q_1$ независимо и $|I_1| = |I|$, $|I_1 \cap B| > |I \cap B|$. Продолжая действовать аналогичным образом, мы найдем независимое множество $I_t \subseteq B$ такое, что $|I| = |I_t| \leqslant |B|$.

3) Очевидно. $\square$

Рангом $r(A)$ подмножества A из E называется общая мощность всех баз из A. Число $r = r(M) = r(E)$ называется *рангом матроида* $M(E)$.

Лемма 3. *Для любого подмножества A из E выполняется*

1) $0 \leqslant r(A) \leqslant |A|$*;*

2) $r(A) = |A| \Leftrightarrow A$ *— независимое множество;*

3) $r(A) = r(\langle A \rangle) = \dim(\langle A \rangle)$*, где* $\dim$ *— функция размерности в решетке* $\operatorname{Sub} E$ *листов матроида* M*.*

Доказательство. 1) и 2) очевидны.

3) Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ — база множества A. По лемме 2 имеем $\langle B \rangle = \langle A \rangle$. Если $p \in \langle A \rangle \setminus B$, то $p \in \langle B \rangle$ и множество $B \cup p$ зависимо в силу леммы 1. Следовательно, B — база для $\langle A \rangle$ и мы получаем $r(A) = r(\langle A \rangle) = k$.

В силу независимости B для любого $i = 1, \ldots, k-1$ выполняется

$$b_{i+1} \notin \langle b_1, \ldots, b_i \rangle.$$

Тогда, применяя лемму 2 из предыдущего раздела, получаем цепочку покрытий

$$\langle \emptyset \rangle \lessdot \langle b_1 \rangle \lessdot \langle b_1, b_2 \rangle \lessdot \ldots \lessdot \langle b_1, \ldots, b_k \rangle = \langle A \rangle,$$

т. е. $k = \dim(\langle A \rangle)$ в решетке $\operatorname{Sub} E$. $\square$

Пусть A — лист матроида M. Говорят, что множество $H \subseteq A$ является *порождающим* для листа A, если $\langle H \rangle = A$. Порождающие множества листа E называются *порождающими множествами матроида* M.

Лемма 4. *Минимальные порождающие множества листа A и только они являются базами для A.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $A = \langle H \rangle$ и B — база для H. Так как $r(H) = r(A)$, B — база и для A. Тогда $\langle B \rangle = A$ и, следовательно, $H = B$ в силу минимальности H.

$\Leftarrow$. Пусть B — база для листа A. Тогда $A = \langle B \rangle$. Если $H \subset B$ и $\langle H \rangle = A$, то $r(A) = r(H) < r(B)$, что противоречиво. $\square$

Лемма 5. *Для любого $A \subseteq E$ и $p \in E$ выполняется*

1) $p \in \langle A \rangle \Leftrightarrow p \in A$ *или существует* $I \subseteq A$ *такое, что* $I \in \mathrm{Ind}$ *и* $I \cup p \notin \mathrm{Ind}$;

2) $p \in \langle A \rangle \Leftrightarrow p \in A$ *или существует* $C \in Ccl$ *такое, что* $p \in C \subseteq \subseteq A \cup p$;

3) $p \in \langle A \rangle \Leftrightarrow r(A \cup p) = r(A)$.

Доказательство. 1) Пусть $p \in \langle A \rangle \setminus A$ и B — база для A. В силу леммы 3 имеем $r(A) = r(\langle A \rangle)$, поэтому B — база и для $\langle A \rangle$. Следовательно, $B \cup p \notin \mathrm{Ind}$ и, кроме того, $B \in \mathrm{Ind}$.

Обратно, пусть $I \subseteq A, I \in \mathrm{Ind}$ и $I \cup p \notin \mathrm{Ind}$. Множество $I \cup p$ зависимо, поэтому в силу леммы 1 имеем $p \in \langle I \rangle \subseteq \langle A \rangle$.

1) и 2) эквивалентные утверждения. Это легко заметить, если вспомнить определение цикла.

3) Так как всегда $\langle A \cup p \rangle \supseteq \langle A \rangle$, получаем $p \in \langle A \rangle$ эквивалентно $\langle A \cup p \rangle = \langle A \rangle$, что, в свою очередь, эквивалентно $r(A \cup p) = r(A)$ в силу леммы 3. $\square$

4.4. Различные аксиоматизации матроидов

Теорема 4.10 (Аксиомы независимости). 1) *Пусть* $M(E)$ – *(конечный) матроид и* Ind – *семейство его независимых множеств. Тогда*

(I.1) $\emptyset \in \mathrm{Ind}$; $X \subseteq I \in \mathrm{Ind}$ *влечет* $X \in \mathrm{Ind}$ *для любого* X;

(I.2) *для любых* $I, J \in \mathrm{Ind}$ *таких, что* $|I| < |J|$, *существует* $p \in \in J \setminus I$, *для которого* $I \cup p \in \mathrm{Ind}$;

(I.2′) *для любого* $A \subseteq E$ *все максимальные в* A *независимые подмножества равномощны.*

2) *Обратно, пусть семейство* $\mathcal{I}$ *подмножеств конечного непустого множества* E *удовлетворяет условиям* (I.1), (I.2) *или, что эквивалентно, условиям* (I.1), (I.2′), *где* $\mathcal{I}$ *играет роль* Ind. *Тогда* $\mathcal{I}$ *совпадает с семейством независимых множеств однозначно определенного матроида на* E.

Доказательство. 1) Свойство (I.1) было уже отмечено в лемме 1 из предыдущего раздела, а свойство (I.2′) — в лемме 2. Применив (I.2′) к $I \cup J$, где $I, J \in \mathrm{Ind}$ и $|I| < |J|$, получим (I.2).

2) Обратно, пусть $\mathcal{I}$ удовлетворяет условию (I.1), где вместо Ind фигурирует $\mathcal{I}$. Легко видеть, что тогда (I.2) эквивалентно (I.2′). Поэтому будем считать, что выполняются все три свойства (I.1), (I.2) и (I.2′).

Общую мощность максимальных $\mathcal{I}$-подмножеств из A назовем $\mathcal{I}$-*рангом* множества A и обозначим через $\mathcal{I}r(A)$. Зададим отображение $A \to \langle A \rangle (A \subseteq E)$, полагая для произвольного $p \in E$: $p \in \langle A \rangle$ тогда и только тогда, когда $p \in A$ или существует $I \subseteq A$ такое, что $I \in \mathcal{I}$ и $I \cup p \notin \mathcal{I}$.

Заметим, что в силу леммы 5 предыдущего раздела искомый оператор замыкания обязан быть таким.

Свойства направленности и монотонности для заданного отображения очевидны.

Прежде чем доказывать идемпотентность покажем, что для любого $A \subseteq E$ выполняется равенство

$$\mathcal{I}r(A) = \mathcal{I}r(\langle A \rangle).$$

Пусть, от противного, существуют такие $I, J \in \mathcal{I}$, что $I \subseteq A$, $J \subseteq \langle A \rangle$ и

$$|I| = \mathcal{I}r(A) < \mathcal{I}r(\langle A \rangle) = |J|.$$

Тогда в силу (I.2) найдется $p \in J \setminus I$, для которого $I \cup p \in \mathcal{I}$. Учитывая максимальность I, получаем $p \in \langle A \rangle \setminus A$. По определению $\langle A \rangle$ существует такое $I' \subseteq A$, что

$$I' \in \mathcal{I}, I' \cup p \notin \mathcal{I}.$$

Очевидно, в силу (I.1) можно считать, что I' является максимальным $\mathcal{I}$-множеством из A, т. е. $|I'| = |I|$. Тогда $\mathcal{I}r(A) = |I'| < |I \cup p|$. По условию $(I.2)$ существует $q \in (I \cup p) \setminus I'$, для которого $I' \cup q \in \mathcal{I}$.

Если $q \in I$, то $I' \cup q \subseteq A$, что противоречит максимальности I'.

Если $q = p$, то $I' \cup p \in \mathcal{I}$, что противоречит выбору множества I'.

Таким образом, $\mathcal{I}r(A) = \mathcal{I}r(\langle A \rangle)$.

Докажем идемпотентность нашего отображения, т. е. проверим, что $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$ для любого $A \subseteq E$.

Пусть, от противного, существует $p \in \langle \langle A \rangle \rangle \setminus \langle A \rangle$. Возьмем некоторое максималное $\mathcal{I}$-множество B из A. Так как $p \notin \langle A \rangle$, по определению замыкания $\langle A \rangle$ выполняется $B \cup p \in \mathcal{I}$. Следовательно,

$$\mathcal{I}r(\langle A \rangle) = \mathcal{I}r(\langle \langle A \rangle \rangle) \geqslant$$

$$\geqslant |B \cup p| = \mathcal{I}r(A) + 1 = \mathcal{I}r(\langle A \rangle) + 1,$$

что невозможно.

Покажем теперь, что выполняется аксиома замены. Пусть $A \subseteq E$, $p, q \in E$, $q \notin \langle A \rangle$ и $q \in \langle A \cup p \rangle$. Тогда по определению замыкания существует $I \in \mathcal{I}$, для которого $I \subseteq A \cup p$ и $I \cup q \notin \mathcal{I}$. Так как $q \notin \langle A \rangle$, мы имеем

$$p \in I, (I \setminus p) \cup q \in \mathcal{I}.$$

Положим $I' = (I \setminus p) \cup q$. Тогда $I' \in \mathcal{I}$ и $I' \cup p \notin \mathcal{I}$, т. е. $p \in \langle A \cup q \rangle$.

Итак, наш оператор замыкания задает матроид M на E.

Наконец, $A \in \mathcal{I}$ выполняется тогда и только тогда, когда $p \notin \langle A \setminus p \rangle$ для любого $p \in A$, что, в свою очередь, эквивалентно условию $A \in \in \mathrm{Ind}(M)$.

Таким образом, $\mathcal{I} = \mathrm{Ind}(M)$. $\Box$

Условия (I.1) и (I.2) называют *аксиомами независимости.*

Теорема 4.11 (Аксиомы баз). 1) *Пусть $M(E)$ — (конечный) матроид и* Bs *— семейство его баз. Тогда*

(B.1) $\mathrm{Bs} \neq \emptyset$*; если* $B_1, B_2 \in \mathrm{Bs}$ *и* $B_1 \neq B_2$*, то* $B_1 \not\subseteq B_2$ *и* $B_2 \not\subseteq B_1$*;*

(B.2) *если* $B_1, B_2 \in \mathrm{Bs}$*, то для любого* $b_1 \in B_1$ *существует* $b_2 \in B_2$ *такой, что* $(B \setminus b_1) \cup b_2 \in \mathrm{Bs}$.

2) *Обратно, пусть семейство $\mathcal{B}$ подмножеств конечного непустого множества E удовлетворяет условиям* (B.1) *и* (B.2)*, где $\mathcal{B}$ играет роль* Bs*. Тогда $\mathcal{B}$ является семейством баз однозначно определенного матроида на E.*

Доказательство. 1) Свойство (B.1) очевидно, а свойство (B.2) вытекает из $(I.2)$ и условия равномощности баз.

2) Обратно, пусть семейство $\mathcal{B}$ удовлетворяет аксиомам (B.1) и (B.2), где вместо Bs фигурирует $\mathcal{B}$.

Покажем сначала, что все $\mathcal{B}$-множества равномощны. Пусть $B_1, B_2 \in \in \mathcal{B}$, $|B_1| = t$ и

$$B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_t\}.$$

По аксиоме $(B.2)$ существует $c_1 \in B_2$ такой, что

$$\{c_1, b_2, \ldots, b_t\} \in \mathcal{B}.$$

Здесь $c_1 \notin \{b_2, \ldots, b_t\}$ в силу условия (B1). Аналогично, существует $c_2 \in B_2$ такой, что

$$\{c_1, c_2, b_3, \ldots, b_t\} \in \mathcal{B}$$

и $c_2 \notin \{\mathrm{c}_1, b_3, \ldots, b_t\}$. Продолжая этот процесс, получим

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_t\} \in \mathcal{B}$$

для некоторых попарно различных элементов $c_1, c_2, \ldots, c_t \in B_2$. В силу аксиомы (B.1) получаем $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\} = B_2$, т. е. $|B_2| = t = |B_1|$.

Подмножество A из E будем называть *$\mathcal{B}$-независимым*, если оно содержится в некотором $\mathcal{B}$-множестве. Ясно, что $\mathcal{B}$-множества — это максимальные $\mathcal{B}$-независимые множества. Обозначим через $\mathcal{I}$ совокупность всех $\mathcal{B}$-независимых множеств.

Заметим, что семейство $\mathcal{I}$ удовлетворяет аксиоме независимости (I.1). Для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что семейство $\mathcal{I}$ удовлетворяет аксиоме (I.2) и воспользоваться теоремой 1.

Пусть $I, J \in \mathcal{I}$ и $|I| < |J|$. Зафиксируем $\mathcal{B}$-множество B_2, содержащее J. Среди $\mathcal{B}$-множеств, содержащих I, выберем такое $\mathcal{B}$-множество B_1, для которого пересечение $B_1 \cap B_2$ содержит наибольшее возможное число элементов.

Покажем, что $B_1 \setminus I \subseteq B_2$. Действительно, если сущестует $b_1 \in B_1 \setminus I$ такой, что $b_1 \notin B_2$, то по аксиоме (B.2) существует $b_2 \in B_2$, для которого

$$B = (B_1 \setminus b_1) \cup b_2 \in \mathcal{B}$$

и $b_1 \neq b_2$, так как $b_1 \notin B_2$, а $b_2 \in B_2$. Тогда $|B \cap B_2| > |B_1 \cap B_2|$, что невозможно, поскольку $I \subseteq B$.

Таким образом, $B_1 \setminus I, J \subseteq B_2$, причем

$$|B_1 \setminus I| + |J| = |B_1| - |I| + |J| > |B_1| = |B_2|.$$

Следовательно, существует $p \in (B_1 \setminus I) \cap J$. Так как $I \cup p \subseteq B_1$ и $p \in J \setminus I$, элемент p является искомым. $\square$

Заметим, что условие (B.2) называют *аксиомой Штейница о замене.*

Примеры. 1) Пусть $E = \{v_1, \ldots, v_m\}$ — некоторое множество векторов векторного пространства V над телом F. Рассмотрим множество всех максимальных линейно независимых подмножеств из E. Оно удовлетворяет аксиомам баз (B.1) и (B.2), т. е. мы имеем матроид на E с таким семейством баз. Этот матроид называют *векторным матроидом над телом F*.

2) Пусть G — произвольный ненулевой (n, m)-граф. Построим *матроид циклов* графа G, который будем обозначать через $M(G)$. В качестве основного множества E возьмем EG, в в качестве баз этого матроида — остовы (точнее, каждая база — это множество всех ребер некоторого остова). Аксиома (B.1) очевидна, а аксиома (B.2) выполняется в силу леммы 4 из раздела 2.1. Ясно, что в этом матроиде независимыми множествами будут ациклические множества ребер, а циклами — обычные циклы графа.

Пусть $M(E)$ — произвольный матроид на конечном множестве E.

Возьмем $A \subseteq E$. В качестве системы независимых множеств на A рассмотрим независимые множества исходного матроида, содержащиеся в A. Ясно, что на A мы получили матроид, который обозначают через $M(A)$ и называют *подматроидом* исходного матроида.

Пусть E_1 — конечное множество и ϕ — сюрьективное отображение E_1 на E. Определим следующим образом матроид $M(E_1)$ на множестве E_1. Пусть r — ранг матроида $M(E)$. Семейство элементов $\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq E_1$ назовем базой, если $\{\phi(a_1), \ldots, \phi(a_r)\}$ — база матроида $M(E)$. Очевидно, аксиомы баз выполняются и мы получили матроид $M(E_1)$. При переходе от E к E_1 каждый элемент a из E мы заменяем на некоторое конечное множество элементов (составляющих полный прообраз элемента a относительно ϕ). Для того чобы получить произвольную базу матроида $M(E_1)$ мы можем поступить следующим образом: берем сначала базу $b_1, \ldots, b_r$ матроида $M(E)$, а затем в полных прообразах элементов $b_1, \ldots, b_r$ берем соответственно по одному элементу $a_1, \ldots, a_r$. Аналогично устроены и независимые множества матроида $M(E_1)$. Можно мыслить себе, что матроид $M(E_1)$ получен из матроида $M(E)$ с помощью "размножения"элементов, т. е. заменой каждого элемента из E на некоторое число его копий. Поэтому матроид $M(E_1)$ будем называть *раздуванием матроида* $M(E)$.

Пусть V — векторное пространство над телом F. Возьмем некоторую систему векторов $v_1, \ldots, v_m$ из V (возможно с повторениями векторов). Построим матроид M, отвечающий этой системе векторов. Матроид M будет иметь m элементов. Для простоты мы можем считать, что элементами матроида M являются элементы $v_1, \ldots, v_m$, т. е. все они различны как элементы матроида M, но некоторые из них могут совпадать как элементы векторного пространства V. В качестве баз возьмем все максимальные линейно независимые подсистемы из $v_1, \ldots, v_m$. Мы получили матроид M, который, очевидно, является раздуванием некоторого векторного матроида над телом F. В дальнейшем раздувание векторного матроида над телом F также будем называть *векторным матроидом над телом* F.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

— некоторая матрица над телом F. Строки матрицы A являются элементами пространства векторов-строк F^m. Поэтому матрице A отвечает векторный матроид над телом F, состоящий из n элементов — строк матрицы A. Этот матроид называют *матроидом строк* матрицы A. Отметим, что здесь строки с разными номерами являются разными элементами матроида, хотя некоторые из них могут совпадать как элементы пространства F^m. Аналогично определяется *матроид столбцов* матрицы A.

Теорема 4.12 (Ранговые аксиомы). 1) *Пусть $M(E)$ — (конечный) матроид и r — его ранговая функция из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$. Тогда для любых $A, B \subseteq E$ выполняется*

(r.1) $0 \leqslant r(A) \leqslant |A|$;

(r.2) $A \subseteq B \to r(A) \leqslant r(B)$;

(r.3) $r(A \cap B) + r(A \cup B) \leqslant r(A) + r(B)$.

2) *Обратно, пусть некоторая функция τ из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$, где E — конечное непустое множество, удовлетворяет условиям* (r.1), (r.2) *и* (r.3). *Тогда она является ранговой функцией однозначно определенного матроида на E.*

Доказательство. 1) Свойства (r.1) и (r.2) очевидны. Докажем (r.3). Ясно, что $A \cap B \subseteq \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$ и $A \cup B \subseteq \langle A \rangle \vee \langle B \rangle$. Используя неравенство полумодулярности, которое выполняется в решетке листов, получаем

$$r(A \cap B) + r(A \cup B) \leqslant r(\langle A \rangle \cap \langle B \rangle) + r(\langle A \rangle \vee \langle B \rangle) \leqslant$$

$$\leqslant r(\langle A \rangle) + r(\langle B \rangle) = r(A) + r(B).$$

2) Обратно, пусть некоторая функция τ из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$, где E — конечное непустое множество, удовлетворяет условиям (r.1), (r.2) и (r.3).

Подмножество $I \subseteq E$ назовем *τ-независимым*, если выполняется $\tau(I) = |I|$. Обозначим через $\mathcal{I}$ множество всех τ-независимых подмножеств из E. В силу (r.1) выполняется $\tau(\emptyset) = 0$, т. е. $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Докажем, что семейство $\mathcal{I}$ удовлетворяет аксиомам независимости (I.1) и (I.2$'$).

Сначала проверим аксиому (I.1). Пусть $I \in \mathcal{I}$ и $X \subseteq I$. Предположим, от противного, что $\tau(X) < |X|$. Тогда, используя (r.3) и (r.1), получаем

$$|I| = \tau(I) = \tau(X \cup (I \setminus X)) \leqslant \tau(X) + \tau(I \setminus X) - \tau(\emptyset) < |X| + |I \setminus X| = |I|,$$

что невозможно. Следовательно, $\tau(X) = |X|$, т. е. $X \in \mathcal{I}$.

Прежде чем перейти к проверке аксиомы (I.2'), докажем следующее вспомогательное утверждение.

Пусть B — максимальное τ-независимое подмножество множества $A \subseteq E$. Тогда $\tau(A) = |B|$.

Если $A = B$, то $\tau(A) = \tau(B) = |B|$ в силу τ-независимости B. Пусть $B \subset A$ и $A \setminus B = \{p_1, \ldots, p_t\}$. В силу максимальности B для любого $i = 1, \ldots, t$ множество $B \cup p_i$ не является τ-независимым, поэтому

$$|B| = \tau(B) \leqslant \tau(B \cup p_i) < |B \cup p_i| = |B| + 1.$$

Отсюда следует, что $\tau(B \cup p_i) = |B|$.

Предположим, что $\tau(B \cup p_1 \cup \ldots \cup p_j) = |B|$ для некоторого $j = 1, \ldots, t-1$. Тогда, применяя (r.2) и (r.3), получаем

$$|B| = \tau(B) \leqslant \tau(B \cup p_1 \cup \ldots \cup p_{j+1}) \leqslant$$
$$\leqslant \tau(B \cup p_1 \cup \ldots \cup p_j) + \tau(B \cup p_{j+1}) - \tau(B) =$$
$$= |B| + |B| - |B| = |B|,$$

т. е. $\tau(B \cup p_1 \cup \ldots \cup p_{j+1}) = |B|$.

Теперь из доказанного вытекает, что $\tau(A) = \tau(B \cup p_1 \cup \ldots \cup p_t) = |B|$.

Отметим, что в силу вспомогательного утверждения все максимальные τ-независимые подмножества из $A \subseteq E$ имеют мощность, равную $\tau(A)$, т. е. для τ выполняется аксиома (I.2$'$).

Итак, мы установили справедливость для $\mathcal{I}$ аксиомы (I.2$'$).

Следовательно, семейство $\mathcal{I}$ является семейством независимых множеств некоторого матроида $M(E)$ на множестве E.

Осталось проверить, что исходная функция τ совпадает с ранговой функцией матроида $M(E)$. Для любой базы B произвольного множества $A \subseteq E$ в силу вспомогательного утверждения имеем $\tau(A) = B = r(A)$, откуда вытекает, что τ совпадает с r.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.13 (Аксиомы циклов). 1) *Пусть $M(E)$ — (конечный) матроид и* Ccl *— семейство его циклов. Тогда*

(C.1) $\emptyset \notin \mathrm{Ccl}$*; если $C_1, C_2 \in Ccl$ и $C_1 \neq C_2$, то $C_1 \not\subseteq C_2$ и $C_2 \not\subseteq C_1$;*

(C.2) *если $C_1, C_2 \in Ccl$, $C_1 \neq C_2$ и $p \in C_1 \cap C_2$, то существует $C \in \mathrm{Ccl}$ такой, что $C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus p$.*

2) *Обратно, пусть семейство $\mathcal{C}$ подмножеств конечного непустого множества E удовлетворяет условиям* (C.1) *и* (C.2)*, где вместо* Ccl *фигурирует $\mathcal{C}$. Тогда семейство $\mathcal{C}$ совпадает с семейством циклов однозначно определенного матроида на E.*

Доказательство. 1) Свойство (C.1) очевидно вытекает из определения цикла.

Для доказательства (C.2) достаточно проверить, что множество $D = (C_1 \cup C_2) \setminus p$ зависимо (тогда оно содержит минимальное зависимое множество — цикл). Так как $D \subseteq C_1 \cup C_2$, мы получаем

$$r(D) \leqslant r(C_1 \cup C_2) \leqslant r(C_1) + r(C_2) - r(C_1 \cap C_2) =$$

$$= |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| = |C_1 \cup C_2| - 2 <$$

$$< |C_1 \cup C_2| - 1 = |D|,$$

т. е. D — зависимое множество.

2) Обратно, пусть семейство $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию теоремы. Множество $I \subseteq E$ назовем $\mathcal{C}$-независимым, если оно не содержит ни одного из множеств $C \in \mathcal{C}$. Через $\mathcal{I}$ обозначим семейство всех $\mathcal{C}$-независимых множеств, содержащихся в E. Проверим, что семейство $\mathcal{C}$ удовлетворяет аксиомам независимости (I.1) и (I.2).

Поскольку $\emptyset \notin \mathcal{C}$, имеем $\emptyset \in \mathcal{I}$ и аксиома (I.1) очевидно выполняется.

Проверим справедливость аксиомы (I.2) для семейства $\mathcal{I}$. Предположим, что существуют множества $I, J \in \mathcal{I}$ такие, что $|I| < |J|$, для которых (I.2) неверно. Среди всех таких пар I, J выберем ту, у которой мощность $|I \cup J|$ минимальна. Положим $J \setminus I = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Если $t = 1$, то, очевидно, $I \subset J$ и утверждение (I.2) выполняется. Поэтому имеем $t \geqslant 2$.

В силу нашего предположения $I \cup p_i \notin \mathcal{I}$ для любого $i = 1, \ldots, t$. Следовательно, существует $C_i \in \mathcal{C}$ такое, что $C_i \subseteq I \cup p_i$, и в силу $\mathcal{C}$-независимости множества I имеем $p_i \in C_i$ для любого $i = 1, \ldots, t$. Ясно, что множества $C_1, \ldots, C_t$ попарно различны.

Рассмотрим множество C_1. Для него верно $p_1 \in C_1 \subseteq I \cup p_1$. В силу $\mathcal{C}$-независимости J существует $q_1 \in I \setminus J$ такой, что $q_1 \in C_1$. Рассмотрим теперь множество $(I \setminus q_1) \cup p_1$.

Если $(I \setminus q_1) \cup p_1 \notin \mathcal{I}$, то существует $C' \in \mathcal{C}$, для которого $p_1 \in C' \subseteq$ $\subseteq (I \setminus q_1) \cup p_1$, и, следовательно, в силу (C.2) существует такой $C'' \in \mathcal{C}$, что

$$C'' \subseteq (C_1 \cup C') \setminus p_1 \subseteq I.$$

Пришли к противоречию с условием $I \in \mathcal{I}$.

Пусть $(I \setminus q_1) \cup p_1 \in \mathcal{I}$. Заметим, что

$$|((I \setminus q_1) \cup p_1) \cup J| < |I \cup J|.$$

Поэтому в силу выбора пары I, J, для пары $(I \setminus q_1) \cup p_1, J$ существует элемент p_j, где $j \geqslant 2$, такой, что

$$(I \setminus q_1) \cup p_1 \cup p_j \in \mathcal{I}.$$

Возьмем множество $C_j \in \mathcal{C}$. Для него выполняется $p_j \in C_j \subseteq I \cup p_j$. Если $q_1 \notin C_j$, то $C_j \subseteq (I \setminus q_1) \cup p_j \subseteq (I \setminus q_1) \cup p_1 \cup p_j$, что невозможно. Следовательно, $q_1 \in C_j \cap C_1$ и $C_j \neq C_1$. Тогда по аксиоме $(C.2)$ существует $C \in \mathcal{C}$, для которого

$$\begin{gathered} C \subseteq (C_j \cup C_1) \setminus q_1 \subseteq (C_j \setminus q_1) \cup (C_1 \setminus q_1) \subseteq \\ \subseteq ((I \setminus q_1) \cup p_j) \cup ((I \setminus q_1) \cup p_1) = \\ = (I \setminus q_1) \cup p_1 \cup p_j \in \mathcal{I}, \end{gathered}$$

что невозможно.

Итак, семейство $\mathcal{I}$ удовлетворяет аксиомам независимости (I.1) и (I.2). Следовательно, существует матроид $M(E)$ на множестве E, для которого семейство $\mathcal{I}$ является семейством Ind независимых множеств. Из определения $\mathcal{C}$-независимости легко следует, что семейство $\mathcal{C}$ совпадает с множеством Ccl циклов матроида $M(E)$.

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть I — произвольное независимое множество матроида $M(E)$ и $p \in E$. Тогда $I \cup p$ содержит не более одного цикла.*

Доказательство. Пусть в $I \cup p$ содержится два различных цикла C_1 и C_2. Очевидно, $p \in C_1 \cap C_2$ в силу независимости множества I. Тогда по аксиоме $(C.2)$ существует цикл C такой, что

$$C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus p \subseteq I,$$

что невозможно. □

Следствие 2. *Для любой базы B матроида $M(E)$ и любого $p \in$ $\in E \setminus B$ множество $B \cup p$ содержит точно один цикл и этот цикл проходит через p.*

4.5. Двойственный матроид

Пусть $M = M(E)$ – произвольный матроид. Для $X \subseteq E$ через $\overline{X}$ будем обозначать, как обычно, теоретико-множественное дополнение, т. е. $\overline{X} = E \setminus X$. Для произвольной базы $B \in \mathrm{Bs}$ матроида M множество $\overline{B}$ будем называть его *кобазой*. Через Bs^* обозначим множество всех кобаз матроида M, т. е. $\mathrm{Bs}^* = \{\overline{B} \mid B \in \mathrm{Bs}\}$.

Теорема 4.14. *Множество* Bs^* *всех кобаз матроида удовлетворяет аксиомам баз* $(B.1)$ *и* $(B.2)$.

Доказательство. Поскольку для любых $X, Y \subseteq E$ условия $X \subseteq Y$ и $\overline{X} \supseteq \overline{Y}$ эквивалентны, аксиома $(B.1)$ очевидно выполняется для Bs^*.

Пусть теперь $\overline{B_1}$ и $\overline{B_2}$ – две кобазы и $p \in \overline{B_1}$. Так как $p \notin B_1$, в множестве $B_1 \cup p$ имеется точно один цикл C. Поскольку цикл C не лежит в B_2, существует $q \in C \cap \overline{B_2}$. Множество $(B_1 \cup p) \setminus q$ не содержит циклов, так как мы разрушили единственный цикл, удалив элемент q. Поэтому это множество независимо и его мощность равна мощности базы B_1. Следовательно, $(B_1 \cup p) \setminus q$ – база. Тогда для соответствующей кобазы выполняется

$$\overline{(B_1 \cup p) \setminus q} = \overline{(B_1 \cup p)} \cup q = (\overline{B_1} \setminus p) \cup q,$$

где $q \in \overline{B_2}$. Таким образом, мы проверили аксиому Штейница о замене для кобаз. □

В силу доказанной теоремы семейство кобаз Bs^* задает на E матроид, в котором исходные кобазы играют роль баз. Этот матроид называется *двойственным* к матроиду M и обозначается через $M^* = M^*(E)$. Конечно, $(M^*)^* = M$.

Зависимые и независимые множества, циклы матроида M^* называются соответственно *козависимыми* и *конезависимыми* множествами, *коциклами* матроида M. Ранговая функция матроида M^* называется *коранговой функцией* матроида M и обозначается через r^*. Очевидно,

$$r(M) + r^*(M) = |E|.$$

Пусть имеется некоторое утверждение о произвольном матроиде. Если в нем заменить все используемые матроидные понятия на соответствующие копонятия и наоборот, то мы получим утверждение, которое называется *двойственным* к исходному утверждению. Очевидно справедлив

Принцип двойственности. *Если некоторое утверждение верно для любого матроида, то двойственное к нему утверждение также верно для любого матроида.*

Следующая лемма легко вытекает из определений.

Лемма 1. *Произвольное подмножество элементов матроида зависимо тогда и только тогда, когда оно имеет непустое пересечение с каждой кобазой.*

В силу принципа двойственности верно следующее двойственное утверждение.

Лемма 2. *Произвольное подмножество элементов матроида козависимо тогда и только тогда, когда оно имеет непустое пересечение с каждой базой.*

Лемма 3. *Для любого непустого независимого множества $I \subseteq E$ матроида M существует такой коцикл C^*, что $|I \cap C^*| = 1$.*

Доказательство. Множество I можно продолжить до некоторой базы B. Возьмем $p \in I$. Тогда $\overline{B} \cup p$ содержит точно один коцикл C^*, для которого выполняется $C^* \cap B = \{p\} = C^* \cap I$. $\square$

Лемма 4. *Для любого цикла C и любого коцикла C^* справедливо условие*

$$|C \cap C^*| \neq 1.$$

Доказательство. Предположим, от противного, что $C \cap C^* = \{p\}$. Поскольку в силу леммы 2 коцикл C^* – это минимальное подмножество из E, имеющее непустое пересечение с каждой базой, множество $\overline{C}^*$ – это максимальное подмножество из E, не содержащее баз. Следовательно, $\overline{C}^* \cup p$ содержит некоторую базу B. Множество $C \setminus p$ независимо и лежит в $\overline{C}^* \cup p$. По аксиоме независимости $(I.2')$ существует база B_1 такая, что

$$C \setminus p \subseteq B_1 \subseteq \overline{C}^* \cup p$$

(поскольку $\overline{C}^* \cup p$ содержит базу B, любое максимальное независимое подмножество из $\overline{C}^* \cup p$ является базой матроида). Так как $\overline{C}^*$ не содержит баз, имеем $p \in B_1$. Следовательно, $C \subseteq B_1$, что невозможно. $\square$

Следующее утверждение нам понадобится в дальнейшем.

Теорема 4.15. *Подмножество $X \subseteq E$ является циклом матроида M тогда и только тогда, когда X есть минимальное множество среди непустых подмножеств из E, удовлетворяющих свойству:*

$$|X \cap C^*| \neq 1 \text{ *для любого цикла* } C^*.$$

Доказательство. Если X является циклом матроида, то силу леммы 4 он удовлетворяет требуемому свойству, а в силу леммы 3 имеет место необходимая минимальность.

Обратно, пусть X – минимальное множество среди непустых подмножеств из E, удовлетворяющих указанному свойству. В силу леммы 3 множество X зависимо и, следовательно, содержит некоторый цикл C. На основании леммы 4 и минимальности X получаем $X = C$. $\square$

Если на конечном непустом множестве E в качестве единственной базы взять множество E, то возникнет, очевидно, матроид, который называют *свободным* или *дискретным* матроидом на E. Здесь $\mathrm{Ind} = \mathcal{P}(E)$, $r(A) = |A|$ $(A \subseteq E)$ и $\mathrm{Ccl} = \emptyset$.

Матроид на E, двойственный к свободному матроиду, называется *тривиальным* матроидом. Он имеет единственное независимое множество и единственную базу – пустое множество, поэтому $r(A) = 0$ для любого $A \subseteq E$. Его циклами являются одноэлементные подмножества из E.

Пусть G – произвольный ненулевой (n, m, k)-граф. Рассмотрим матроид циклов $M = M(G)$ графа G на множестве $E = EG$. Базами этого матроида будут множества ребер графа, составляющие его остовы. Очевидно, ранг матроида $r(M) = n - k$ есть ранг графа G, а его коранг $r^*(M) = m - r(M) = m - n + k$ совпадает с цикломатическим числом графа G.

Пусть B – некоторая база матроида $M = M(G)$. Тогда соответствующую кобазу $\overline{B}$ называют еще и коостовом (это множество тех ребер графа, которые нужно отбросить из графа, чтобы получить его остов). В силу леммы 2 козависимые множества матроида $M(G)$ – это те и только те множества ребер графа, которые имеют непустое пересечение с каждой базой. Следовательно, козависимые множества из $M(G)$ – это те и только те множества ребер, при стирании которых в графе G разрушаются все остовы, т. е. увеличивается число компонент связности. Таким образом, козависимые множества из $M(G)$ – это в точности разрезающие множества ребер графа, а тогда коциклы – это разрезы! Следовательно, циклы и разрезы графа – это взаимно двойственные объекты. Матроид $M^*(G)$, двойственный к матроиду $M(G)$, называют *матроидом разрезов* графа G.

Отметим, что для любого дерева T матроид $M(T)$ свободен, а матроид $M^*(T)$ тривиален.

Пример. Рассмотрим матроид циклов следующего графа:

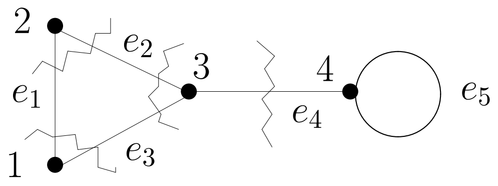


Рис. 20

Тогда

1) $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ – основное множество матроида;

2) $B_1 = \{e_2, e_3, e_4\}, B_2 = \{e_1, e_3, e_4\}, B_3 = \{e_1, e_2, e_4\}$ – множество баз;

3) $\overline{B_1} = \{e_1, e_5\}, \overline{B_2} = \{e_2, e_5\}, \overline{B_3} = \{e_3, e_5\}$ – множество кобаз;

4) $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}, \{e_4\}$ – множество коциклов, совпадающее с множеством разрезов рассматриваемого графа.

4.6. Жадный алгоритм

Пусть E — непустое конечное множество и w — функция из E в множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Число $w(e)$ будем называть *весом элемента* $e \in E$. Для любого непустого $A \subseteq E$ положим $w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$ и будем называть $w(A)$ *весом множества* A.

Зафиксируем некоторое семейство $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$, в котором имеется хотя бы одно непустое множество. Будем смотреть на $\mathcal{I}$ как на частично-упорядоченное множество относительно теоретико-множественного включения. Для удобства элементы частично-упорядоченного множества $\mathcal{I}$ будем называть *объектами.*

Будем далее считать, что $\mathcal{I}$ удовлетворяет аксиоме независимости $(I.1)$, т. е. подмножество объекта является объектом.

Рассмотрим следующую задачу:

В частично упорядоченном множестве объектов $\mathcal{I}$ построить максимальный объект минимально возможного веса.

Исследуем, при каких условиях на семейство объектов следующий алгоритм решает поставленную задачу.

Жадный алгоритм. 1) В качестве e_1 выберем в E элемент наименьшего возможного веса такой, что $\{e_1\} \in \mathcal{I}$.

2) Пусть элементы $e_1, \ldots, e_{i-1}$ уже выбраны. В качестве e_i выберем в E элемент наименьшего возможного веса такой, что

$$e_i \notin \{e_1, \ldots, e_{i-1}\} \text{ и } \{e_1, \ldots, e_i\} \in \mathcal{I}.$$

3) Выполняем 2) до тех пор пока это возможно. Процесс обязательно

завершится и будет построен максимальный объект

$$B = \{e_1, \ldots, e_r\} \in \mathcal{I}.$$

Теорема 4.16. *Пусть семейство объектов $\mathcal{I}$ удовлетворяет дополнительно аксиоме независимости* (I.2), *т. е. $\mathcal{I}$ является семейством* Ind *всех независимых множеств некоторого нетривиального матроида на E. Тогда любое множество B, построенное жадным алгоритмом, будет максимальным объектом минимально возможного веса.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}$ — семейство независимых множеств некоторого нетривиального матроида $M = M(E)$ и объект $B = \{e_1, \ldots, e_r\}$ построен жадным алгоритмом, как указано выше. Очевидно, B является базой матроида M.

Пусть, от противного, B не является базой минимального возможного веса. Среди баз минимального возможного веса выберем базу B', для которой число $|B \cap B'|$ имеет наибольшее возможное значение. Так как $B \neq B'$, имеем $B \not\subseteq B'$. Возьмем элемент e_i с наименьшим номером такой, что $e_i \notin B'$. Тогда $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\} \subseteq B \cap B'$. Множество $B' \cup e_i$ содержит точно один цикл C. Поскольку $C \not\subseteq B$, существует $e \in C \setminus B$. Ясно,что $e \in B'$. Положим $B'' = (B' \cup e_i) \setminus e$. Отбросив e, мы разрушили единственный цикл в $B' \cup e_i$. Следовательно, B'' — независимое множество матроида M и $|B''| = |B'|$, т. е. B'' — база матроида M. Кроме того, очевидно, $|B'' \cap B| > |B' \cap B|$. Поэтому $w(B'') > w(B')$ в силу выбора базы B'. Так как $w(B'') = w(B') + w(e_i) - w(e)$, получаем $w(e_i) - w(e) > 0$, т. е. $w(e_i) > w(e)$. Последнее неравенство противоречит тому, что на i-м шаге жадного алгоритма был выбран элемент e_i, а не элемент e, хотя $e \notin \{e_1, \ldots, e_{i-1}\} \subseteq B$ и множество $\{e_1, \ldots, e_{i-1}, e\} \subseteq B'$ независимо. □

Пусть G — связный неодноэлементный граф. Рассмотрим на множестве его ребер $E = E(G)$ некоторую весовую функцию w, которая каждому ребру e ставит в соответствие вес ребра $w(e) \in \mathbf{R}$. Семейство $\mathcal{I}$ ациклических наборов ребер является семейством независимых множеств матроида циклов $M(G)$ графа G. Базами этого матроида являются, по существу, остовы графа G. В силу доказанной теоремы жадный алгоритм в данном случае строит остов минимально возможного веса в графе G.

Следующее предложение показывает, что выполнение аксиомы независимости $(I.2)$ необходимо для того чтобы при любой весовой функции жадный алгоритм всегда строил бы в семействе объектов $\mathcal{I}$ максимальный объект минимально возможного веса.

Предложение 4.1. *Пусть семейство объектов $\mathcal{I}$ не удовлетворяет аксиоме независимости* (I.2). *Тогда существует весовая функция w из E в $\mathbf{R}$, для которой любое применение жадного алгоритма строит в $\mathcal{I}$ максимальный объект, не являющийся максимальным объектом минимально возможного веса.*

Доказательство. Пусть семейство объектов $\mathcal{I}$ не удовлетворяет аксиоме независимости (I.2). Тогда существуют $I, J \in \mathcal{I}$ такие, что $t = |I| < |J| = t+1$, где $t \in \mathbf{N}$, и $I \cup p \notin \mathcal{I}$ для любого $p \in J \setminus I$. Пусть $|I \cap J| = s$, где $s \in \mathbf{N} \cup 0$. Очевидно, $s < t$.

В качестве весовой функции рассмотрим следующую функцию

$$w(e) = \begin{cases} -1, & e \in I, \\ \dfrac{s-t-0,5}{t-s+1}, & e \in J \setminus I, \\ \quad 0, & e \in E \setminus (I \cup J). \end{cases}$$

Очевидно,

$$-1 < \frac{s-t-0,5}{t-s+1} < 0.$$

При такой весовой функции w жадный алгоритм сначала обязательно выбирет все элементы множества I, а затем (возможно) выбирет элементы из $E \setminus (I \cup J)$ и построит некоторое максимальное множество I_1 такое, что $I \subseteq I_1$ и $w(I_1) = w(I) = -t$.

Заметим, далее, что

$$w(J) = -s + (t+1-s) \cdot \frac{s-t-0,5}{t-s+1} = -t - 0,5 < -t.$$

Расширим J до некоторого максимального в $\mathcal{I}$ множества J_1. Тогда, очевидно, $w(J_1) \leqslant w(J) < w(I_1)$.

Следовательно, любое построенное жадным алгоритмом максимальное множество I_1 не является максимальным объектом минимально возможного веса. □

4.7. Изоморфизмы матроидов

Пусть $M_1 = M(E_1)$ и $M_2 = M(E_2)$ — два матроида. Биективное отображение ϕ из E_1 на E_2 называется *изоморфизмом* матроида M_1 на матроид M_2, если для любого $B \subseteq E_1$ множество B является базой матроида M_1 тогда и только тогда, когда его образ $\phi(B)$ является базой матроида M_2. Очевидно, при изоморфизме циклы переходят на циклы, кобазы — на кобазы, независимые множества — на независимые множества и т. д.

Определение изоморфизма эквивалентным образом можно дать, используя любое из основных матроидных понятий (базы, кобазы, независимые множества, конезависимые множества, зависимые множества, козависимые множества, циклы, коциклы). Приведем, для примера, определение изоморфизма на языке козависимых множеств.

Биективное отображение ϕ из E_1 на E_2 называется изоморфизмом матроида M_1 на матроид M_2, если для любого $A \subseteq E_1$ множество A козависимо в M_1 тогда и только тогда, когда его образ $\phi(A)$ — козависимое множество в M_2.

Мы будем писать $M_1 \cong M_2$ и говорить, что матроиды M_1 и M_2 *изоморфны*, если существует изоморфизм матроида M_1 на матроид M_2. Заметим, что из $M_1 \cong M_2$ вытекает $M_1^* \cong M_2^*$.

Любой матроид, изоморфный векторному матроиду над телом F, также будем называть *векторным* над телом F. Очевидно, любой векторный матроид над телом F изоморфен матроиду столбцов некоторой матрицы над телом F. Действительно, в соответствующем конечномерном векторном пространстве надо взять базис и перейти от векторов, отвечающих элементам матроида, к их координатным столбцам.

Матроид назовем *графическим*, если он изоморфен матроиду циклов некоторого ненулевого графа, и — *кографическим*, если он изоморфен матроиду разрезов некоторого ненулевого графа.

Теорема 4.17. *Матроид циклов $M(G)$ ненулевого графа G изоморфен матроиду столбцов матрицы инцидентности $I(G)$ над двухэлементным полем $\mathbf{Z}_2$.*

Доказательство. Для произвольного $A \subseteq E = E(G)$ через $I(A)$ обозначим подматрицу матрицы $I = I(G)$, составленную из столбцов, отвечающих ребрам из A. Достаточно доказать, что $\operatorname{rank} I(A) < |A|$ тогда и только тогда, когда подграф (V, A) содержит цикл, где $V = VG$ и $A \neq \emptyset$.

Пусть C — цикл подграфа (V, A). Ранг матрицы $I(A)$ не изменится, если изменить нумерацию вершин и ребер. Перенумеруем вершины из V и ребра из A таким образом, чтобы вершины и ребра цикла C имели наименьшие возможные номера. Тогда матрица $I(A)$ примет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_1 & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right),$$

где $I_1 = I(C)$. Для квадратной матрицы I_1 над полем $\mathbf{Z}_2$ выполняется $\det I_1 = 0$, так как $I_1 = 0$ или в каждом столбце матрицы I_1 имеется точно два элемента, равных 1, а остальные элементы равны 0. Следовательно, ранг матрицы $I(A)$ строго меньше числа ее столбцов, равного $|A|$, т. е. $\operatorname{rank} I(A) < |A|$.

Обратно, предположим, что ненулевой подграф (V, A) является ациклическим. Возьмем одну из нетривиальных компонент связности H_1 этого подграфа. Изменим нумерацию вершин и ребер графа G. Одной из висячих вершин v_1 и инцидентному ей ребру графа H_1 припишем номера, равные 1. Перейдем к графу $H_1 - v_1$. Опять одной из висячих вершин графа $H_1 - v_1$ и инцидентному ей ребру припишем номера, равные 2, и т. д. Так перенумеруем вершины и ребра компоненты связности H_1, пока не останется точно одна вершина, которую мы занумеруем позже. Затем аналогичным образом поступим со следующей нетривиальной компонентой связности H_2 графа (V, A) и т. д. В конце процесса занумеруем вершины, которые остались незанумерованными после обработки всех нетривиальных компонент связности графа (V, A). Матрица $I(A)$ примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & 1 \\ * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ее ранг равен числу столбцов, т. е. $\operatorname{rank}(A) = |A|$. $\square$

Теорема 4.18. *Матроид, двойственный к векторному матроиду над телом F, также является векторным над телом F.*

Доказательство. Очевидно, свободный и тривиальный матроиды являются векторными над произвольным телом F. Они изоморфны матроиду столбцов соответственно единичной и нулевой матриц подходящего порядка над телом F.

Пусть M — произвольный нетривиальный и несвободный матроид, который является векторным над телом F, и $r = r(M)$. Тогда в силу замечания, сделанного выше, M изоморфен матроиду столбцов некоторой $(t \times m)$-матрицы P над телом F. Ясно, что $\operatorname{rank} P = r$ и $0 < r < m$.

Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений над пространством векторов-столбцов F^m:

$$PX = 0. \tag{1}$$

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_{m-r} \tag{2}$$

— базис пространства решений системы (1). Составим из этих столбцов $(m \times (m-r))$-матрицу

$$Q = (X_1, X_2, \ldots, X_{m-r}).$$

Покажем, что матроид M^* изоморфен матроиду строк матрицы Q над телом F.

Отметим сначала, что $\operatorname{rank} Q = m - r = r(M^*)$. Далее, вспомним, что базами матроида M^* являются дополнения баз матроида M. Рассмотрим отображение ϕ, которое i-й столбец матрицы P переводит на i-ю строку матрицы Q. Покажем, что это отображение и есть искомый изоморфизм.

Нам достаточно установить, что система каких-либо r столбцов матрицы P линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима дополняющая ее система $m-r$ строк матрицы Q. Дополняющая система строк — это система строк, номера которых дополняют номера столбцов исходной системы столбцов до множества $\{1, \ldots, m\}$.

Возьмем произвольную систему из r столбцов матрицы P. Для простоты обозначений будем считать, что взяты первые r столбцов. Рассуждения в общем случае проводятся абсолютно аналогично, но требуют громоздких обозначений. Пусть P_1 — это $(t \times r)$-подматрица матрицы P, составленная из взятых первых r столбцов. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений над пространством векторов-столбцов F^r:

$$P_1 Y = 0. \tag{3}$$

Если столбцы матрицы P_1 линейно зависимы, то система (3) имеет ненулевое решение Y. Добавим к нему снизу $m-r$ нулей, получим ненулевое решение X системы (1). Выразим X через базис (2) пространства решений системы (1):

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{m-r} X_{m-r}, \tag{4}$$

где среди коэффициентов есть хотя бы один ненулевой элемент из F. Введем в рассмотрение столбцы

$$X_1', X_2', \ldots, X_{m-r}' \tag{5}$$

из пространства F^{m-r}, полученные соответственно из столбцов X_1, $X_2, \ldots, X_{m-r}$ отбрасыванием первых r компонент. Составим из этих «урезанных» столбцов $((m-r)\times(m-r))$-матрицу:

$$Q_1 = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_{m-r}).$$

Матрица Q_1 — это квадратная матрица порядка $m-r$, которая является подматрицей матрицы Q и расположена внизу матрицы Q. Из равенства (4) следует

$$0 = \alpha_1 X'_1 + \alpha_2 X'_2 + \ldots + \alpha_{m-r} X'_{m-r}, \tag{6}$$

т. е. система столбцов квадратной матрицы Q_1 линейно зависима. Тогда линейно зависима и система строк этой матрицы, т. е. линейно зависима система из $m-r$ последних строк матрицы Q.

Обратно, пусть система каких-либо $m-r$ строк матрицы Q линейно зависима. Для простоты обозначений будем считать, что эта система состоит из последних $m-r$ строк матрицы Q. Тогда линейно зависима система (5) «урезанных» столбцов, составляющих матрицу Q_1. Следовательно, некоторая нетривиальная линейная комбинация (6) «урезанных» столбцов равна 0. С помощью равенства (4) определим столбец X. Поскольку система столбцов (2) линейно независима, имеем $X \neq 0$. Столбец X является решением системы (1), так как он равен линейной комбинации базиса пространства решений этой системы. Тогда столбец Y, полученный из столбца X отбрасыванием последних $m-r$ нулевых компонент, является ненулевым решением системы (3). Следовательно, линейно зависима система из первых r столбцов матрицы P_1, что и требовалось доказать. □

4.8. Пространство циклов бинарного матроида

Матроид называется *бинарным*, если он является векторным над полем $\mathbf{Z}_2$. В силу результатов предыдущего раздела матроид циклов и матроид разрезов любого ненулевого графа являются бинарными матроидами.

Пусть $M(E)$ – произвольный бинарный матроид. Превратим $\mathcal{P}(E)$ в векторное пространство над полем $\mathbf{Z}_2$, полагая для любых $X, Y \in \mathcal{P}(E)$

$$X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y), \quad 1 \cdot X = X, \quad 0 \cdot X = \emptyset.$$

Очевидно, $\mathcal{P}(E)$ – векторное пространство над $\mathbf{Z}_2$ относительно симметрической разности $\oplus$ и заданного умножения на скаляры из $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Обозначим через $L(M)$ подмножество из $\mathcal{P}(E)$, состоящее из всех подмножеств множества E, представимых в виде объединения попарно непересекающихся циклов матроида M (конечно, среди них будет пустое подмножество $\emptyset$ и любой цикл матроида M). Зафиксируем некоторую базу B матроида M. Тогда для любого $e \in \overline{B}$ через C_e обозначим единственный цикл, который содержится в множестве $B \cup e$.

Теорема 4.19. *Пусть $M = M(E)$ — произвольный бинарный матроид. Тогда*

1) $L(M)$ *— подпространство векторного пространства $\mathcal{P}(E)$;*
2) $\{C_e \,|\, e \in \overline{B}\}$ *— базис пространства $L(M)$ над полем $\mathbf{Z}_2$;*
3) $\dim L(M) = r^*(M)$.

Доказательство. Поскольку M — векторный матроид над $\mathbf{Z}_2$, он изоморфен матроиду столбцов некоторой $(l \times m)$-матрицы P над полем $\mathbf{Z}_2$. Пусть ϕ — соответствующий изоморфизм такой, что $\phi(e_i) = p_i$, где $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, а p_i — это i-й столбец матрицы P.

Для любого $X \subseteq E$ положим $S(X) = \sum\limits_{e \in X} \phi(e)$, где суммирование ведется в пространстве векторов-столбцов $\mathbf{Z}_2^l$. Конечно, мы считаем, что $S(\emptyset) = 0$, где 0 — нулевой столбец из $\mathbf{Z}_2^l$. Из определения видно, что $S(X \Cup Y) = S(X) + S(Y)$ для любых двух непересекающихся подмножеств $X, Y \subseteq E$.

Покажем сначала, что для любого $X \subseteq E$

$$X \in L(M) \Leftrightarrow S(X) = 0.$$

Действительно, пусть $C = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}\}$ — цикл матроида M. Тогда его образ $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_t}\}$ относительно изоморфизма ϕ будет минимальной линейно зависимой системой столбцов матрицы P. Следовательно, некоторая нетривиальная линейная комбинация этих столбцов равна 0:

$$\alpha_1 p_{i_1} + \ldots + \alpha_t p_{i_t} = 0.$$

В силу минимальности системы столбцов все скаляры равны 1, т. е. $S(C) = 0$. Пусть теперь $X = C_1 \Cup \ldots \Cup C_t$ — объединение попарно непересекающихся циклов. Тогда $S(X) = S(C_1) + \ldots + S(C_t) = 0$.

Обратно, пусть $X \subseteq E, X \neq \emptyset$ и $S(X) = 0$. Тогда система столбцов матрицы P, соответствующая множеству X относительно ϕ, линейно зависима. Поэтому X — зависимое множество матроида M и, следовательно, существует цикл $C_1 \subseteq X$. Положим $X_1 = X \setminus C_1$. Тогда

$0 = S(X) = S(X_1) + S(C_1) = S(X_1)$. Если $X_1 \neq \emptyset$, то существует цикл $C_2 \subseteq X_1$. Положим $X_2 = X_1 \setminus C_2$ и т. д. Через несколько шагов множество X будет разбито в объединение семейства попарно непересекающихся циклов.

Проверим теперь, что $L(M)$ — подпространство пространства $\mathcal{P}(E)$. Для этого достаточно доказать замкнутость $L(M)$ относительно $\oplus$. Пусть $X, Y \in L(M)$. Тогда $S(X) = S(Y) = 0$ и мы получаем

$$S(X \oplus Y) = S(\{X \setminus (X \cap Y)\} \Cup \{Y \setminus (X \cap Y)\}) =$$

$$= S(X \setminus (X \cap Y)) + S(Y \setminus (X \cap Y)) =$$

$$= S(X \setminus (X \cap Y)) + S(X \cap Y) + S(X \cap Y) + S(Y \setminus (X \cap Y)) =$$

$$= S(X) + S(Y) = 0,$$

т. е. $X \oplus Y \in L(M)$.

Таким образом, $L(M)$ — подпространство пространства $\mathcal{P}(E)$.

Покажем теперь, что $\{C_e \,|\, e \in \overline{B}\}$ — базис пространства $L(M)$. Сначала проверим, что эта система линейно независима. Пусть $e_1, \ldots, e_t$ — произвольная система различных элементов из $\overline{B}$. Тогда

$$\{e_1, \ldots, e_t\} \subseteq C_{e_1} \oplus \ldots \oplus C_{e_t},$$

т. е. $C_{e_1} \oplus \ldots \oplus C_{e_t} \neq \emptyset$. Иными словами, любая нетривиальная линейная комбинация векторов системы $\{C_e \,|\, e \in \overline{B}\}$ отлична от нуля.

Покажем теперь, что $\{C_e \,|\, e \in \overline{B}\}$ — система образующих пространства $L(M)$. Пусть X — произвольный ненулевой элемент из $L(M)$, т. е. $X \neq \emptyset$. Тогда X — зависимое множество и, следовательно, оно пересекается с каждой кобазой. Положим

$$X \cap \overline{B} = \{e_1, \ldots, e_t\} \neq \emptyset.$$

Рассмотрим множество $Y = X \oplus C_{e_1} \oplus \ldots \oplus C_{e_t}$. Очевидно, $Y \in L(M)$ и $Y \cap \overline{B} = \emptyset$. Отсюда следует $Y = \emptyset$, т. е. $X = C_{e_1} \oplus \ldots \oplus C_{e_t}$.

Итак, $\{C_e \,|\, e \in \overline{B}\}$ — базис пространства $L(M)$ и, следовательно, $\dim L(M) = |\overline{B}| = r^*(M)$. $\square$

Пространство $L = L(M)$ называют *пространством циклов* бинарного матроида $M = M(E)$, а его базис $\{C_e \,|\, e \in \overline{B}\}$ — *фундаментальной системой циклов* относительно базы B. Так как матроид M^* также бинарен, мы получаем *пространство коциклов* $L^* = L(M^*)$ и *фундаментальную систему коциклов* $\{C^*_f \,|\, f \in B\}$, причем $\dim L^* = r(M)$.

Теорема 4.20. *Пусть $f \in B$ и $C_{e_1}, \ldots, C_{e_t}$ — множество всех циклов фундаментальной системы, содержащих f. Тогда*

$$C_f^* = \{f, e_1, \ldots, e_t\}.$$

Доказательство. Положим $X = \{f, e_1, \ldots, e_t\}$. Множество $\overline{B} \cup f$ содержит точно один коцикл C_f^*. Очевидно, $X \subseteq \overline{B} \cup f$. Поэтому достаточно установить, что X является коциклом. По теореме, двойственной к теореме 4.16, X является коциклом, если X есть минимальное множество среди непустых подмножеств из E, удовлетворяющих свойству $|X \cap C| \neq 1$ для любого цикла C.

Пусть C — цикл. Он однозначно представим через фундаментальную систему циклов в виде

$$C = C_{u_1} \oplus \ldots \oplus C_{u_s},$$

где $u_1, \ldots, u_s$ — попарно различные элементы из $\overline{B}$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f \in C$. Тогда $f \in C_{u_i}$ для некоторого u_i, где $i \in \{1, \ldots, s\}$ и $\{f, u_i\} \subseteq X \cap C$, т. е. $|X \cap C| > 1$.

2. Предположим теперь, что $f \notin C$.

2.1. Если f не входит ни в один из циклов $C_{u_1}, \ldots, C_{u_s}$, то $u_1, \ldots, u_s \notin$ $\notin X$ и $X \cap C = \emptyset$, т. е. опять имеем $|X \cap C| \neq 1$.

2.2. Пусть теперь f входит в некоторый из циклов $C_{u_1}, \ldots, C_{u_s}$. Тогда f входит в четное число указанных циклов. Следовательно, $f \in C_{u_i}$ и $f \in C_{u_j}$ для некоторых различных u_i и u_j. Тогда $\{u_i, u_j\} \subseteq X \cap C$ и опять $|X \cap C| \neq 1$.

Итак, мы установили, что $|X \cap C| \neq 1$ для любого цикла C.

Проверим, что это условие нарушается для собственных непустых подмножеств множества X. Пусть $Y \subset X$ и $Y \neq \emptyset$. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что $f \notin Y$. Тогда $Y \subseteq \overline{B}$ и поэтому множество Y конезависимо. Согласно лемме, двойственной лемме 3 из раздела 6, существует такой цикл C, что $|Y \cap C| = 1$.

2. Пусть $f \in Y$. Тогда существует $i \in \{1, \ldots, t\}$, для которого $e_i \notin Y$. Следовательно, $Y \cap C_{e_i} = \{f\}$, т. е. $|Y \cap C_{e_i}| = 1$.

Итак, X является коциклом и поэтому $C_f^* = X$. □

4.9. Пространство циклов и пространство разрезов графа

Пусть G — произвольный ненулевой граф. Матроид циклов $M =$ $= M(G)$ и матроид разрезов $M^* = M^*(G)$ графа G являются бинарными матроидами. Рассмотрим подпространства $L = L(M)$ и $L^* = L(M^*)$ пространства $\mathcal{P}(E)$ над полем $\mathbf{Z}_2$, где $E = EG$. Пространства L и L^* называют соответственно *пространством циклов* и *пространством разрезов* графа G. Часто их обозначают соответственно через $L(G)$ и $L^*(G)$.

Зафиксируем некоторый остов B графа G (точнее, под B мы понимаем множество ребер остова). Ребра графа, лежащие в B, будем называть *ветвями*, а ребра, лежащие в $\overline{B}$, — *хордами*. Базис $\{C_e \mid e \in \overline{B}\}$ пространства $L(G)$ называют *фундаментальной системой циклов* графа G, а базис $\{C^*_f \mid f \in B\}$ — *фундаментальной системой разрезов* графа G. Заметим, что $\dim L(G) = r^*(G) = m - n + k$ — это цикломатическое число (n, m, k)-графа G, а $\dim L^*(G) = r(G) = n - k$ — его ранг. Отсюда легко выводится следующее утверждение.

Лемма 1. *Любой (n, m, k)-граф содержит не более $2^{m-n+k} - 1$ циклов и не более $2^{n-k} - 1$ разрезов.*

Пример. Рассмотрим следующий граф G и его остов B:

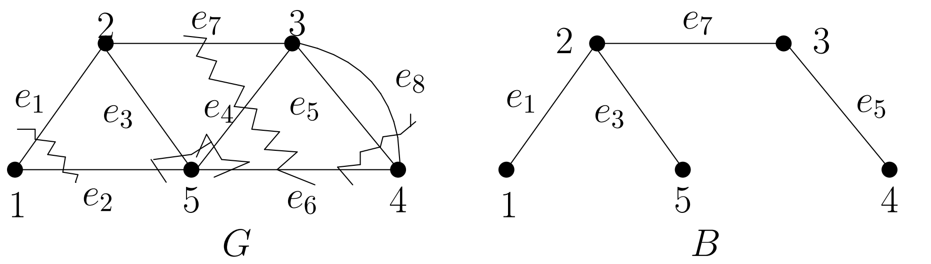


Рис. 21

Применяя теорему 4.20, найдем фундаментальную систему разрезов, отвечающих этому остову:

1) $\{e_1, e_2\}$;
2) $\{e_3, e_2, e_4, e_6\}$;
3) $\{e_7, e_4, e_6\}$;
4) $\{e_5, e_6, e_8\}$.

Из результатов раздела, посвященного эйлеровым графам, легко вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.21. *Пусть G — произвольный ненулевой граф. Множество ребер $X \subseteq E$ является вектором пространства циклов $L(G)$ графа G тогда и только тогда, когда в реберно порожденном подграфе $G(X)$ все компоненты связности являются эйлеровыми графами.*

Прежде чем изучить устройство векторов пространства разрезов графа G получим ряд вспомогательных результатов, часть из которых представляет и самостоятельный интерес.

Пусть $A, B \subseteq V = VG$. Через $\langle A, B\rangle$ будем обозначать множество ребер графа G, соединяющих вершины из A с вершинами из B. Пусть $V = V_1 \Cup V_2$ — разбиение множества вершин графа G на два возможно пустых непересекающихся подмножества. Множество ребер $\langle V_1, V_2\rangle$ будем называть *сечением* графа G. Очевидно, любое сечение либо пусто, либо является разрезающим множеством ребер графа G.

Лемма 2. *Любой разрез графа является его сечением.*

Доказательство. Пусть при удалении ребер разреза S из графа G компонента связности G_1 графа G разбивается на две компоненты связности G_1' и G_1''. Положим $V_1 = VG_1'$ и $V_2 = V \setminus V_1$. Очевидно, $S = \langle V_1, V_2\rangle$. $\square$

В пространстве $\mathcal{P}(E)$, где E — множество ребер ненулевого графа G, зафиксируем канонический базис, состоящий из всех одноэлементных подмножеств множества E:

$$\{e_1\}, \ldots, \{e_m\}.$$

Пусть $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Тогда

$$X = \alpha_1\{e_1\} \oplus \ldots \oplus \alpha_m\{e_m\},$$

$$Y = \beta_1\{e_1\} \oplus \ldots \oplus \beta_m\{e_m\}$$

для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$. Заметим, что столбцы координат векторов X и Y в данном случае представляют из себя характеристические функции для подмножеств X и Y множества E. Определим *скалярное прозведение* в $\mathcal{P}(E)$, полагая

$$X \cdot Y = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_m\beta_m \in \mathbf{Z}_2.$$

Легко проверить, что определенное таким образом скалярное произведение линейно по каждой компоненте.

Как обычно, назовем векторы X и Y *ортогональными* и будем писать $X \perp Y$, если $X \cdot Y = 0$. Очевидно, X ортогонально Y тогда и только тогда, когда X и Y имеют четное число общих ребер.

Пусть $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Будем писать $X \perp \mathcal{U}$, если вектор X ортогонален любому вектору из $\mathcal{U}$. Определим *ортогональное дополнение* $\mathcal{U}^\perp$ множества $\mathcal{U}$, полагая

$$\mathcal{U}^\perp = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \perp \mathcal{U}\}.$$

Нетрудно установить, что $\mathcal{U}^\perp$ является подпространством пространства $\mathcal{P}(E)$.

Лемма 3. *Любой цикл ортогонален любому сечению графа.*

Доказательство. Пусть C — цикл, а $S = \langle V_1, V_2 \rangle$ — сечение графа G, где $VG = V_1 \Cup V_2$. Зафиксируем один из двух обходов по циклу C. Начнем двигаться из некоторой начальной вершины v в направлении обхода по циклу C. Без ограничения общности можно считать, что $v \in V_1$. Поскольку обход цикла заканчивается в вершине v, каждому переходу по ребру из V_1 в V_2 обязательно соответствует следующий за ним (через некоторое число шагов) переход по ребру из V_2 в V_1. Таким образом, ребра из пересечения $C \cap S$ разбиваются на пары, поэтому C и S имеют четное число общих ребер. □

На основании лемм 2 и 3 получаем

Следствие 1. *Любой цикл ортогонален любому разрезу графа.*

Теорема 4.22. $L^{\perp} = L^*$ *и* $(L^*)^{\perp} = L$.

Доказательство. Покажем сначала, что $L \perp L^*$. Пусть $X \in L$ и $Y \in L^*$. Тогда для X и Y существуют разложения

$$X = \bigoplus_{i=1}^{s} C_i, Y = \bigoplus_{j=1}^{t} C_j^*$$

соответственно через циклы и разрезы фундаментальных систем. Отсюда в силу ортогональности циклов и разрезов вытекает

$$X \cdot Y = \sum_{i,j} (C_i \cdot C_j^*) = 0,$$

т. е. $X \perp Y$.

Из доказанного получаем $L^* \subseteq L^{\perp}$ и $L \subseteq (L^*)^{\perp}$. Из обратных включений докажем включение $(L^*)^{\perp} \subseteq L$, другое включение проверяется аналогично.

Пусть $X \in (L^*)^{\perp}$. Положим $X \cap \overline{B} = \{e_1, \ldots, e_t\}$ (случай, когда $X \cap \overline{B} = \emptyset$, мы не исключаем). Рассмотрим вектор Y, заданный условием $Y = X \oplus C_{e_1} \oplus \ldots \oplus C_{e_t}$ (здесь $Y = X$, если $X \cap \overline{B} = \emptyset$). Очевидно, $Y \cap \overline{B} = \emptyset$, т. е. $Y \subseteq B$. Кроме того, $Y \in (L^*)^{\perp}$, так как $C_{e_1} \oplus \ldots \oplus C_{e_t} \in$ $\in L \subseteq (L^*)^{\perp}$. Если $Y \neq \emptyset$, то Y — непустое независимое множество и поэтому в силу леммы 3 из раздела 6 существует разрез C^* такой, что $|Y \cap C^*| = 1$, т. е. Y не ортогонален C^*, что невозможно. Таким образом, $Y = \emptyset$ и, следовательно, $X = C_{e_1} \oplus \ldots \oplus C_{e_t} \in L$. □

В связи с доказанной теоремой заметим, что пространство $\mathcal{P}(E)$ не всегда представимо в виде прямой суммы подпространств L и L^*. Примером может служить следующий граф:

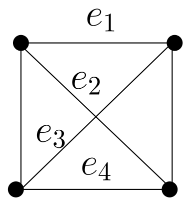


Рис. 22

Здесь множество $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является одновременно и циклом и разрезом, т. е. $L \cap L^*$ не является нулевым подпространством и поэтому сумма $L \oplus L^*$ не является прямой суммой.

Лемма 4. *Симметрическая разность сечений является сечением.*

Доказательство. Пусть $V = V_1 \dot\cup V_2 = V_3 \dot\cup V_4$, $S_1 = \langle V_1, V_2\rangle$ и $S_2 = \langle V_3, V_4\rangle$. Положим

$$A = V_1 \cap V_3, \quad B = V_1 \cap V_4, \quad C = V_2 \cap V_3, \quad D = V_2 \cap V_4.$$

Тогда

$$S_1 = \langle A \dot\cup B, C \dot\cup D\rangle = \langle A, C\rangle \dot\cup \langle A, D\rangle \dot\cup \langle B, C\rangle \dot\cup \langle B, D\rangle,$$

$$S_2 = \langle A \dot\cup C, B \dot\cup D\rangle = \langle A, B\rangle \dot\cup \langle A, D\rangle \dot\cup \langle C, B\rangle \dot\cup \langle C, D\rangle.$$

Отсюда вытекает

$$S_1 \oplus S_2 = \langle A, C\rangle \dot\cup \langle A, B\rangle \dot\cup \langle B, D\rangle \dot\cup \langle C, D\rangle = \langle A \dot\cup D, B \dot\cup C\rangle,$$

где $V = (A \cup D) \dot\cup (B \cup C)$, т. е. $S_1 \oplus S_2$ является сечением. □

Теорема 4.23. *Пусть G — произвольный ненулевой граф. Тогда сечения графа G и только они являются векторами пространства разрезов $L^*(G)$ графа G.*

Доказательство. Пусть S — сечение графа G. По лемме 3 сечение S ортогонально любому циклу из фундаментальной системы циклов. Следовательно, $S \perp L$. Откуда вытекает, что $S \in L^\perp = L^*$.

Обратно, пусть $S \in L^*$. Тогда S представимо в виде симметрической разности разрезов из фундаментальной системы разрезов:

$$S = C_1^* \oplus \ldots \oplus C_t^*.$$

Отсюда на основании лемм 2 и 4 получаем, что S является сечением. □

4.10. Монотонные полумодулярные функции. Индуцированный матроид

Пусть E — непустое конечное множество. Функция f из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$ называется *монотонной полумодулярной функцией*, если она удовлетворяет ранговым аксиомам (r.2) и (r.3).

Лемма 1. *Пусть f — монотонная полумодулярная функция из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$ такая, что $f(\emptyset) = 0$. Тогда такими же свойствами обладает функция f^+ из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$, заданная равенством*

$$f^+(A) = \min_{U \subseteq A}(f(U) + |A \setminus U|)$$

для любого $A \subseteq E$.

Доказательство. Свойство $f^+(\emptyset) = 0$ выполняется очевидным образом. Проверим монотонность функции f^+. Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E$. Тогда для произвольного $U \subseteq A_2$ выводим

$$f(U \cap A_1) + |A_1 \setminus (U \cap A_1)| = f(U \cap A_1) + |A_1 \setminus U| \leqslant f(U) + |A_2 \setminus U|,$$

откуда очевидно вытекает $f^+(A_1) \leqslant f^+(A_2)$.

Далее, используя простые теоретико-множественные рассуждения (см. рис. 23), нетрудно проверить, что для любых $A_1 \subseteq A \subseteq E$ и $B_1 \subseteq B \subseteq E$ имеет место равенство

$$|A \setminus A_1| + |B \setminus B_1| = |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|.$$

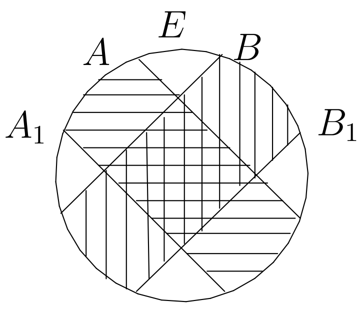


Рис. 23

Отсюда в силу полумодулярности функции f получаем

$$(f(A_1) + |A \setminus A_1|) + (f(B_1) + |B \setminus B_1|) \geqslant$$
$$\geqslant (f(A_1 \cup B_1) + |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)|)+$$
$$+(f(A_1 \cap B_1) + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|).$$

Теперь, используя полученное неравенство, выводим

$$f^+(A) + f^+(B) = \min_{A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B} (f(A_1) + |A \setminus A_1| + f(B_1) + |B \setminus B_1|) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B} (f(A_1 \cup B_1) + |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| +$$
$$+ f(A_1 \cap B_1) + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{X \subseteq A \cup B, Y \subseteq A \cap B} (f(X) + |(A \cup B) \setminus X| + f(Y) + |(A \cap B) \setminus Y|) =$$
$$= f^+(A \cup B) + f^+(A \cap B).$$

□

Лемма 2. *Пусть f — такая же функция, как в лемме 1. Тогда*
1) *если $|U| \leqslant f(U)$ для любого $U \subseteq A$, то $f^+(A) = |A|$;*
2) *если $|U| > f(U)$ для некоторого $U \subseteq A$, то $f^+(A) < |A|$.*

Доказательство. Пусть $|U| \leqslant f(U)$ для любого $U \subseteq A$. Тогда $f(U) + |A \setminus U| \geqslant |A| (U \subseteq A)$ и для $U = \emptyset$ имеем $f(\emptyset) + |A \setminus \emptyset| = |A|$. Следовательно, $f^+(A) = |A|$.

Если $|U| > f(U)$ для некоторого $U \subseteq A$, то $f(U) + |A \setminus U| < |A|$ и потому $f^+(A) < |A|$. □

Теорема 4.24 (Эдмондс). *Пусть E — непустое конечное множество и f — монотонная полумодулярная функция из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$ такая, что $f(\emptyset) = 0$. Тогда существует матроид $M_f(E)$ на множестве E, для которого*

1) *функция f^+ является ранговой функцией, т. е.*

$$r(A) = \min_{U \subseteq A} (f(U) + |A \setminus U|)$$

для любого $A \subseteq E$;

2) *произвольное множество $A \subseteq E$ независимо в том и только в том случае, когда $|U| \leqslant f(U)$ для любого $U \subseteq A$.*

Доказательство. В силу леммы 2 для любого $A \subseteq E$ имеем $0 \leqslant \leqslant f^+(A) \leqslant |A|$, т. е. f^+ удовлетворяет ранговой аксиоме (r.1). Таким образом, f^+ удовлетворяет всем трем ранговым аксиомам и, следовательно, является ранговой функцией точно одного матроида на E. Обозначим этот матроид через $M_f(E)$.

Произвольное подмножество $A \subseteq E$ независимо в матроиде $M_f(E)$ тогда и только тогда, когда $r(A) = |A|$, т. е. когда $f^+(A) = |A|$. В силу леммы 2 последнее условие эквивалентно тому, что $|U| \leqslant f(U)$ для любого $U \subseteq A$. $\square$

Матроид $M_f(E)$, указанный в теореме, будем называть матроидом, индуцированным монотонной полумодулярной функцией f.

Полезно заметить, что если у произвольной монотонной полумодулярной функции из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$ значение от пустого множества заменить на 0, то подправленная функция снова будет монотонной полумодулярной функцией и к ней можно применять доказанную теорему.

Заметим также, что если f удовлетворяет всем трем ранговым аксиомам, то $f^+ = f$.

Отметим, что теорема Эдмондса дает один из наиболее полезных методов конструирования новых матроидов, в чем мы сможем убедиться в следующих двух разделах.

4.11. Трансверсальные матроиды

Пусть $G = (V, R)$ — двудольный граф, долями которого являются непустые множества X и Y, т. е. $V = X \uplus Y$ и любое ребро $e \in R$ соединяет некоторую вершину из X с некоторой вершиной из Y. В дальнейшем такой граф G мы будем записывать в виде $G = (X, R, Y)$ или, что эквивалентно, в виде $G = (Y, R, X)$. Для удобства мы будем писать кратко $xy \in R$, если в R имеется ребро вида $e = xy$.

Для произвольного $A \subseteq X$ положим

$$R(A) = \bigcup_{a \in A} \{y \in Y \mid ay \in R\}.$$

Лемма 1. *Функция $f(A) = |R(A)|$ из $\mathcal{P}(X)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$ является монотонной полумодулярной функцией и $f(\emptyset) = 0$.*

Доказательство. Условие $f(\emptyset) = 0$ выполняется очевидным образом, и функция f монотонна, так как для любых $A \subseteq B \subseteq X$ верно включение $R(A) \subseteq R(B)$.

Предположим, далее, что $A, B \subseteq X$. Тогда в силу соотношений $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$ и $R(A \cap B) \subseteq R(A) \cap R(B)$ получаем

$$|R(A \cup B)| + |R(A \cap B)| \leqslant |R(A) \cup R(B)| + |R(A) \cap R(B)| =$$

$$= |R(A)| + |R(B)|,$$

т. е. функция f полумодулярна. $\square$

В силу теоремы Эдмондса из предыдущего раздела функция f, указанная в лемме, индуцирует матроид $M_f(X)$ на множестве X. Будем обозначать этот матроид через $T(X,R,Y)$. В матроиде $T(X,R,Y)$ независимые множества A характеризуются условием:

$$|U| \leqslant |R(U)| \text{ для любого } U \subseteq A,$$

а ранговая функция задается равенством:

$$r(A) = \min_{U \subseteq A}(|R(U)| + |A \setminus U|).$$

Любой матроид, изоморфный матроиду вида $T(X,R,Y)$, будем называть *трансверсальным матроидом.*

Аналогично предыдущему для любого $B \subseteq Y$ положим

$$R(B) = \bigcup_{b \in B} \{x \in X \mid xb \in R\}.$$

Функция $g(B) = |R(B)|$ из $\mathcal{P}(Y)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$ индуцирует матроид $M_g(Y) = T(Y,R,X)$.

Паросочетанием P в двудольном графе $G = (X,R,Y)$ называют такое подмножество ребер из R, что любые два различных ребра из P несмежны, т. е. не имеют общих концевых вершин. Через $match_X(P)$ и $match_Y(P)$ будем обозначать множество всех концевых вершин ребер паросочетания P, лежащих соответственно в X и Y. Будем говорить, что множество $A \subseteq X$ является *частичной трансверсалью* в X, если $A = match_X(P)$ для некоторого паросочетания P графа $G = (X,R,Y)$. Будем также говорить, что множество $A \subseteq X$ *может паросочетаться* с множеством $B \subseteq Y$, если $A = match_X(P)$ и $B = match_Y(P)$ для некоторого паросочетания P графа $G = (X,R,Y)$ (конечно, здесь A и B — частичные трансверсали соответственно в X и Y).

Заметим, что множество $A \subseteq X$ является частичной трансверсалью в X тогда и только тогда, когда существует инъективное отображение ϕ из A в Y такое, что $a\phi(a) \in R$ для любого $a \in A$.

Заметим также, что в число паросочетаний мы включаем пустое паросочетание, а в число частичных трансверсалей — пустую частичную трансверсаль.

Теорема 4.25 (Холл, 1935). *Пусть $G = (X,R,Y)$ — произвольный двудольный граф. Тогда множество $A \subseteq X$ является частичной трансверсалью в X в том и только в том случае, когда*

$$|U| \leqslant |R(U)| \text{ для любого } U \subseteq A.$$

Далее в этом разделе мы докажем более общее утверждение, из которого будет вытекать теорема Холла, а пока приведем ряд следствий теоремы Холла.

Следствие 1 (Эдмондс и Фалкерсон). *Пусть $G = (X, R, Y)$ — произвольный двудольный граф. Тогда*

1) *семейство частичных трансверсалей в X совпадает с семейством независимых множеств матроида $T(X, R, Y)$;*

2) *семейство частичных трансверсалей в Y совпадает с семейством независимых множеств матроида $T(Y, R, X)$;*

3) *матроиды $T(X, R, Y)$ и $T(Y, R, X)$ имеют одинаковый ранг, который равен мощности наибольшего по числу ребер паросочетания графа G.*

Это утверждение, в частности, говорит о том, что все максимальные частичные трансверсали в X и в Y равномощны. Однако, как нетрудно убедиться, максимальные паросочетания двудольного графа $G = (X, R, Y)$ могут быть не равномощны! Это означает, что семейство всех паросочетаний графа G, вообще говоря, может не удовлетворять аксиоме независимости $(I.2)$, хотя и удовлетворяет аксиоме независимости $(I.1)$. Ясно, что максимальные частичные трансверсали в X (соответственно в Y) и только они представимы в виде $match_X(P)$ (соответственно в виде $match_Y(P)$) для некоторого наибольшего по числу ребер паросочетания P графа G.

Следствие 2. *Для двудольного графа $G = (X, R, Y)$ существует частичная трансверсаль в X мощности t, где $0 \leqslant t \leqslant |X|$, тогда и только тогда, когда*

$$|U| + t - |X| \leqslant |R(U)|$$

для любого $U \subseteq X$.

Доказательство. Очевидно, частичная трансверсаль в X мощности t, где $0 \leqslant t \leqslant |X|$, существует тогда и только тогда, когда ранг r матроида $T(X, R, Y)$ больше или равен t, т. е. когда

$$\min_{U \subseteq X}(|R(U)| + |X \setminus U|) \geqslant t.$$

Последнее неравенство эквивалентно условию:

$$|R(U)| + |X \setminus U| \geqslant t$$

для любого $U \subseteq X$. $\square$

Трансверсалью в Y двудольного графа $G = (X, R, Y)$ называют такую частичную трансверсаль B в Y, что $|B| = |X|$, т. е. такую частичную трансверсаль в Y, которая может паросочетаться со всем множеством X.

Следствие 3. *Для двудольного графа $G = (X, R, Y)$ существует трансверсаль в Y тогда и только тогда, когда $|U| \leqslant |R(U)|$ для любого $U \subseteq X$.*

Пусть $G = (X, R, Y)$ — произвольный двудольный граф и $A \subseteq X$. Множество $D \subseteq X \cup Y$ называется *вершинным покрытием множества* A, если любое ребро, соединяющее вершину из A с вершиной из Y, имеет не менее одной концевой вершины в множестве D.

Следствие 4. *Пусть $G = (X, R, Y)$ — произвольный двудольный граф и r — ранговая функция трансверсального матроида $T(X, R, Y)$. Тогда для любого $A \subseteq X$ выполняется*

1) $r(A) = |A| - \max_{U \subseteq A} \delta(U)$, *где $\delta(U) = |U| - |R(U)|$ — дефект множества U;*

2) $r(A) = \min |D|$, *где минимум берется по всем вершинным покрытиям D множества A.*

Доказательство. 1) вытекает из следующего очевидного равенства, справедливого для любого $U \subseteq A$:

$$(|R(U)| + |A \setminus U|) + (|U| - |R(U)|) = |A|.$$

2) Пусть $A \subseteq X$ и $D = X_1 \cup Y_1$ — некоторое минимальное вершинное покрытие множества A, где $X_1 \subseteq A$ и $Y_1 \subseteq Y$. Тогда, очевидно, $R(A \setminus X_1) \subseteq Y_1$ и, следовательно, $R(A \setminus X_1) = Y_1$ в силу минимальности D. Поэтому $D = X_1 \cup R(A \setminus X_1) = R(U) \cup (A \setminus U)$, где $U = A \setminus X_1$. Таким образом, все минимальные вершинные покрытия множества A содержатся среди множеств вида $R(U) \cup (A \setminus U)$, где $U \subseteq A$. Теперь следствие 4 вытекает из равенства

$$r(A) = \min_{U \subseteq A} (R(U) + |A \setminus U|).$$

$\square$

Вершинным покрытием двудольного графа $G = (X, R, Y)$ называется такое его множество вершин D, что каждое ребро графа G инцидентно хотя бы одной вершине из D. Иными словами, вершинное покрытие графа $G = (X, R, Y)$ — это вершинное покрытие множества X (а также множества Y).

Следующие два утверждения вытекают из следствия 4 при $A = X$ и утверждения 3) следствия 1.

Следствие 5 (Оре). *В двудольном графе $G = (X, R, Y)$ мощность наибольшего по числу ребер паросочетания равна $|X| - \delta$, где δ — величина наибольшего из дефектов подмножеств множества X.*

Следствие 6 (Кениг). *В двудольном графе $G = (X, R, Y)$ мощность наибольшего по числу ребер паросочетания равна мощности наименьшего по числу вершин вершинного покрытия.*

Важное значение для приложений теории графов имеет интерпретация систем множеств как двудольных графов.

Рассмотрим последовательность $\mathcal{S} = (S_1, \ldots, S_l)$ произвольных подмножеств непустого конечного множества Y, причем мы допускаем, что некоторые из компонент S_i системы множеств $\mathcal{S}$ могут повторяться. Положим $X = \{1, \ldots, l\}$. Определим двудольный граф $G = (X, R, Y)$, задавая множество ребер R следующим образом:

$$\{x, y\} \in R \Leftrightarrow y \in S_x$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Трансверсаль в Y графа $G = (X, R, Y)$ в данном случае обычно называют *системой различных представителей* системы множеств $\mathcal{S}$. Частичные же трансверсали в Y — это системы различных представителей подсистем системы множеств $\mathcal{S}$. Иными словами, подмножество $T = \{y_1, \ldots, y_t\} \subseteq Y$, состоящее из t элементов, будет системой различных представителей некоторой подсистемы из $\mathcal{S}$, если

$$y_1 \in S_{x_1}, \ldots, y_t \in S_{x_t}$$

для некоторых попарно различных индексов $x_1, \ldots, x_t \in X = \{1, \ldots, l\}$. Если же $t = l$, то мы получаем систему различных представителей системы множеств $\mathcal{S}$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу о свадьбах.

Пусть Y — некоторое множество девушек, X — некоторое множество юношей и $G = (X, R, Y)$ — двудольный граф знакомств юношей с девушками. При каких условиях всех юношей можно женить таким образом, чтобы каждый из них был бы женат на знакомой ему девушке?

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$. Для каждого $i = 1, \ldots, l$ через $S(x_i)$ обозначим множество всех девушек, знакомых с юношей x_i. Мы получили систему $\mathcal{S} = (S(x_1), \ldots, S(x_l))$ подмножеств множества Y. Пусть $\{y_1, \ldots, y_l\}$ — некоторая система различных представителей системы множеств $\mathcal{S}$ или, другими словами, трансверсаль в Y двудольного графа $G = (X, R, Y)$ такая, что $y_1 \in S(x_1), \ldots, y_l \in S(x_l)$. Теперь каждого юношу x_i при $i = 1, \ldots, l$ можно женить на знакомой девушке y_i, т. е. задача о свадьбах разрешима. Обратно, если задача о свадьбах разрешима, то система множеств $\mathcal{S}$ имеет систему различных представителей, т. е. двудольный граф $G = (X, R, Y)$ имеет трансверсаль в Y.

Критерий существования системы различных представителей для системы множеств $\mathcal{S} = (S_1, \ldots, S_l)$ легко получить, переформулировав следствие 3:

Система различных представителей системы множеств $\mathcal{S}$ существует тогда и только тогда, когда для любого $t = 1, \ldots, l$ объединение любых t компонент системы $\mathcal{S}$ содержит не менее t элементов.

Для непустого конечного множества Y, в котором определена функция веса элементов $w(y) \in \mathbf{R}$ $(y \in Y)$, можно рассмотреть задачу поиска максимальной системы различных представителей минимально возможного веса для подсистем системы $\mathcal{S}$. В силу следствия 1 эту задачу решает жадный алгоритм. Однако, нетрудно понять, что в данном случае жадный алгоритм является экспоненциальным алгоритмом! В дальнейшем мы покажем, что имеются и полиномиальные алгоритмы для решения этой задачи.

Перейдем теперь к рассмотрению важного для дальнейшего обобщения трансверсальных матроидов.

Пусть $G = (X, R, Y)$ — произвольный двудольный граф и на множестве Y задан некоторый матроид $M(Y)$ с ранговой функцией r. Определим функцию f из $\mathcal{P}(X)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$, полагая

$$f(A) = r(R(A))$$

для любого $A \subseteq X$. Точно также, как в доказательстве леммы 1, с использованием свойств ранговой функции можно установить, что функция f монотонна, полумодулярна и удовлетворяет условию $f(\emptyset) = 0$. Следовательно, по теореме Эдмондса функция f индуцирует матроид $M_f(X)$ на множестве X. Этот матроид в дальнейшем будет обозначаться через $T(X, R, M(Y))$. В данном матроиде независимые множества $A \subseteq X$ характеризуются условием:

$$|U| \leqslant r(R(U)) \text{ для любого } U \subseteq A,$$

а ранговая функция задается равенством:

$$r(A) = \min_{U \subseteq A}(r(R(U)) + |A \setminus U|)$$

(отметим, что ранговую функцию мы снова обозначаем через r, но это не приведет к недоразумениям).

Подмножество $A \subseteq X$ будем называть *независимой частичной трансверсалью* в X, если оно может паросочетаться с независимым множеством B матроида $M(Y)$.

Теорема 4.26 (Радо). *Пусть $G = (X, R, Y)$ — произвольный двудольный граф и $M(Y)$ — матроид на множестве Y. Тогда множество $A \subseteq X$ является независимой частичной трансверсалью в X в том и только в том случае, когда $|U| \leqslant r(R(U))$ для любого $U \subseteq A$.*

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Действительно, в данном случае A может паросочетаться с некоторым независимым множеством B матроида $M(Y)$. Рассмотрим произвольное подмножество $U \subseteq A$. Оно может паросочетаться с некоторым независимым подмножеством $D \subseteq B$ матроида $M(Y)$ и, следовательно, $|U| = |D|, D \subseteq R(U)$ и $|U| \leqslant r(R(U))$.

Обратно, пусть $|U| \leqslant r(R(U))$ для любого $U \subseteq A$.

Предположим сначала, что $|R(p)| = 1$ для любой вершины $p \in A$. Тогда для любых различных $p, q \in A$ элементы из $R(p)$ и $R(q)$ различны, так как $r(R(p) \cup R(q)) = r(R(\{p, q\})) \geqslant 2$. Отсюда следует $|R(A)| = |A|$. Поскольку по условию теоремы $|A| \leqslant r(R(A)) \leqslant |R(A)|$, получаем $r(R(A)) = |R(A)|$, т. е. множество $R(A)$ независимо в матроиде $M(Y)$. Теперь ясно, что A — независимая частичная трансверсаль в X, которая может паросочетаться с независимым множеством $R(A)$ матроида $M(Y)$.

Предположим, далее, что имеется вершина $p \in A$, для которой $|R(p)| \geqslant 2$. Возьмем две различные вершины q_1 и q_2 из $R(p)$. Через R_1 обозначим множество ребер, полученное из R отбрасыванием всех ребер, соединяющих p с q_1. Аналогично, обозначим через R_2 множество ребер, полученное из R отбрасыванием всех ребер, соединяющих p с q_2.

Покажем, что хотя бы один из двудольных графов $G_1 = (X, R_1, Y)$ и $G_2 = (X, R_2, Y)$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть, от противного, существуют множества $U_1, U_2 \subseteq A \setminus p$, для которых

$$r(R_1(p \cup U_1)) < |U_1| + 1 \text{ и } r(R_2(p \cup U_2)) < |U_2| + 1.$$

Поскольку $R_1(p \cup U_1) = (R(p) \setminus q_1) \cup R(U_1)$ и $R_2(p \cup U_2) = (R(p) \setminus q_2) \cup \cup R(U_2)$, имеют место соотношения

$$R_1(p \cup U_1) \cup R_2(p \cup U_2) = R(p \cup U_1 \cup U_2),$$
$$R_1(p \cup U_1) \cap R_2(p \cup U_2) \supseteq R(U_1) \cap R(U_2) \supseteq R(U_1 \cap U_2).$$

Используя полумодулярность ранговой функции r матроида $M(Y)$, указанные соотношения и условие теоремы, выводим

$$\begin{gathered} |U_1| + |U_2| \geqslant r(R_1(p \cup U_1)) + r(R_2(p \cup U_2)) \geqslant \\ \geqslant r(R_1(p \cup U_1) \cup R_2(p \cup U_2)) + r(R_1(p \cup U_1) \cap R_2(p \cup U_2)) \geqslant \\ \geqslant r(R(p \cup U_1 \cup U_2)) + r(R(U_1 \cap U_2)) \geqslant \\ \geqslant 1 + |U_1 \cup U_2| + |U_1 \cap U_2| = 1 + |U_1| + |U_2|, \end{gathered}$$

что противоречиво.

Таким образом, хотя бы один из двудольных графов $G_1 = (X, R_1, Y)$ и $G_2 = (X, R_2, Y)$ удовлетворяет условию теоремы. Продолжая применять указанную процедуру отбрасывания ребер к двудольным графам, удовлетворяющим условию теоремы, мы в конце концов придем к двудольному графу $G' = (X, R', Y)$, для которого выполняется условие теоремы, равенство $|R'(p)| = 1$ для любого $p \in A$ и включение $R' \subseteq R$. Для такого двудольного графа G', как мы установили ранее, множество A является независимой частичной трансверсалью в X. Поскольку $R' \subseteq R$, множество A будет независимой частичной трансверсалью и для исходного двудольного графа G. $\square$

Заметим, что теорема Холла является частным случаем теоремы Радо, если в качестве матроида $M(Y)$ взять свободный матроид на Y.

Следствие 1. *Пусть $G = (X, R, Y)$ — произвольный двудольный граф и $M(Y)$ — матроид на множестве Y. Тогда семейство независимых частичных трансверсалей в X совпадает с семейством независимых множеств матроида $T(X, R, M(Y))$.*

Следующее утверждение доказывается аналогично следствию 2 теоремы Холла.

Следствие 2. *Пусть $G = (X, R, Y)$ — произвольный двудольный граф и $M(Y)$ — матроид на множестве Y с ранговой функцией r. В X существует независимая частичная трансверсаль мощности t, где $0 \leqslant t \leqslant |X|$, тогда и только тогда, когда*

$$|U| + t - |X| \leqslant r(R(U))$$

для любого $U \subseteq X$.

4.12. Дизъюнктное объединение и сумма матроидов

В данном разделе мы докажем матроидными методами ряд достаточно глубоких результатов теории графов, которые весьма трудно получить обычными теоретико-графовыми методами. Прежде всего, определим две вспомогательные матроидные конструкции и изучим их свойства.

Введем понятие дизъюнктного объединения матроидов. Пусть $M_1 = M_1(E_1), \ldots, M_t = M_t(E_t)$ – произвольный набор матроидов на попарно непересекающихся непустых конечных множествах $E_1, \ldots, E_t$. Через $\mathcal{B}$ обозначим семейство всех конечных подмножеств $B \subseteq \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} E_i$ таких, что $B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} B_i$, где B_i – база матроида M_i для каждого $i = 1, \ldots, t$. Очевидно, семейство $\mathcal{B}$ удовлетворяет аксиомам баз $(B.1)$ и $(B.2)$. Следовательно, существует единственный матроид на множестве $\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} E_i$, для которого $\mathcal{B}$ является семейством всех баз. Этот матроид называют *дизъюнктным объединением матроидов* $M_1, \ldots, M_t$ и обозначают через $M_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} M_t$ или через $\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} M_i$. Матроиды $M_1, \ldots, M_t$ называют *компонентами* указанного дизъюнктного объединения.

Очевидно, матроид циклов любого ненулевого графа есть дизъюнктное объединение матроидов циклов его нетривиальных компонент связности. Поэтому по аналогии с графами матроид называют *связным*, если его нельзя представить в виде дизъюнктного объединения нескольких его подматроидов.

Из определения дизъюнктного объединения легко вытекает

Предложение 4.2. *Пусть $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} A_i$, где $A_i \subseteq E_i$ для каждого $i = 1, \ldots, t$. Тогда*

1) A — независимое множество матроида $\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} M_i$ в том и только в том случае, когда каждое A_i — независимое множество матроида M_i;

2) $r(A) = \sum_{i=1}^{t} r_i(A_i)$, где $r, r_1, \ldots, r_t$ — ранговые функции матроидов $\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} M_i$, $M_1, \ldots, M_t$, соответственно;

3) семейство циклов матроида $\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} M_i$ равно объединению семейств *циклов матроидов $M_1, \ldots, M_t$.*

Пусть теперь $M_1 = M_1(E), \ldots, M_t = M_t(E)$ — произвольный набор матроидов на непустом конечном множестве E и $r_1, \ldots, r_t$ — их ранговые функции соответственно. Очевидно, функция $f = \sum\limits_{i=1}^{t} r_i$ является монотонной полумодулярной функцией из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathbf{N} \cup \{0\}$ и $f(\emptyset) = 0$. Матроид $M_f(E)$, индуцированный функцией f на множестве E, называют *суммой матроидов* $M_1, \ldots, M_t$ и обозначают через $M_1 + \ldots + M_t$ или через $\sum\limits_{i=1}^{t} M_i$. По теореме Эдмондса ранговая функция r матроида $\sum\limits_{i=1}^{t} M_i$ удовлетворяет соотношению

$$r(A) = \min_{U \subseteq A}\left(\sum_{i=1}^{t} r_i(U) + |A \setminus U|\right)$$

для любого $A \subseteq E$.

Теорема 4.27. *Пусть*

1) *$M_1 = M_1(E), \ldots, M_t = M_t(E)$ — матроиды на непустом конечном множестве E и $r_1, \ldots, r_t$ — их ранговые функции, соответственно;*

2) *$M'_1 = M'_1(E_1), \ldots, M'_t = M'_t(E_t)$ — матроиды на попарно непересекающихся непустых конечных множествах $E_1, \ldots, E_t$ и $r'_1, \ldots, r'_t$ — их ранговые функции, соответственно;*

3) *ϕ_i — изоморфизм матроида M_i на матроид M'_i для каждого $i = 1, \ldots, t$.*

Зададим двудольный граф $G = (E, R, \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} E_i)$, полагая

$$R = \{\{p, \phi_i(p)\} \,|\, p \in E, i = 1, \ldots, t\}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{t} M_i = T(E, R, \dot{\bigcup_{i=1}^{t}} M'_i).$$

Доказательство. Обозначим через r' ранговую функцию матроида $\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} M'_i$. Матроид $T(E, R, \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} M'_i)$, согласно определению из предыдущего раздела, индуцируется на E монотонной полумодулярной функцией $f(A) = r'(R(A))(A \subseteq E)$. Ясно, что для любого изоморфизма ϕ_i и для любого $A \subseteq E$ имеет место $r'_i(\phi_i(A)) = r_i(A)$. Используя этот факт, выводим

$$f(A) = r'(R(A)) = r'(\dot{\bigcup_{i=1}^{t}} \phi_i(A)) = \sum_{i=1}^{t} r'_i(\phi_i(A)) = \sum_{i=1}^{t} r_i(A),$$

т. е. функции f и $\sum_{i=1}^{t} r_i$ совпадают. Отсюда следует заключение теоремы. □

Теорема 4.28 (Нэш-Вильямс). *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{t} M_i$ *— сумма матроидов* $M_1 = M_1(E), \ldots, M_t = M_t(E)$ *и* $r_1, \ldots, r_t$ *— их ранговые функции, соответственно. Тогда для любого* $A \subseteq E$ *следующие условия эквивалентны:*

1) A *— независимое множество матроида* $\sum\limits_{i=1}^{t} M_i$*;*

2) $A = \bigcup\limits_{i=1}^{t} A_i$*, где каждое* A_i *— независимое множество матроида* M_i*;*

3) $A = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{t}} A_i$*, где каждое* A_i *— независимое множество матроида* M_i*.*

Доказательство. Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) очевидна.

2) $\Rightarrow$ 1). Положим $f = \sum\limits_{i=1}^{t} r_i$. Возьмем произвольное подмножество $U \subseteq A = \bigcup\limits_{i=1}^{t} A_i$. Тогда $U = \bigcup\limits_{i=1}^{t} U_i$ для некоторых $U_i \subseteq A_i$ $(i = 1, \ldots, t)$. Следовательно,

$$|U| \leqslant \sum_{i=1}^{t} |U_i| = \sum_{i=1}^{t} r_i(U_i) \leqslant \sum_{i=1}^{t} r_i(U) = f(U),$$

т. е. $|U| \leqslant f(U)$ для любого $U \subseteq A$. Полученное и означает, что A — независимое множество матроида $M_f = \sum\limits_{i=1}^{t} M_i$.

1) $\Rightarrow$ 3). Возьмем изоморфные копии $M'_1 = M'_1(E_1), \ldots, M'_t = M'_t(E_t)$ матроидов $M_1, \ldots, M_t$, соответственно, на попарно непересекающихся непустых конечных множествах $E_1, \ldots, E_t$. Для каждого $i = 1, \ldots, t$ зафиксируем изоморфизм ϕ_i матроида $M_i = M_i(E)$ на матроид $M'_i = M'_i(E_i)$. По теореме 4.27

$$\sum_{i=1}^{t} M_i(E) = T(E, R, \dot{\bigcup_{i=1}^{t}} M'_i(E_i)),$$

где $G = (E, R, \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} E_i)$ — двудольный граф, указанный в теореме 4.27.

Пусть A — независимое множество матроида $\sum_{i=1}^{t} M_i(E)$. Тогда в силу предыдущего равенства матроидов и следствия 1 теоремы Радо множество A является независимой частичной трансверсалью в E. Следовательно, существует такое инъективное отображение ψ из A в $\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} E_i$, что $\{a, \psi(a)\} \in R$ для любого $a \in A$ и $\psi(A)$ — независимое множество матроида $\dot{\bigcup}_{i=1}^{t} M_i'(E_i)$. Ясно, что $\psi(A) = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} A_i'$, где $A_i' = E_i \cap \psi(A)$ для любого $i = 1, \ldots, t$. В силу предложения 4.2 каждое множество A_i' независимо в матроиде $M_i'(E_i)$. Для каждого $i = 1, \ldots, t$ возьмем множество $A_i \subseteq E$ такое, что $\psi(A_i) = A_i'$. Очевидно, ввиду инъективности отображения ψ множество $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} A_i$ есть объединение попарно непересекающихся множеств A_i. Поскольку $\{a, \psi(a)\} \in R$ для любого $a \in A$, по определению ребер из R равенство $\psi(A_i) = A_i'$ влечет равенство $\phi_i(A_i) = A_i'$ для любого $i = 1, \ldots, t$. Так как ϕ_i — изоморфизм матроида M_i на матроид M_i', отсюда следует, что A_i — независимое множество матроида M_i для любого $i = 1, \ldots, t$.

Теорема доказана. □

Отметим, что в силу этой теоремы независимые множества суммы матроидов устроены аналогично тому, как устроены независимые множества дизъюнктного объединения матроидов. Поэтому сумму матроидов иногда называют *объединением матроидов*. Заметим, однако, что указанная аналогия не имеет места для баз, циклов и ранговых функций.

Следствие 1. *Пусть $M = M(E)$ — произвольный матроид на непустом конечном множестве E, r — его ранговая функция и $t \in \mathbf{N}$. Тогда матроид M имеет t попарно непересекающихся баз в том и только в том случае, когда*

$$|E \setminus A| \geqslant t \cdot (r(E) - r(A))$$

для любого $A \subseteq E$.

Доказательство. Обозначим через $t \cdot M$ сумму t экземпляров матроида M. Этот матроид индуцируется функцией $f = t \cdot r$ на множестве E. Пусть r' — его ранговая функция. По теореме Нэш-Вильямса

$r'(t \cdot M) \leqslant t \cdot r(M)$. Поэтому матроид M имеет t попарно непересекающихся баз тогда и только тогда, когда $r'(t \cdot M) = t \cdot r(M)$, т. е. когда

$$\min_{A \subseteq E}(t \cdot r(A) + |E \setminus A|) = t \cdot r(E).$$

Последнее равенство эквивалентно условию:

$$t \cdot r(A) + |E \setminus A| \geqslant t \cdot r(E)$$

для любого $A \subseteq E$. Отсюда вытекает заключение следствия. $\square$

Числом упаковки $pack(M)$ матроида $M = M(E)$ называют наибольшее число попарно непересекающихся баз в M.

Следствие 2. *Пусть $M = M(E)$ — произвольный матроид. Тогда*

$$pack(M) = \min_{A \subseteq E, r(A) < r(E)} \lfloor \frac{|E \setminus A|}{r(E) - r(A)} \rfloor =$$

$$= \min_{E \neq A \in \operatorname{Sub} E} \lfloor \frac{|E \setminus A|}{r(E) - r(A)} \rfloor,$$

где $\operatorname{Sub} E$ *— решетка листов матроида* M.

(Здесь через $\lfloor x \rfloor$ обозначается наибольшее целое число, меньшее или равное числа x.)

Доказательство. Заметим сначала, что для любого $A \subset E$ такого, что $r(A) < r(E)$, выполняется

$$\frac{|E \setminus \langle A \rangle|}{r(E) - r(\langle A \rangle)} \leqslant \frac{|E \setminus A|}{r(E) - r(A)},$$

так как $r(A) = r(\langle A \rangle)$. Теперь осталось воспользоваться следствием 1. $\square$

Следствие 3. *Пусть $M = M(E)$ — произвольный матроид на непустом конечном множестве E, r — его ранговая функция и $t \in \mathbf{N}$. Тогда множество E представимо в виде объединения t баз матроида M в том и только в том случае, когда*

$$|A| \leqslant t \cdot r(A)$$

для любого непустого $A \subseteq E$.

Доказательство. Опять рассмотрим матроид $t \cdot M$, равный сумме t экземпляров матроида M. Через r' обозначим его ранговую функцию. Множество E представимо в виде объединения t баз матроида M тогда и только тогда, когда $r'(t \cdot M) = |E|$, т. е. когда

$$\min_{A \subseteq E}(t \cdot r(A) + |E \setminus A|) = |E|.$$

Последнее равенство эквивалентно условию

$$|E| \leqslant t \cdot r(A) + |E \setminus A|$$

для любого непустого $A \subseteq E$. Отсюда вытекает заключение следствия. □

Числом покрытия $cov(M)$ матроида $M = M(E)$ будем называть наименьшее число баз, объединение которых равно E. Ясно, что это понятие имеет смысл рассматривать лишь для матроидов без *петель*, т. е. элементов, составляющих одноэлементные циклы.

Следствие 4. *Пусть* $M = M(E)$ *— матроид без петель и* $\mathrm{Sub}\, E$ *— его решетка листов. Тогда*

$$cov(M) = \max_{\emptyset \neq A \subseteq E} \left\lceil \frac{|A|}{r(A)} \right\rceil = \max_{\emptyset \neq A \in \mathrm{Sub}\, E} \left\lceil \frac{|A|}{r(A)} \right\rceil.$$

(Здесь через $\lceil x \rceil$ обозначается наименьшее целое число, большее или равное числа x.)

Доказательство. Заметим сначала, что для любого непустого $A \subseteq$ $\subseteq E$ выполняется

$$\frac{|A|}{r(A)} \leqslant \frac{|\langle A \rangle|}{r(\langle A \rangle)},$$

так как $r(A) = r(\langle A \rangle)$. Осталось воспользоваться следствием 3. □

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный ненулевой граф и A — непустое подмножество ребер из E. Через $G(A)$, как прежде, мы будем обозначать подграф графа G, порожденный множеством ребер A, а через $r(G(A))$, $n(G(A))$, $m(G(A))$ и $k(G(A))$ будем обозначать соответственно ранг, число вершин, число ребер и число компонент связности графа $G(A)$. Конечно, выполняются равенства $m(G(A)) = |A|$ и $r(G(A)) = n(G(A)) - k(G(A))$.

Теорема 4.29. *Пусть* $G = (V, E)$ *— произвольный ненулевой* (n, m, k)*-граф и* $t \in \mathbf{N}$. *Граф* G *имеет* t *реберно непересекающихся* *остовов тогда и только тогда, когда* $m \geqslant t \cdot (n-k)$ *и для любого непустого множества ребер* $A \subseteq E$ *выполняется*

$$m \geqslant t \cdot (n-k) + |A| - t \cdot (n(G(A)) - k(G(A))).$$

Доказательство. Применим следствие 1 к матроиду циклов $M(G)$ графа G. Базами этого матроида являются множества ребер, образующие остовы графа G. При $A = \emptyset$ неравенство из следствия 1 примет вид $|E| \geqslant t \cdot (n-k)$, т. е. $m \geqslant t \cdot (n-k)$. Для непустого же множества ребер $A \subseteq E$ это неравенство записывается в виде

$$m - |A| \geqslant t \cdot (n - k - r(G(A))),$$

поскольку $r(A) = r(G(A))$. Отсюда вытекает заключение теоремы. □

Теорема 4.30. *Пусть* $G = (V, E)$ *— произвольный ненулевой граф и* $t \in \mathbf{N}$. *Тогда граф* G *представим в виде объединения* t *остовов в том и только в том случае, когда*

$$|A| \leqslant t \cdot (n(G(A)) - k(G(A)))$$

для любого непустого множества ребер $A \subseteq E$.

Доказательство. Применим теперь следствие 3 к матроиду циклов $M(G)$ графа G. При $A = \emptyset$ неравенство из следствия 3 тривиально выполняется. Для непустого же множества ребер $A \subseteq E$ это неравенство записывается в виде

$$|A| \leqslant t \cdot r(G(A)).$$

Отсюда вытекает заключение теоремы. □

Следующее утверждение можно вывести очевидным образом как из теоремы 4.29, так и из теоремы 4.30.

Следствие 5. *Пусть* $G = (V, E)$ *— произвольный ненулевой* (n, m, k)*-граф и* $t \in \mathbf{N}$. *Тогда граф* G *является объединением* t *реберно непересекающихся остовов в том и только в том случае, когда* $m = t \cdot (n-k)$ *и для любого непустого множества ребер* $A \subseteq E$ *выполняется*

$$|A| \leqslant t \cdot (n(G(A)) - k(G(A))).$$

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф без петель. *Числом древовидности* $arb(G)$ графа G называется наименьшее число остовных деревьев, объединение которых равно G. Очевидно, число древовидности графа

G совпадает с наименьшим числом его поддеревьев, объединение которых равно G, так как каждое поддерево связного графа содержится в некотором его остовном дереве. Ясно также, что число древовидности связного графа G совпадает с наименьшим числом реберно непересекающихся лесов, в объединение которых распадается граф G.

Теорема 4.31 (Нэш-Вильямс). *Пусть $G = (V, E)$ — связный неодноэлементный граф без петель. Для каждого натурального числа $t \leqslant |V|$ обозначим через $m(t, G)$ наибольшее возможное число ребер в связном подграфе графа G, содержащем t вершин. Тогда*

$$arb(G) = \max_{2 \leqslant t \leqslant |V|} \left\lceil \frac{m(t, G)}{t - 1} \right\rceil .$$

Доказательство. Применим следствие 4 к матроиду циклов $M(G)$ графа G.

Покажем сначала, что, применяя следствие 4, мы можем ограничиться рассмотрением только тех непустых множеств ребер $A \subseteq E$, для которых $G(A)$ является связным графом. Действительно, пусть граф $G(A)$ есть дизъюнктное объединение своих компонент связности $G_1 = (V_1, A_1), \ldots, G_k = (V_k, A_k)$ и $n_1 = |V_1|, \ldots, n_k = |V_k|, m_1 = |A_1|, \ldots, m_k = |A_k|$. Поскольку $A \neq \emptyset$, каждой вершине из $G(A)$ инцидентно хотя бы одно ребро и, следовательно, $n_1, \ldots, n_k \geqslant 2$. Положим $d_i = \dfrac{m_i}{n_i - 1}$ для $i = 1, \ldots, k$ и $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} d_i$. Тогда, используя равенства $r(G(A)) = r(G_1) + \ldots + r(G_k) = n_1 - 1 + \ldots + n_k - 1$, выводим

$$\frac{|A|}{r(A)} = \frac{m_1 + \ldots + m_k}{n_1 - 1 + \ldots + n_k - 1} =$$

$$= \frac{d_1(n_1 - 1) + \ldots + d_k(n_k - 1)}{n_1 - 1 + \ldots + n_k - 1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d(n_1 - 1) + \ldots + d(n_k - 1)}{n_1 - 1 + \ldots + n_k - 1} = d = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{|A_i|}{r(A_i)}.$$

Из доказанного и следствия 4 вытекает заключение теоремы. □

Пример. Рассмотрим полный граф K_n при $n \geqslant 2$. Очевидно, $m(t, K_n) = t(t-1)/2$ для любого натурального числа $t \leqslant n$. В силу теоремы Нэш-Вильямса $arb(K_n) = \lceil n/2 \rceil$. Таким образом, полный граф K_n представим в виде объединения $\lceil n/2 \rceil$ деревьев и не представим в виде объединения меньшего числа деревьев. Иными словами, полный граф K_n можно представить в виде объединения $\lceil n/2 \rceil$ реберно непересекающихся лесов и нельзя представить в виде объединения меньшего числа реберно непересекающихся лесов.

Заметим, что граф, изображенный на рис. 24, является объединением двух деревьев (и даже простых незамкнутых цепей). Однако, он не может быть представлен в виде объединения двух реберно непересекающихся деревьев.

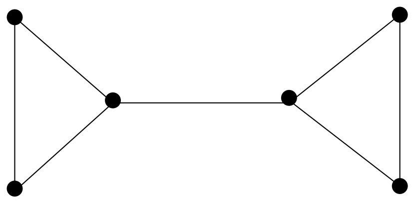


Рис. 24

Возникает вопрос: можно ли полный граф K_n представить в виде объединения $\lceil n/2 \rceil$ реберно непересекающихся деревьев?

Ответ на этот вопрос положительный! Действительно, рассмотрим полный граф K_n при $n \geqslant 2$. Если число n нечетно, то $\lceil n/2 \rceil = (n+1)/2 = (n-1)/2 + 1$, поэтому, отбросив из K_n одну из вершин вместе со всеми инцидентными ей ребрами, мы сводим нашу задачу к полному графу K_{n-1} с четным числом вершин.

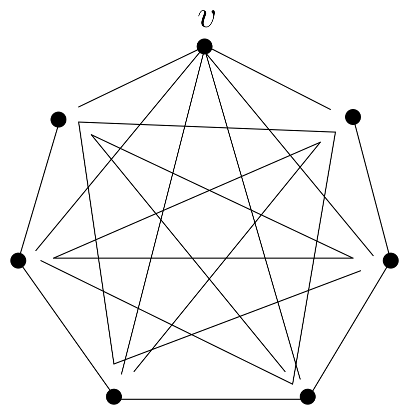


Рис. 25

Пусть теперь число n четно. Граф K_n содержит $m = n(n-1)/2$ ребер, а любой его остов содержит $n-1$ ребер. Поскольку K_n представим в виде объединения $n/2$ остовов, в силу отмеченного K_n представим в виде дизъюнктного объединения $n/2$ остовов.

На рис. 25 показано разбиение графа K_7 на 4 дерева, одно из которых есть остовное дерево графа K_7, составленное из всех ребер, инцидентных вершине v, а три других — остовные деревья (и даже цепи) графа $K_6 = K_7 - v$.

5. Планарность

5.1. Укладки графов, планарные графы

Пусть имеется некоторое пространство $\mathcal{L}$ (евклидова плоскость, трехмерное евклидово пространство, сфера в трехмерном евклидовом пространстве, тор и т. п.), в котором определено понятие *жордановой кривой*, т. е. непрерывной кривой без точек самопересечения. Жордановы кривые на плоскости обладают следующим важным свойством:

Если L — замкнутая жорданова кривая на плоскости и u, v — две различные точки на ней, то любая жорданова кривая, соединяющая u и v, либо целиком лежит внутри области, ограниченной кривой L, за исключением точек u и v, либо — вне этой области, за исключением точек u и v, либо пересекает L в некоторой точке, отличной от u и v.

Замкнутая жорданова кривая L разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на две области — внутреннюю и внешнюю, причем любая жорданова кривая, соединяющая точку внутренней области с точкой внешней области, обязательно пересекает кривую L, т. е. имеет с ней общую точку. Обсуждение свойств жордановых кривых можно найти в учебниках по университетскому курсу математического анализа.

Говорят, что граф *обладает укладкой* в пространстве $\mathcal{L}$, если он изоморфен графу, вершинами которого являются некоторые точки пространства, а ребрами — жордановы кривые из $\mathcal{L}$, соединяющие соответствующие вершины, причем

1) кривая, являющаяся ребром, не проходит через другие вершины графа, кроме вершин, которые она соединяет;

2) две кривые, являющиеся ребрами, пересекаются лишь в вершинах, инцидентных одновременно обоим этим ребрам.

В таком случае кратко говорят, что кривые, представляющие ребра, «не имеют лишних пересечений». Соответствующий граф, составленный из точек пространства и жордановых кривых, называют *укладкой* исходного графа.

Теорема 5.1. *Любой граф обладает укладкой в трехмерном евклидовом пространстве.*

Доказательство. Построим укладку для заданного графа. Возьмем в пространстве некоторую прямую l и рассмотрим пучок плоскостей, проходящих через l. Вершинам графа поставим в соответствие взаимно однозначным образом некоторые точки прямой l. Для каждого ребра графа выделим отдельную плоскость, проходящую через l. Изобразим ребро графа в его плоскости полуокружностью, соединяющей две соответствующие концам ребра точки прямой l, если ребро не является петлей, и — окружностью, проходящей через точку, соответствующую вершине v, если ребро является петлей в вершине v. Очевидно, мы получим укладку исходного графа. $\square$

Как мы увидим далее, не всякий граф обладает укладкой на евклидовой плоскости. Граф называется *планарным*, если он обладает укладкой на плоскости. Всевозможные укладки планарных графов на плоскости будем называть *плоскими графами*.

Теорема 5.2. *Граф G планарен тогда и только тогда, когда он обладает укладкой на сфере.*

Доказательство. Рассмотрим укладку графа G на сфере. Возьмем на сфере точку N, не лежащую ни на одном из ребер укладки и не являющуюся вершиной. Назовем точку N северным полюсом. В южном полюсе (который определяется естественным образом) проведем касательную плоскость к сфере. Спроектируем из точки N на плоскость все точки сферы, проводя весвозможные лучи из N через точки сферы до плоскости. Ясно, что проекция укладки на сфере даст нам укладку исходного графа на плоскости.

Обратно, рассмотрим укладку графа G на плоскости. Возьмем сферу, которая касается данной плоскости. Назовем точку касания южным полюсом. Северный полюс обозначим через N. Спроектируем теперь все точки плоскости на сферу, проводя всевозможные лучи от точек плоскости через точки сферы до точки N. Ясно, что при этом укладка графа G с плоскости будет перенесена на некоторую укладку графа G на сфере. $\square$

Плоский граф G разбивает плоскость на несколько областей, называемых его *гранями*. Более точно, рассмотрим множество точек, *дизъюнктных* к G, т. е. не являющихся вершинами и не лежащих на ребрах плоского графа G. Определим отношение ρ на множестве точек, дизъюнктных к G, полагая $u\rho v$ в том и только в том случае, когда u можно соединить с v жордановой кривой, целиком состоящей из точек, дизъюнктных к G. Ясно, что отношение ρ является отношением эквивалентности, у которого имеется конечное число классов. Эти классы и называют гранями плоского графа G. Отметим, что одна из граней неограничена. Ее называют *внешней гранью*, а остальные грани называют *внутренними гранями.*

На рис. 26 изображен плоский граф, имеющий 6 граней, которые обозначены буквами от A_1 до A_6, причем A_6 — это внешняя грань.

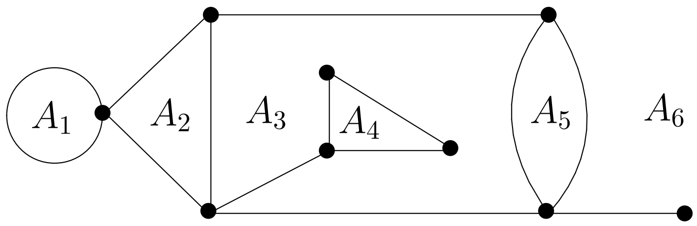


Рис. 26

Далее плоский (n, m, k)-граф, имеющий f граней, будем называть (n, m, k, f)-*графом.*

Отметим, что понятие грани для укладок графа на сфере вводится аналогичным образом.

Лемма 1. *Для любого выделенного ребра планарного графа найдется такая укладка этого графа на плоскости, что выделенное ребро будет лежать на границе внешней грани.*

Доказательство. Сначала возьмем укладку графа на сфере. Потом в качестве северного полюса выберем дизъюнктную точку N в грани, на границе которой лежит выделенное ребро. Затем спроектируем из N укладку на сфере на укладку на плоскости, касательной к сфере в южном полюсе. Полученная укладка на плоскости обладает нужным нам свойством. □

Лемма 2. *Если к планарному графу добавить новую петлю или увеличить кратность одного из ребер, то получится планарный граф.*

Доказательство. Используя лемму 1, возьмем такую укладку графа на плоскости, что выделенная вершина или выделенное ребро лежит на границе внешней грани. Затем, пользуясь свойствами жордановых кривых, проводим во внешней грани требуемое ребро. □

5.2. Формула Эйлера для плоских графов

Теорема 5.3. *Пусть G — плоский (n, m, k, f)-граф. Тогда*

$$m - n + k = f - 1.$$

Доказательство. Если $m = 0$, то $n = k$ и $f = 1$, поэтому доказываемая формула справедлива.

Пусть формула верна для любого плоского графа, содержащего менее m ребер, и $m > 0$. Рассмотрим плоский (n, m, k, f)-граф G. Предположим, что в графе G имеется ребро e, не являющееся мостом. Тогда оно содержится в некотором цикле и поэтому обязательно лежит на границе двух граней. Очевидно, если удалить из графа ребро e, то эти две грани сольются в одну грань. Следовательно, граф $G - e$ — это плоский $(n, m-1, k, f-1)$-граф. Тогда по предположению индукции $f - 2 = (m-1) - n + k$, т. е. $f - 1 = m - n + k$.

Предположим теперь, что все ребра графа G являются мостами. Тогда G является лесом и в G имеется висячее ребро e. Очевидно, при удалении ребра e число граней графа не изменяется. Следовательно, граф $G - e$ — это плоский $(n, m-1, k+1, f)$-граф. Тогда по предположению индукции $f - 1 = (m-1) - n + (k+1) = m - n + k$. □

Заметим, что в доказанной теореме утверждается, что цикломатическое число плоского графа равно числу его внутренних граней. В такой формулировке эту теорему можно доказать следующим образом, используя пространство циклов графа G.

Легко понять, что каждой внутренней грани плоского графа G отвечает вектор пространства циклов $L(G)$, состоящий из ребер, отделяющих эту внутреннюю грань от других граней. Такой вектор называют *циклическим вектором, отвечающим данной грани.* Очевидно, симметрическая разность любого набора таких векторов не пуста, так как она совпадает с границей области, равной объединению соответствующих граней, т. е. набор всех векторов, отвечающих внутренним граням, является линейно независимым. Кроме того, для любого цикла C графа G область, лежащая внутри цикла C, является объединением некоторого множества внутренних граней, поэтому цикл C является симметрической разностью векторов, отвечающих внутренним граням из этого множества. Следовательно, совокупность всех $f - 1$ векторов, отвечающих внутренним граням графа G, есть базис пространства $L(G)$. Поскольку $\dim L(G) = r^*(G) = m - n + k$, получаем $f - 1 = m - n + k$.

Следствие 1 (Эйлер, 1752). *Пусть n, m и f — соответственно число вершин, ребер и граней некоторого выпуклого многогранника в трехмерном евклидовом пространстве. Тогда*

$$n - m + f = 2.$$

Доказательство. Спроектируем многогранник на сферу, внутри которой он лежит, проводя всевозможные лучи из точки, лежащей внутри многогранника. На сфере возникнет $(n, m, 1, f)$-граф. Применяя к нему теорему, получим требуемое равенство. $\square$

Следствие 2. *Пусть G — связный планарный обыкновенный (n, m)-граф и $n \geqslant 3$. Тогда $m \leqslant 3n - 6$.*

Доказательство. Можно считать, что G — плоский граф. Поскольку G является обыкновенным графом, каждая его грань граничит не менее чем с тремя ребрами. Пусть, двигаясь вдоль границы i-й грани, мы пройдем l_i ребер, где $i = 1, \ldots, f$ и f — число граней графа G. Очевидно, $l_1 + \ldots + l_f = 2m$. Так как $l_i \geqslant 3$ для $i = 1, \ldots, f$, мы получаем $3f \leqslant 2m$. Поскольку в силу теоремы $f = m - n + 2$, отсюда вытекает $3m - 3n + 6 = 3f \leqslant 2m$, т. е. $m \leqslant 3n - 6$. $\square$

Следствие 3. *Граф $K_{3,3}$ непланарен.*

Доказательство. Пусть граф $K_{3,3}$ планарен. Будем считать его плоским графом. Поскольку $K_{3,3}$ является двудольным графом, все его замкнутые маршруты имеют четную длину. Далее, рассуждая как в доказательстве следствия 2, получаем $l_i \geqslant 3$, откуда вытекает $l_i \geqslant 4$ для $i = 1, \ldots, f$ и $4f \leqslant 2m$, т. е. $2f \leqslant m$. В силу теоремы $f = 9-6+1+1 = 5$, поэтому $10 = 2f \leqslant m = 9$. Пришли к противоречию. $\square$

Рассмотрим следующую популярную задачу-головоломку.

На одной стороне улицы имеются три дома, а на противоположной — три колодца. Три соседа, живущих в этих домах, поссорились и решили протоптать тропинки от каждого дома к каждому колодцу таким образом, чтобы тропинки не пересекались (см. рис. 27). Могут ли они сделать это?

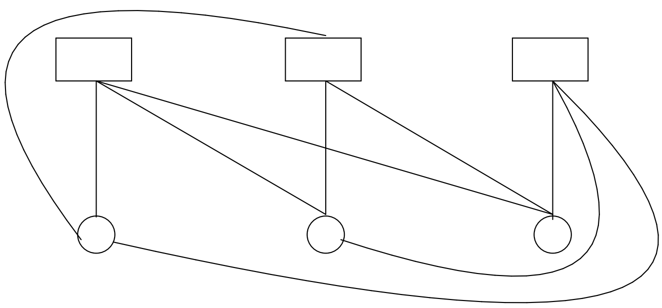


Рис. 27

Следствие 3 говорит нам, что сделать это невозможно!

Следствие 4. *Граф K_5 непланарен.*

Доказательство. Граф K_5 имеет 5 вершин и 10 ребер. Если он планарен, то по следствию 2 получаем $10 \leqslant 3 \cdot 5 - 6 = 9$, что невозможно. □

Следствие 5. *В любом планарном обыкновенном графе имеется вершина, степень которой меньше или равна 5.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что граф G связен и число его вершин n больше или равно 7. Пусть m — число его ребер. Если $\deg v \geqslant 6$ для любой вершины v, то в силу леммы о рукопожатиях и следствия 2 выполняется

$$6n \leqslant \sum_v \deg v = 2m \leqslant 2(3n - 6) = 6n - 12,$$

что противоречиво. □

5.3. Критерий планарности графа

Будем говорить, что граф G' получен из графа G *включением вершины степени* 2, если в графе G одно из ребер $e = uv$ (равенство $u = v$ не исключается) заменено на два новых ребра $e_1 = uw$ и $e_2 = wv$, где w — новая вершина степени 2, а остальные вершины и ребра остались без изменения. На рис. 28 показан пример получения графа с помощью процедуры включения вершины степени 2.

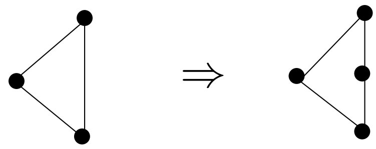


Рис. 28

Процедура, обратная к процедуре включения вершины степени 2, называется *исключением вершины степени* 2.

Будем говорить, что граф G_1 *гомеоморфен* графу G_2, если G_1 можно получить из G_2 с помощью конечного числа применений процедур включения и исключения вершин степени 2.

Ясно, что отношение "быть гомеоморфными"является отношением эквивалентности для графов. Очевидно, если граф планарен, то любой граф, гомеоморфный его подграфу, также планарен. На рис. 29 изображен *граф Петерсена* G и его подграф H. Так как граф H гомеоморфен $K_{3,3}$, граф Петерсена непланарен (см. следствие 3 предыдущего раздела).

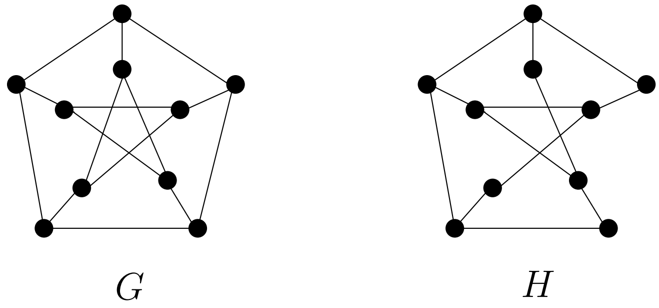


Рис. 29

Теорема 5.4 (Понтрягин, Куратовский). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* K_5, *и не содержит подграфов, гомеоморфных* $K_{3,3}$.

Доказательство. Необходимость условия теоремы вытекает из следствий 3 и 4 предыдущего раздела.

Будем доказывать достаточность условия теоремы. Предположим, от противного, что существует непланарный граф, который не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$. Пусть G — такой граф с наименьшим возможным числом ребер, не содержащий изолированных вершин. Дальнейшие рассуждения разобъем на несколько этапов.

1) Заметим сначала, что граф G связен.

Действительно, если граф G не связен, то его компоненты связности планарны и, следовательно, сам граф G планарен.

2) Покажем, что граф G является обыкновенным графом.

В самом деле, пусть в графе G имеется петля или кратное ребро e. Тогда граф $G - e$ планарен. Добавляя к графу $G - e$ ребро e, в силу леммы 2 из первого раздела мы получим, что граф G планарен.

3) Покажем теперь, что граф G является блоком, т. е. в G нет точек сочленения. Отметим, что тогда в графе G нет и мостов, так как в любом блоке, содержащем не менее трех вершин, все ребра являются циклическими.

Пусть, от противного, в графе G имеется точка сочленения v. Через G_1 обозначим подграф графа G, порожденный вершинами одной из компонент связности графа $G - v$ и вершиной v, а через G_2 — подграф графа G, порожденный вершинами остальных компонент связности графа $G - v$ и вершиной v (см. рис. 30).

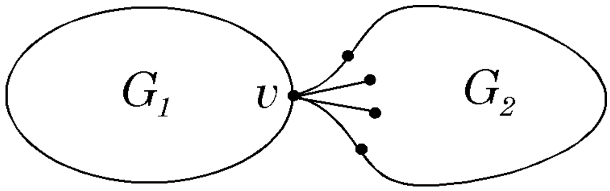


Рис. 30

Возьмем укладку графа G_1 на плоскости такую, что вершина v лежит на границе внешней грани. Затем во внешней грани графа G_1 возьмем укладку графа G_2 такую, что вершина v лежит на границе внешней грани; отметим, что вершина v будет представлена на плоскости в двух экземплярах (см. рис. 31).

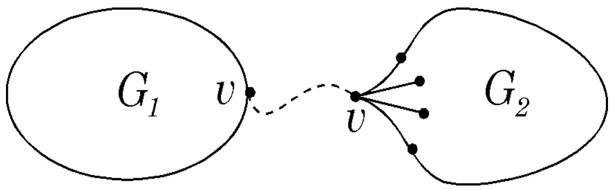


Рис. 31

Соединим два экземпляра вершины v пучком жордановых линий, не допуская лишних пересечений с укладками графов G_1 и G_2, состоящим из такого количества линий, какова степень вершины v в графе G_2. Далее отбросим вхождение вершины v в граф G_2, заменяя инцидентные ей ребра на жордановы линии, полученные из линий указанного пучка и ребер (см. рис. 32).

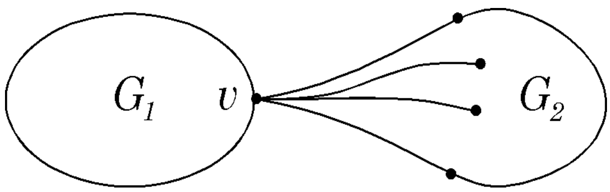


Рис. 32

Таким образом, мы получили укладку графа G на плоскости, что невозможно.

Итак, мы доказали 3).

Пусть $e = ab$ — произвольное ребро графа G. Зафиксируем его. В силу минимальности графа G граф $G' = G - e$ планарен. Отметим, что граф G' к тому же и связен, так как в исходном графе G нет мостов.

4) Докажем, что в графе G' существует цикл, содержащий вершины a и b.

Пусть a и b лежат в одном блоке B графа G'. Если $|VB| \geqslant 3$, то по теореме о свойствах блока существует цикл графа G', содержащий a и b. Если $|VB| = 2$, то в B имеется ребро $e' = ab$, но тогда в G имеются кратные ребра e и e', что противоречит 2).

Осталось рассмотреть случай, когда a и b лежат в разных блоках графа G'. Покажем, что этот случай невозможен.

Итак, пусть a и b лежат в разных блоках графа G'. Тогда в G' существует точка сочленения v, принадлежащая любой простой (a, b)-цепи графа G' и отличная от a и b. Через G'_1 обозначим подграф графа G', порожденный вершиной v и вершинами компоненты связности графа $G' - v$, содержащей a, а через G'_2 — подграф графа G', порожденный вершиной v и вершинами остальных компонент связности графа $G' - v$ (в этом множестве лежит вершина b). Пусть $G''_1 = G'_1 + e_1$, где $e_1 = av$ — новое ребро, и $G''_2 = G'_2 + e_2$, где $e_2 = vb$ — новое ребро (см. рис. 33).

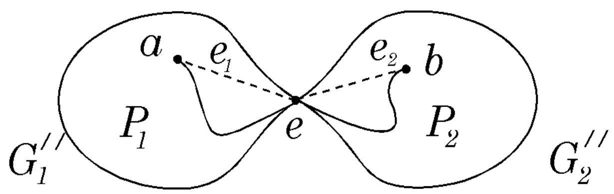


Рис. 33

Заметим, что в графе G''_1 ребер меньше чем в графе G. Действительно, вместо ребра e в G''_1 есть ребро e_1 и часть ребер из графа G осталась в графе G''_2. Аналогично, в графе G''_2 ребер меньше чем в графе G.

Покажем, далее, что в графе G''_1 и, аналогично, в графе G''_2 нет подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Действительно, если в G''_1 имеется такой подграф, то в этом подграфе присутствует вновь присоединенное ребро, но это ребро e_1 можно заменить на цепь

$$a \xrightarrow{e} b \longrightarrow \ldots \longrightarrow v,$$

взяв некоторую простую (b, v)-цепь P_2 в графе G'_2. Следовательно, мы получили подграф в G, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, что невозможно.

Теперь в силу минимальности графа G графы G_1'' и G_2'' планарны. Возьмем укладку графа G_1'' на плоскости такую, что ребро $e_1 = av$ лежит на границе внешней грани. Во внешней грани графа G_1'' возьмем укладку графа G_2'' такую, что ребро $e_2 = vb$ лежит на границе внешней грани (см. рис. 34).

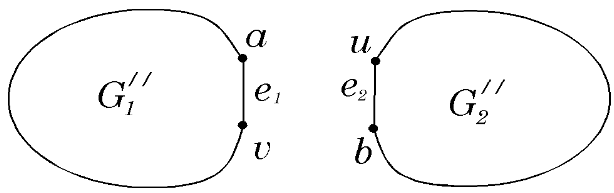


Рис. 34

Отметим, что опять вершина v представлена на плоскости в двух экземплярах. Очевидно, добавление ребра $e = ab$ не меняет планарности графа $G_1'' \Cup G_2''$. Склеим оба вхождения вершины v точно также, как это мы сделали в доказательстве утверждения 3) (см. рис. 35).

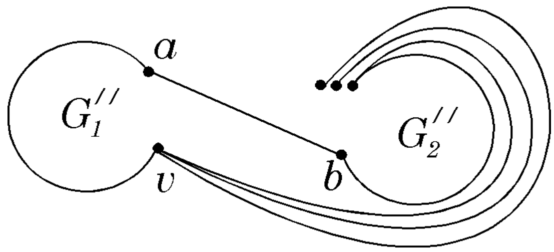


Рис. 35

Сотрем затем ранее добавленные ребра e_1 и e_2. В результате мы получим укладку графа G на плоскости, что невозможно.

Итак, мы доказали утверждение 4).

Среди всех укладок графа G' на плоскости и среди всех циклов C, содержащих a и b, зафиксируем такую укладку и такой цикл, что внутри области, ограниченной циклом C, лежит максимальное возможное число граней графа G'. Зафиксируем один из обходов по циклу C (на рисунках будем рассматривать обход по часовой стрелке по циклу C). Для вершин u и v цикла C через $C[u, v]$ будем обозначать простую (u, v)-цепь, идущую по циклу C от u до v в направлении обхода цикла. Конечно, $C[u, v] \neq C[v, u]$. Положим $C(u, v) = C[u, v] \setminus \{u, v\}$, т. е. $C(u, v)$ получено из $C[u, v]$ отбрасыванием вершин u и v.

Внешним графом (относительно цикла C) будем называть подграф графа G', порожденный всеми вершинами графа G', лежащими снаружи от цикла C. Компоненты связности внешнего графа будем называть *внешними компонентами.* В силу связности графа G' для любой внешней компоненты должны существовать ребра в G', соединяющие ее с вершинами цикла C. *Внешними частями* будем называть (см. рис. 36)

а) внешние компоненты вместе со всеми ребрами, соединяющими компоненту с вершинами цикла C, и инцидентными им вершинами;

б) ребра графа G', лежащие снаружи от цикла C и соединяющие две вершины из C, вместе с инцидентными такому ребру вершинами.

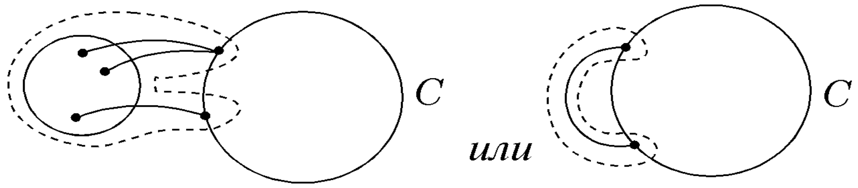


Рис. 36

Аналогично определяются *внутренний граф*, *внутренние компоненты* и *внутренние части* (относительно цикла C).

Будем говорить, что внешняя (внутренняя) часть *встречает цикл* C в своих точках прикрепления к циклу C.

5) Докажем, что любая внешняя часть встречает цикл C точно в двух точках, одна из которых лежит в $C(a,b)$, а другая — в $C(b,a)$.

Если внешняя часть встречает цикл C точно в одной точке v, то v является точкой сочленения графа G, что невозможно (см. рис. 37).

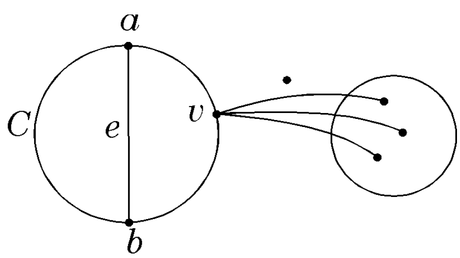


Рис. 37

Таким образом, внешняя часть встречает цикл C не менее чем в двух точках. Если внешняя часть встречает цикл C в двух точках из $C[a,b]$ (случай $C[b,a]$ рассматривается аналогично), то в G' имеется цикл, содержащий внутри себя больше граней чем цикл C и проходящий через a и b, что невозможно (см. рис. 38).

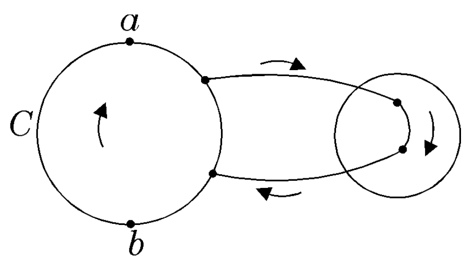


Рис. 38

Опираясь на сделанные замечания, теперь легко завершить доказательство утверждения 5).

Ввиду утверждения 5) будем говорить, что любая внешняя часть является (a, b)-*разделяющей частью*, поскольку она встречает и $C(a, b)$, и $C(b, a)$. Аналогично можно ввести понятие (a, b)-разделяющей внутренней части. Заметим, что внутренняя часть может встречать цикл C, вообще говоря, более чем в двух точках, но не менее чем в двух точках.

6) Докажем, что существует хотя бы одна (a, b)-разделяющая внутренняя часть.

Пусь, от противного, таких внутренних частей нет. Тогда, выходя из a внутри области, ограниченной C, и двигаясь вблизи от C по направлению обхода C и вблизи от встречающихся внутренних частей, можно уложить ребро $e = ab$ внутри цикла C (см. рис. 39), т. е. G — планарный граф, что невозможно.

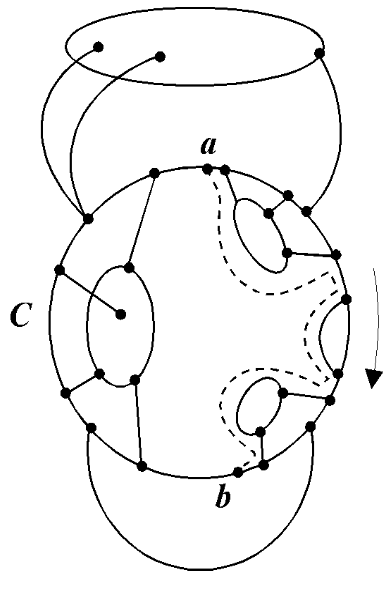


Рис. 39

Итак, мы установили утверждение 6).

7) Покажем, что существует внешняя часть, встречающая $C(a,b)$ в точке c и $C(b,a)$ — в точке d, для которой найдется внутренняя часть, являющаяся одновременно (a,b)-разделяющей и (c,d)-разделяющей.

На рис. 40 показан пример ситуации, указанной в этом утверждении.

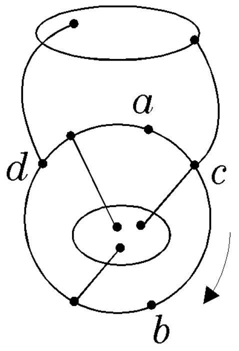


Рис. 40

Пусть, от противного, увеждение 7) неверно. Упорядочим (a,b)-разделяющие внутренние части в порядке их прикрепления к циклу C при движении по циклу от a до b и обозначим их соответственно через $In_1, In_2, \ldots$. Пусть u_1 и u_2 — первая и последняя вершины из $C(a,b)$, в которых In_1 встречает цикл C, а v_1 и v_2 — первая и последняя вершины из $C(b,a)$, в которых In_1 встречает цикл C (возможно, вообще говоря, $u_1 = u_2$ или $v_1 = v_2$). Поскольку 7) неверно, для любой внешней части обе ее вершины, в которых она встречает C, лежат либо на $C[v_2, u_1]$, либо на $C[u_2, v_1]$. Тогда снаружи от цикла C можно провести жорданову кривую P, не пересекая ребер графа G', соединяющую v_2 с u_1 (см. рис. 41).

.

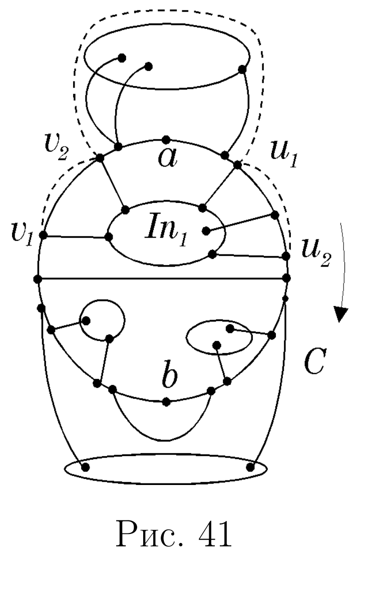


Рис. 41

Поскольку на участках $C(u_1, u_2)$ и $C(v_1, v_2)$ нет точек прикрепления внешних частей, используя жорданову кривую P, внутреннюю часть In_1 можно перебросить ("вывернуть"наружу от цикла C) во внешнюю область от цикла C, т. е. уложить ее снаружи от цикла C и сделать ее внешней частью.

Аналогично все остальные (a, b)-разделяющие внутренние части можно перебросить во внешнюю область от цикла C. После этого точно также, как в доказательстве утверждения 6), ребро $e = ab$ можно уложить внутри цикла C, так как не останется (a, b)-разделяющих внутренних частей. Следовательно, мы получим укладку графа G, что невозможно.

Итак, мы доказали утверждение 7)

Обозначим через In внутреннюю часть, которая является одновременно (a, b)-разделяющей и (c, d)-разделяющей, где c и d — точки прикрепления к циклу C некоторой внешней части J, причем c лежит на $C(a, b)$, а d — на $C(b, a)$ (см. рис. 42).

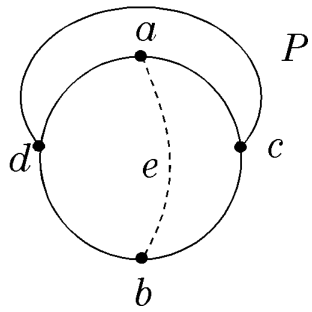


Рис. 42

Отметим, что во внешней части J есть простая (d, c)-цепь P. Обозначим через u_1 и u_2 вершины, в которых In встречает соответственно $C(a, b)$ и $C(b, a)$, а через v_1 и v_2 — вершины, в которых In встречает соответственно $C(c, d)$ и $C(d, c)$ (см. рис. 43).

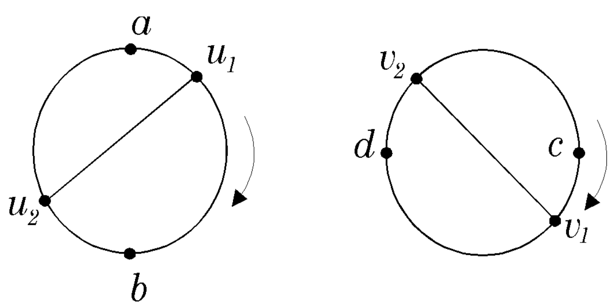


Рис. 43

Дальнейшие рассуждения разобъем на два случая.

1. Пусть пара вершин v_1 и v_2 является (a, b)-разделяющей.

Тогда, в частности, $v_2 \neq a$ и $v_1 \neq b$. Легко понять, что в этом случае граф G содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (отметим, что в In существует простая (v_1, v_2)-цепь) (см. рис. 44).

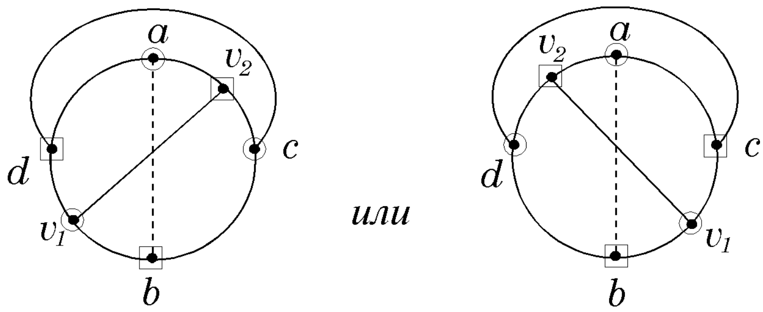


Рис. 44

2. Пусть пара вершин v_1 и v_2 не является (a, b)-разделяющей.

Тогда v_1, v_2 лежат на $C[a, b]$ или v_1, v_2 лежат на $C[b, a]$. Без ограничения общности будем считать, что v_1 и v_2 лежат на $C[a, b]$.

2.1. Пусть v_1 и v_2 лежат на $C(a, b)$, т. е. $v_1 \neq b$ и $v_2 \neq a$ (см. рис. 45).

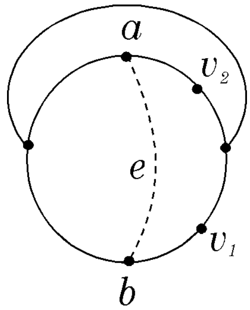


Рис. 45

2.1.1. Пусть u_2 лежит на $C(d, a)$.

Тогда в графе G имеется подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (см. рис. 46).

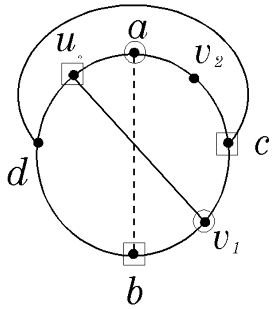


Рис. 46

2.1.2. Пусть $u_2 = d$.

Тогда во внешней части In имеется вершина w и три простые цепи от w соответственно до d, v_1 и v_2, которые в качестве общей точки имеют только точку w. В этом случае в графе G имеется подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (см. рис. 47).

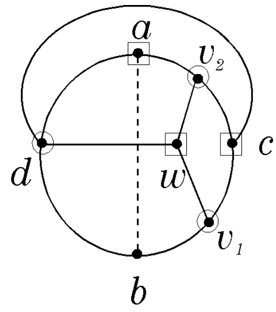


Рис. 47

2.1.3. Пусть u_2 лежит на $C(b, d)$.

Тогда в графе G есть подграф , гомеоморфный $K_{3,3}$ (см. рис. 48).

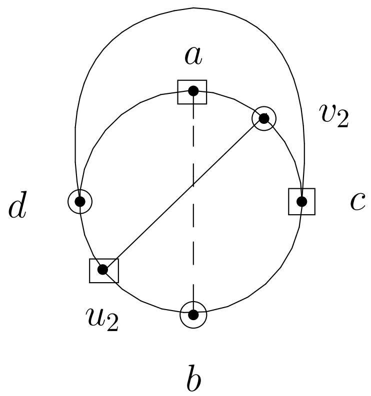


Рис. 48

Итак, мы рассмотрели случай 2.1. Поэтому мы можем считать, что хотя бы одна из вершин v_1 и v_2 не лежит на $C(a, b)$. Без ограничения общности будем считать, что это вершина v_1, т. е. $v_1 = b$ (поскольку v_1 лежит на $C[a, b]$).

2.2. Пусть $v_2 \neq a$.

2.2.1. Пусть u_2 лежит на $C(d, a)$.

Тогда в графе G есть подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (см. рис. 49).

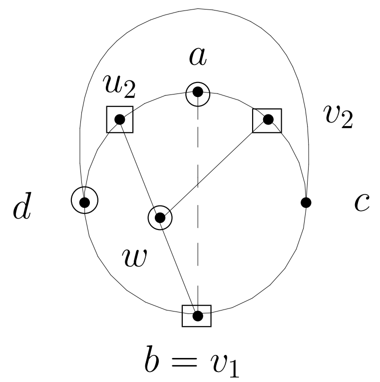


Рис. 49

2.2.2. Пусть $u_2 = d$.

Тогда в графе G имеется подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (см. рис. 50).

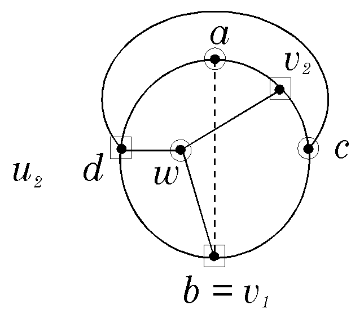


Рис. 50

2.2.3. Пусть u_2 лежит на $C(b, d)$.

Тогда в графе G имеется подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (см. рис. 51).

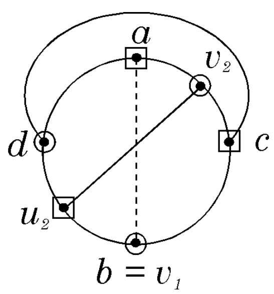


Рис. 51

Итак, мы рассмотрели случай 2.2. Поэтому осталось, наконец, рассмотреть последний случай.

2.3. Пусть $v_2 = a$ (см. рис. 52).

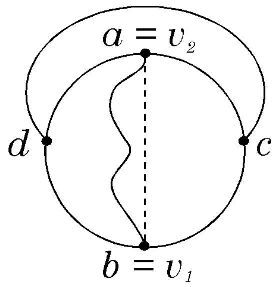


Рис. 52

Рассмотрим теперь пару вершин u_1 и u_2. Будем считать, что $u_1 = c$ и $u_2 = d$, поскольку все другие случаи расположения вершин u_1 и u_2 рассматриваются совершенно аналогично тому, как были рассмотрены все случаи расположения вершин v_1 и v_2. Пусть P_1 и P_2 — соответственно кратчайшие простые (a, b)-цепь и (c, d)-цепь во внутренней части In (см. рис. 53).

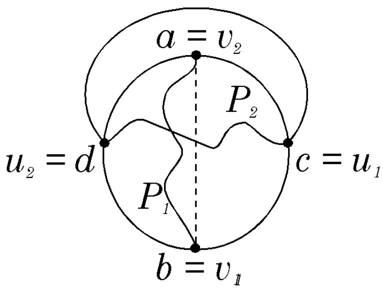


Рис. 53

Очевидно, цепи P_1 и P_2 имеют общую точку.

2.3.1. Пусть цепи P_1 и P_2 имеют более одной общей точки.

Тогда в графе G есть подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (см. рис. 54).

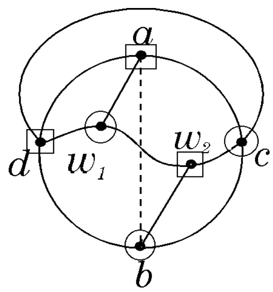


Рис. 54

2.3.2. Пусть цепи P_1 и P_2 имеют точно одну общую точку w.

Тогда в графе G есть подграф, гомеоморфный K_5 (см. рис. 55).

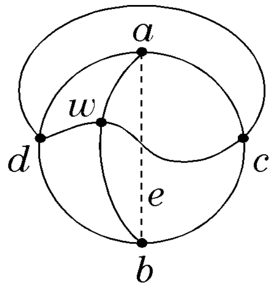


Рис. 55

Мы завершили рассмотрение последнего случая 2.3. Таким образом, доказано, что в графе G имеется подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5, что противоречит нашему первому предположению.

Итак, теорема доказана. □

Определим процедуру стягивания ребра в графе. Пусть $e = uv$ — ребро графа G, не являющееся петлей. Последовательно выполним следующие действия: отождествим вершины u и v, отбросим все петли, из каждой совокупности кратных ребер отбросим все ребра, кроме одного, т. е. сведем кратность ребер к единице. Получим обыкновенный граф, который обозначим через G'. Будем говорить, что граф G' получен из графа G *стягиванием ребра* e. На рис. 56 показан пример применения процедуры стягивания ребра.

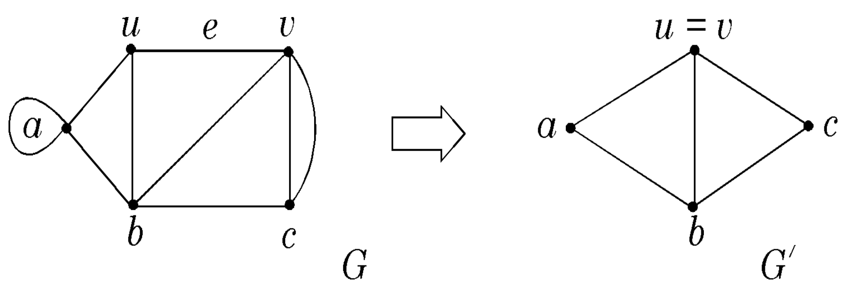


Рис. 56

Говорят, что граф G *стягиваем к графу* G', если G' можно получить из G с помощью конечного числа применений процедуры стягивания ребер.

Пример. Граф Петерсена стягиваем к K_5 (см. рис. 57).

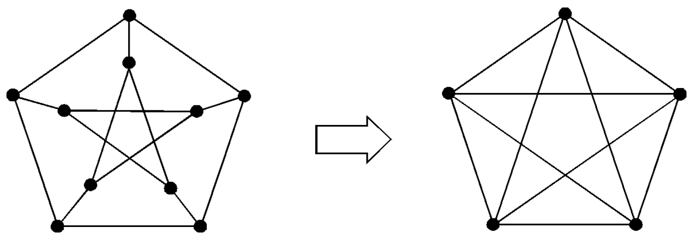


Рис. 57

Заметим, что граф Петерсена не содержит подграфов, гомеоморфных K_5, но содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$.

В заключение этого раздела приведем без доказательства несколько интересных утверждений о планарных графах.

Следующую теорему можно вывести из теоремы Понтрягина-Куратовского.

Теорема 5.5 (Вагнер, Харари и Татт). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к $K_{3,3}$, и не содержит подграфов, стягиваемых к K_5.*

Теорема 5.6 (Вагнер). *Обыкновенный планарный граф обладает укладкой на плоскости, в которой для изображения ребер используются лишь отрезки прямых линий.*

Теорема 5.7 (Бейкер). *Следующие условия эквивалентны для любой конечной решетки L:*

1) *решетка L планарна, т. е. планарна ее диаграмма Хассе;*

2) *в решетке L ее порядок является пересечением двух линейных порядков, определенных на множестве L;*

3) *решетка L изоморфно вложима в прямое произведение двух конечных цепей.*

В связи с последней теоремой отметим, что Келли и Ривал нашли описание планарных конечных решеток на языке запрещенных подрешеток. Ими было построено счетное (бесконечное) семейство всевозможных минимальных непланарных конечных решеток.

5.4. Двойственные графы

Граф G_1 называется *двойственным* к графу G_2, если матроид циклов $M(G_1)$ графа G_1 изоморфен матроиду разрезов $M^*(G_2)$ графа G_2. Поскольку изоморфизм матроидов является изоморфизмом и двойственных к ним матроидов, отношение «быть двойственными» для графов симметрично.

Заметим, что для двойственных графов G_1 и G_2 очевидно выполняется $r(G_1) = r^*(G_2)$ и $r^*(G_1) = r(G_2)$.

Лемма 1. *Пусть G_1 и G_2 — ненулевые графы и ϕ — биекция из EG_1 на EG_2. Если ϕ (точнее, отображение, индуцированное ϕ на $\mathcal{P}(EG_1)$) отображает векторы некоторого базиса пространства циклов графа G_1 на векторы некоторого базиса пространства разрезов графа G_2, то графы G_1 и G_2 — взаимно двойственные графы.*

Доказательство. Очевидно, любая биекция сохраняет операции $\cup$, $\cap$, $\setminus$ и, следовательно, сохраняет операцию симметрической разности $\oplus$.

Поскольку базис переходит на базис, пространство циклов графа G_1 переходит под действием ϕ на пространство разрезов графа G_2. Так как отношение $\subseteq$ также сохраняется биекцией в обе стороны, минимальные ненулевые элементы пространства циклов графа G_1, т. е. циклы графа G_1, переходят под действием ϕ на минимальные непустые элементы пространства разрезов графа G_2, т. е. на разрезы графа G_2. Конечно, верно и обратное утверждение, т. е. ϕ — изоморфизм матроида $M(G_1)$ на матроид $M^*(G_2)$. $\square$

Пример.

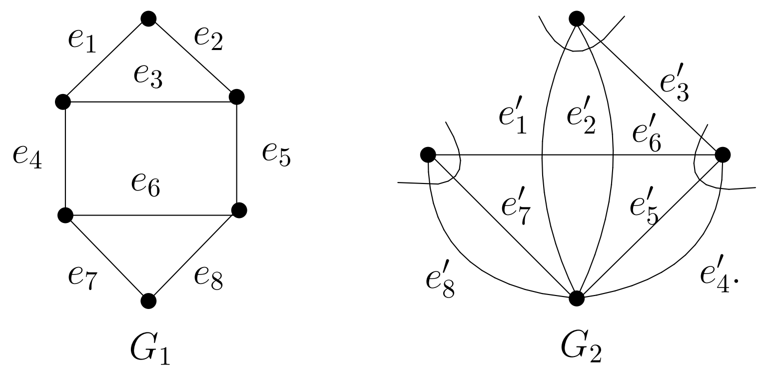


Рис. 58

Рассмотрим базис пространства циклов графа G_1, который состоит из векторов, отвечающих его внутренним граням:

$$C_1 = \{e_1, e_2, e_3\}, \quad C_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}, \quad C_3 = \{e_6, e_7, e_8\}.$$

Определим биекцию ϕ из EG_1 на EG_2, полагая $\phi(e_i) = e'_i$ для $i = 1, \ldots, 8$. Очевидно, $r^*(G_1) = m - n + k = 8 - 6 + 1 = 3$ и $r(G_2) = n - k = 4 - 1 = 3$. Далее заметим, что $\phi(C_1)$, $\phi(C_2)$ и $\phi(C_3)$ — линейно независимая система разрезов графа G_2, и, следовательно, она является базисом пространства разрезов графа G_2, так как $r(G_2) = 3$. Таким образом, ϕ переводит базис C_1, C_2, C_3 пространства циклов графа G_1 на базис $\phi(C_1), \phi(C_2), \phi(C_3)$ пространства разрезов графа G_2, т. е. G_1 и G_2 — взаимно двойственные графы по лемме 1.

Пусть G — произвольный граф и $e = ab$ — некоторое его ребро. Будем говорить, что граф G' получен из графа G *замыканием* ребра e, если G' получен из G с помощью следующих действий: отбрасывания ребра e и отождествления вершин a и b, т. е. замену их на одну новую вершину (заметим, что при этом сохраняются все ребра, отличные от e, только концы ребер, равные a или b, заменяются на новую вершину).

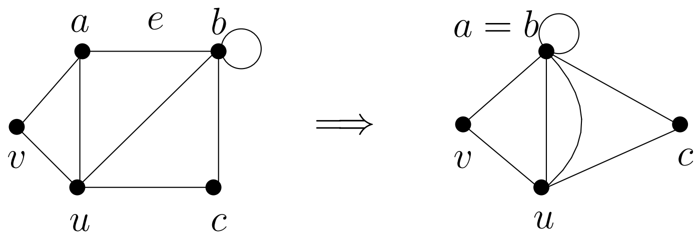


Рис. 59

Лемма 2. *Пусть G_1 и G_2 — взаимно двойственные графы, ϕ — изоморфизм матроида циклов $M(G_1)$ на матроид разрезов $M^*(G_2)$, $e \in \in EG_1$, $G_1' = G_1 - e$ и G_2' — граф, полученный из G_2 замыканием ребра $\phi(e)$. Тогда G_1' и G_2' — взаимно двойственные графы.*

Доказательство. Покажем, что ограничеение изоморфизма ϕ на множество EG' является изоморфизмом матроида циклов $M(G_1')$ на матроид разрезов $M^*(G_2')$.

Пусть C — цикл графа G_1'. Он является циклом и в графе G_1, не содержащим ребра e. Тогда его образ $\phi(C)$ является разрезом в графе G_2, не содержащим $\phi(e)$. Нетрудно понять, что $\phi(C)$ будет разрезом и в графе G_2'.

Обратно, пусть $\phi(A)$ — разрез в графе G_2' для некоторого $A \subseteq EG_1'$. Поскольку $e \notin A$, этот разрез является разрезом и в графе G_2. Тогда его прообраз A является циклом в графе G_1, не содержащим e. Следовательно, A — цикл графа G_1'. $\square$

Пример. Рассмотрим графы G_1 и G_2 из предыдущего примера. Удалим ребра e_3 и e_6 из графа G_1 и замкнем ребра e_3' и e_6' в графе G_2. Получим следующие графы

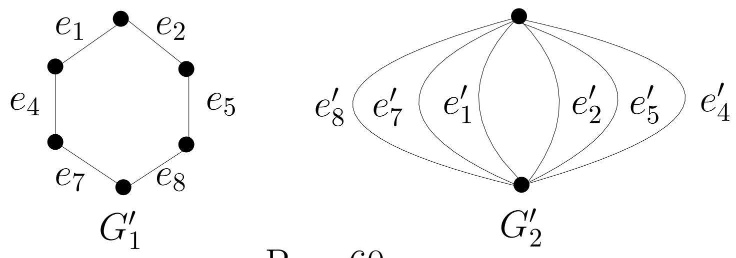


Рис. 60

Графы G_1' и G_2' взаимно двойственны, поскольку ϕ отображает единственный цикл графа G_1' на единственный разрез графа G_2'.

Следствие 1. *Если ненулевой граф имеет двойственный граф, то любой его ненулевой подграф также имеет двойственный граф.*

Доказательство. Достаточно отметить, что любой ненулевой подграф H графа G можно получить из G, удаляя все ребра, не принадлежащие H, и удаляя лишние изолированные вершины. □

Следствие 2. *Если граф имеет двойственный граф, то любой гомеоморфный ему граф также имеет двойственный граф.*

Доказательство. Пусть G_1 и G_2 — взаимно двойственные графы и ϕ — изоморфизм матроида циклов $M(G_1)$ на матроид разрезов $M^*(G_2)$.

Предположим сначала, что граф G_1' получен из графа G_1 исключением вершины v степени 2 и $e_1 = av$, $e_2 = vb$ — два различных ребра, инцидентных вершине v в графе G_1. Будем считать, что при исключении вершины v ребра e_1 и e_2 графа G_1 заменяются на ребро $e_2 = ab$ графа G_1'. Очевидно, граф G_1' можно получить из графа G_1 и другим способом — замыкая ребро e_1. Поэтому в силу леммы 2 граф G_1' имеет двойственный граф.

Предположим теперь, что граф G_1' получен из графа G_1 включением вершины v степени 2. Пусть при этом некоторое ребро $e = ab$ графа G_1 заменяется на два новых ребра $e_1 = va$ и $e_2 = vb$ графа G_1'. Через G_2' обозначим граф, полученный из графа G_2 заменой ребра $e' = uw$, где $e' = \phi(e)$, на два новых кратных ребра $e_1' = uw$ и $e_2' = uw$. Очевидно, все циклы графа G_1' получаются из циклов графа G_1 заменой каждого вхождения в цикл ребра e на два ребра e_1 и e_2. Аналогично, все разрезы графа G_2' получаются из разрезов графа G_2 заменой каждого вхождения в разрез ребра e' на два ребра e_1' и e_2'. Отсюда легко вывести, что G_1' и G_2' — взаимно двойственные графы. □

Пусть G — произвольный ненулевой граф и $v \in V = VG$. *Вектором инцидентности*, отвечающим вершине v, будем называть сечение $\langle v, V \setminus v \rangle$ графа G и будем обозначать его через $Sec(v)$.

Лемма 3. *Пусть $VG = V_1 \dot{\cup} V_2$, где $V_1 = \{v_1, \ldots, v_t\}$ и $V_2 = \{v_{t+1}, \ldots, v_n\}$ для некоторого $t \in \mathbf{N}$, где n — число вершин в ненулевом графе G. Тогда*

$$\langle V_1, V_2 \rangle = Sec(v_1) \oplus \ldots \oplus Sec(v_t) = Sec(v_{t+1}) \oplus \ldots \oplus Sec(v_n).$$

Доказательство. Каждое ребро графа G, принадлежащее сечению $\langle V_1, V_2 \rangle$, встретится точно в одном из множеств $Sec(v_i)$ для $i = 1, \ldots, t$. Каждое же ребро графа G, не принадлежащие рассматриваемому сечению, либо вообще не встретится в множествах $Sec(v_i)$ для $i = 1, \ldots, t$, либо встретится точно в двух из них, отвечающих концам ребра. Из сказанного следует первое из доказываемых равенств. Второе равенство доказывается аналогично. □

Следствие 3. *Пусть G — ненулевой n-граф. Тогда любые $n-1$ векторов инцидентности, отвечающих его вершинам, являются системой образующих пространства разрезов графа G.*

Доказательство. Как было доказано ранее, векторами пространства разрезов ненулевого графа являются сечения графа и только они. Осталось отметить, что отсутствующий вектор инцидентности не входит точно в одно из указанных в лемме 3 разложений. □

Лемма 4. *Любой ненулевой планарный граф имеет двойственный граф.*

Доказательство. Пусть G — плоский ненулевой граф и $g_1, \ldots, g_f$ — все его грани. Рассмотрим некоторое множество, состоящее из f вершин $\{v_1, \ldots, v_f\}$. Определим на нем граф G'. Для каждого ребра e графа G, лежащего на границе граней g_i и g_j, зададим ребро $e' = v_i v_j$ графа G' (конечно, случай $i = j$ отвечает ситуации, когда ребро e лежит внутри грани g_i, и тогда $e' = v_i v_i$ является петлей).

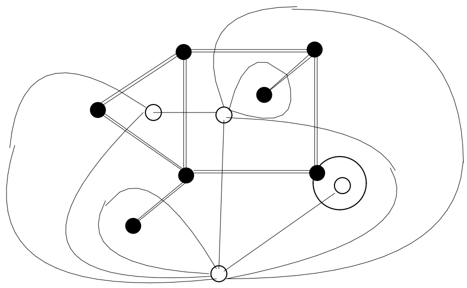


Рис. 61

Докажем, что G и G' — взаимно двойственные графы. Пусть $X_1, \ldots, X_{f-1}$ — базис пространства циклов графа G, состоящий из векторов пространства циклов, отвечающих границам внутренних граней графа G. Рассмотрим биекцию ϕ из EG на EG', которая фактически была определена при задании ребер графа G' и для которой выполняется $\phi(e) = e'$ для любого $e \in EG$. Очевидно, для любого $i = 1, \ldots, f-1$ множество $\phi(X_i)$ является вектором инцидентности графа G', отвечающим его вершине v_i. Система векторов $\phi(X_1), \ldots, \phi(X_{f-1})$ пространства разрезов графа G' линейно независима, так как биекция переводит линейно независимую систему векторов в линейно независимую систему векторов (поскольку биекция сохраняет симметрическую разность). Теперь в силу следствия 3 система $\phi(X_1), \ldots, \phi(X_{f-1})$ является базисом пространства разрезов графа G'. Отсюда на основании леммы 1 заключаем, что G и G' — взаимно двойственные графы. $\square$

Лемма 5. *Граф $K_{3,3}$ не имеет двойственного графа.*

Доказательство. Очевидно, в графе $K_{3,3}$ выполняются следующие свойства:

1) граф не имеет разрезов, состоящих из одного или из двух ребер,

2) любой цикл имеет длину 4 или 6,

3) число ребер $m = 9$.

Пусть, от противного, граф $K_{3,3}$ имеет двойственный граф G. Будем считать, что в графе G нет изолированных вершин (отбрасывание изолированных вершин в графах, очевидно, не нарушает двойственности). В силу упомянутых свойств графа $K_{3,3}$ в графе G выполняются следующие свойства:

$1'$) нет петель и нет циклов длины 2, т. е. G — обыкновенный граф,

$2'$) нет ненулевых сечений (и, в частности, векторов инциденции), содержащих меньше 4 ребер, т. е. $\deg v \geqslant 4$ для любой вершины v графа G, 3′) число ребер $m = 9$.

Из 1′) и 2′) следует, что $n \geqslant 5$, где n — число вершин графа G. В силу леммы о рукопожатиях получаем $18 = 2m = \sum_v \deg v \geqslant n{\cdot}4 \geqslant 5{\cdot}4 = 20$, что противоречиво. □

Лемма 6. *Граф K_5 не имеет двойственного графа.*

Доказательство. Очевидно, в графе K_5 выполняются следующие свойства:

1) нет циклов длины 1 или 2,

2) любой разрез состоит из 4 или 6 ребер,

3) число ребер $m = 10$.

Пусть, от противного, граф K_5 имеет двойственный граф G. Будем считать, что в графе G нет изолированных вершин.

В силу 2) в графе G нет циклов длины 1 или 2, т. е. G — обыкновенный граф.

Из 2) вытекает также, что все циклы графа G имеют четные длины 4 или 6. Тогда G является двудольным графом в силу теоремы Кенига из §1.2.

Если для числа n вершин графа G выполняется неравенство $n \leqslant 6$, то, как нетрудно убедиться, перебирая полные двудольные графы с числом вершин меньше или равным 6, для числа m ребер графа G получаем $m \leqslant 9$, что противоречит 3). Таким образом, $n \geqslant 7$. Поскольку G — обыкновенный граф, из 1) получаем $\deg v \geqslant 3$ для любой вершины v графа G. Применяя лемму о рукопожатиях, получаем $20 = 2m = \sum\limits_v \deg v \geqslant n \cdot 3 \geqslant 7 \cdot 3 = 21$, что противоречиво. □

Теорема 5.8 (Уитни). *Ненулевой граф имеет двойственный граф тогда и только тогда, когда он планарен.*

Доказательство. Пусть граф G имеет двойственный граф. Предположим, от противного, что граф G непланарный. Тогда в силу теоремы Понтрягина-Куратовского в графе G имеется подграф, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$. Отсюда на основании следствий 1 и 2 из леммы 2 получаем, что граф K_5 или граф $K_{3,3}$ имеет двойственный граф, что противоречит лемме 5 или лемме 6.

Обратное утверждение верно по лемме 4. □

6. Раскраски

6.1. Хроматические числа

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф и $\{c_1, \ldots, c_t\}$ — некоторое множество, элементы которого будем называть красками. *Раскраской* или, точнее, *t-раскраской* графа G называется отображение ϕ из V в $\{c_1, \ldots, c_t\}$ такое, что для любых двух различных смежных вершин u и v графа G выполняется $\phi(u) \neq \phi(v)$. Отметим, что здесь не предполагается, что ϕ отображает V на всё множество красок $\{c_1, \ldots, c_t\}$. Будем говорить, что цвет $\phi(v)$ *приписан* вершине $v \in V$ или вершина v *имеет цвет* $\phi(v)$. Мы видим, что t-раскраска графа G приписывает каждой его вершине один из t заданных цветов таким образом, что любые две различные смежные вершины имеют разный цвет.

Заметим, что, рассматривая раскраски, можно без ограничения общности считать граф G обыкновенным.

Граф называется *t-раскрашиваемым*, если он обладает t-раскраской. Граф называется *t-хроматическим*, если он t-раскрашиваемый, но не является $(t-1)$-раскрашиваемым; число t в таком случае называют *хроматическим числом* графа G и обозначают через $\chi(G)$.

Заметим, что

1) 1-хроматические графы — это нулевые графы и только они;

2) 2-хроматические графы — это ненулевые двудольные графы и только они;

3) $\chi(K_n) = n$ и $\chi(G) \geqslant n$, если граф G содержит в качестве подграфа граф K_n для натурального числа n.

Теорема 6.1 (Кёниг). *Ненулевой обыкновенный граф G является 2-хроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.*

Это утверждение эквивалентно теореме Кенига из раздела 1.2.

Следствие 1. *Любое неодноэлементное дерево является 2-хроматическим графом.*

Через $\Delta(G)$ будем в дальнейшем обозначать наибольшую из степеней вершин графа G.

Лемма 1. *Пусть $\Delta = \Delta(G)$. Тогда граф G граф является $(\Delta + 1)$-раскрашиваемым.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу вершин графа G. Пусть G — неодноэлементный граф и v — некоторая его вершина. Тогда по предположению индукции граф $G-v$ является $(\Delta+1)$-раскрашиваемым. Очевидно, $(\Delta+1)$-раскраску графа $G-v$ можно дополнить до $(\Delta+1)$-раскраски графа G, приписав вершине v любой цвет, не использованный для раскраски смежных с ней вершин. □

Лемма 2. *Если для некоторого $t \in \mathbf{N}$ каждый блок связного графа t-раскрашиваем , то и сам граф t-раскрашиваем.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу блоков графа. Можно считать, что граф G имеет более одного блока. Пусть B — один из висячих блоков графа и G_1 — подграф графа G, равный объединению остальных блоков. Через v обозначим единственную общую вершину графов B и G_1. По предположению индукции граф G_1 является t-раскрашиваемым. Очевидно, имеются две такие t-раскраски графов B и G_1, что вершине v приписывается ими одинаковый цвет. Теперь ясно, что эти две раскраски дают искомую раскраску графа G. □

Лемма 3. *Пусть G — обыкновенный граф, который является блоком и не является полным графом. Если $\Delta = \Delta(G) \geqslant 3$, то граф (G) является Δ-раскрашиваемым.*

Доказательство. 1) Покажем сначала, что в графе G существует такая простая незамкнутая цепь $u \to w \to v$, что вершины u и v несмежны и граф $(G-u)-v = G-u-v$ связен.

Обозначим через L множество всех доминирующих вершин графа G, т. е. вершин, смежных с каждой его вершиной.

Предположим, что $L \neq \emptyset$. Очевидно, вершинно-порожденный подграф $G(L)$ является полным подграфом. Так как G не является полным графом, в $VG \setminus L$ имеются две различные несмежные вершины u и v. Поскольку $L \neq \emptyset$, граф $G-u-v$ связен. Осталось в качестве w взять любую вершину из L.

Пусть теперь $L = \emptyset$. В силу условия теоремы в графе G существует вершина a такая, что $\deg a \geqslant 3$. Ясно, что граф $G-a$ связен, поскольку граф G является блоком.

Рассмотрим случай, когда граф $G-a$ — блок. Так как $L = \emptyset$, в графе $G-a$ найдется вершина b, несмежная с a. Возьмем кратчайшую (a,b)-цепь в графе G: $a \to w \to v \to \ldots \to b$ (возможно эта цепь заканчивается вершиной v и тогда $v = b$). Очевидно, вершина v несмежна с вершиной a и граф $G - a - v$ связен. Осталось в этом случае положить $u = a$.

Рассмотрим теперь случай, когда связный граф $G - a$ не является блоком. Тогда граф $G - a$ есть неодноэлементное дерево блоков. Возьмем два его различных блока B_1 и B_2, являющихся висячими вершинами в дереве блоков и точек сочленения графа $G - a$, т. е. висячими блоками. В блоке B_1 существует вершина u, не являющаяся точкой сочленения графа $G - a$ и смежная с a (иначе точка сочленения графа $G - a$, лежащая в блоке B_1, была бы точкой сочленения графа G, что невозможно). Аналогично, в блоке B_2 существует вершина v, не являющаяся точкой сочленения графа $G - a$ и смежная с a.

Легко видеть, что граф $G - u - v$ связен. Действительно, удаление из графа $G - a$ вершин u и v не нарушает связности висячих блоков B_1 и B_2, поэтому граф $G - a - u - v$ связен. Так как $\deg a \geqslant 3$, отсюда следует связность графа $G - u - v$.

Для завершения доказательства утверждения 1) осталось положить $w = a$.

2) Построим теперь Δ-раскраску графа G.

Возьмем вершины u, w, v, указанные в 1). Поскольку граф $G - u - v$ связен, его вершины можно занумеровать таким образом $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} = w$, что каждая из вершин $a_1, \ldots, a_{n-3}$ будет смежна по крайней мере одной вершине с большим номером.

Пусть T_1 — остовное дерево графа $G_1 = G - u - v$. В качестве a_1 берем любую висячую вершину дерева T_1, отличную от w. Ясно, что граф $G_2 = G_1 - a_1$ — связный граф с остовным деревом $T_2 = T_1 - a_1$, содержащим w. Отметим, что вершина a_1 соединена висячим ребром с одной из вершин графа G_2. Далее в качестве a_2 выбираем висячую вершину в T_2, отличную от w, и т. д. Очевидно, дерево T_{n-2} одноэлементно и состоит из одной вершины w. Вершине w присваиваем номер $n - 2$, т. е. $a_{n-2} = w$.

Окрасим вершины u и v в первый цвет c_1. Затем последовательно будем приписывать вершинам $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} = w$ один из цветов $c_1, c_2, \ldots, c_\Delta$ по следующему правилу.

Пусть $n - 2 > s \geqslant 1$ и вершины $u, v, a_1, \ldots, a_s$ уже окрашены (здесь при $s = 1$ имеется точно две окрашенных вершины u и v). Так как a_s смежна хотя бы с одной вершиной, имеющей больший номер, степень вершины a_s в вершинно-порожденном подграфе $G(\{u, v, a_1, \ldots, a_s\})$ меньше Δ. Вершину a_s окрасим в тот из цветов $c_1, \ldots, c_\Delta$, который ещё не был использован для окраски вершин, смежных с a_s.

Аналогично поступим и с вершиной $a_{n-2} = w$. Поскольку $\deg w \leqslant \Delta$ и вершины u и v, смежные с w, окрашены в один и тот же цвет c_1, при раскраске вершин, смежных с w, были использованы не все имеющиеся краски. Окрасим вершину w в еще неиспользованный цвет и получим Δ-раскраску графа G. $\square$

Теорема 6.2 (Брукс, 1941). *Пусть G — связный обыкновенный граф, не являющийся полным графом, и $\Delta(G) \geqslant 3$. Тогда граф G является Δ-раскрашиваемым.*

Доказательство. Если G — блок, то утверждение верно в силу леммы 3. Пусть G не является блоком. В силу леммы 2 достаточно установить, что прозвольный блок H графа G является Δ-раскрашиваемым.

Ясно, что $\Delta(H) \leqslant \Delta(G) = \Delta$. Если $\Delta(H) < \Delta$, то блок H является Δ-раскрашиваемым по лемме 1. Пусть $\Delta(H) = \Delta$. Если H — полный граф, то все степени $\deg_H v$ его вершин v равны Δ, поэтому для точки сочленения u графа G, лежащей в H, выполняется $\deg_G u \geqslant \geqslant \Delta + 1$, что противоречит определению числа Δ. Таким образом, H не является полным графом. Тогда в силу леммы 3 блок H является Δ-раскрашиваемым. $\square$

Заметим, что теорема Брукса даёт оценку сверху для хроматического числа графа. Однако, эта оценка может быть сколь угодно далека от хроматического числа. Действительно, любое нетривиальное дерево является 2-хроматическим графом и можно построить дерево, имеющее сколь угодно большие степени вершин.

Лемма 4. *Пусть вершины графа G раскрашены красками $c_1, \dots, c_t$. Обозначим через G_{ij} подграф графа G, порожденный всеми вершинами цвета c_i и всеми вершинами цвета c_j, где $i \neq j$ и $1 \leqslant i, j \leqslant t$. Пусть G'_{ij} — некоторая компонента связности графа G_{ij}. Поменяем местами краски c_i и c_j в раскраске вершин из подграфа G'_{ij} и оставим без изменения цвета остальных вершин графа G. Тогда получится новая раскраска графа G красками $c_1, \dots, c_t$.*

Доказательство. Пусть вершины u и v графа G имеют одинаковый цвет c при новом распределении красок. Если $c \neq c_i, c_j$, то вершины u и v, очевидно, несмежны. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $c = c_i$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $u, v \in VG'_{ij}$. Тогда вершины u и v имеют одинаковый цвет в исходной раскраске и поэтому несмежны.

2. Пусть $u \in VG'_{ij}$, а $v \notin VG'_{ij}$. Тогда вершины u и v несмежны, так как они лежат в разных компонентах связности графа G_{ij}.

3. Пусть $u \notin VG'_{ij}$, а $v \in VG'_{ij}$. Этот случай аналогичен предыдущему случаю.

4. Пусть $u, v \notin VG'_{ij}$. Тогда вершины u и v имеют одинаковый цвет c_i в исходной раскраске графа G и поэтому они несмежны. □

Теорема 6.3 (Хивуд, 1890). *Любой планарный граф 5-раскрашиваем.*

Доказательство. Пусть G — планарный n-граф. Проведем индукцию по числу вершин графа. Если $n \leqslant 5$, то утверждение очевидно. Будем теперь считать, что G — плоский обыкновенный граф, $n \geqslant 6$ и утверждение верно для любого плоского графа, содержащего меньше чем n вершин.

Согласно следствию 5 из раздела 4.2 граф G имеет вершину v, степень которой меньше или равна 5. Используя предположение индукции раскрасим граф $G - v$ в пять цветов. Если $\deg v < 5$, то вершину v можно раскрасить в любой цвет, не использованный при раскраске вершин, смежных с v.

Пусть теперь $\deg v = 5$. Будем считать, что вершины v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, смежные с v, занумерованы таким образом, что инцидентные им ребра выходят соответственно из вершины v последовательно друг за другом по направлению часовой стрелки (см. рис. 62). Если какие-либо две вершины, смежные с v, имеют одинаковый цвет, то вершину v можно раскрасить в цвет, не использованный при раскраске смежных с ней вершин. Поэтому без ограничения общности будем считать, что для любого $i = 1, 2, 3, 4, 5$ вершина v_i окрашена в цвет c_i. В соответствии с леммой 4 рассмотрим подграф G_{13} в графе G.

1. Пусть вершины v_1 и v_3 не лежат в одной компоненте связности графа G_{13}. Тогда $v_1 \in VG'_{13}$ и $v_3 \in VG''_{13}$, где G'_{13} и G''_{13} — две различные компоненты связности графа G_{13}. Пользуясь леммой 4, поменяем местами цвета c_1 и c_3 в раскраске вершин подграфа G'_{13}. В новой раскраске графа $G - v$ вершины v_1 и v_3 будут иметь одинаковый цвет c_3. Освободившийся цвет c_1 припишем вершине v и получим 5-раскраску графа G.

2. Пусть вершины v_1 и v_3 лежат в одной компоненте связности G'_{13} графа G_{13}. Тогда в графе G'_{13} имеется простая (v_1, v_3)-цепь $v_1 \to \ldots \to$ $\to v_3$ и поэтому в графе G имеется цикл C: $v \to v_1 \to \ldots \to v_3 \to v$.

Внутри области, ограниченной циклом C, лежит либо вершина v_2, либо вершина v_4. Без ограничения общности будем считать, что это вершина v_2 (см. рис. 62).

Тогда нетрудно видеть, что вершины v_2 и v_4 лежат в разных компонентах связности графа G_{24}, т. е. мы пришли к случаю, аналогичному случаю 1), где вершина v_2 играет роль вершины v_1, а вершина v_4 — роль вершины v_3. □

Естественно возникает вопрос: можно ли усилить доказанную теорему, заменив число 5 на число 4? Ответить на этот вопрос в течение приблизительно 100 лет пытались многие известные математики. Гипотезу о том, что любой планарный граф можно раскрасить четырьмя красками, сформулировал в 1879 году английский математик Кели, а доказательство этой гипотезы было получено в 1976 году Хейкеном и Аппелем. Таким образом, справедлива следующая теорема.

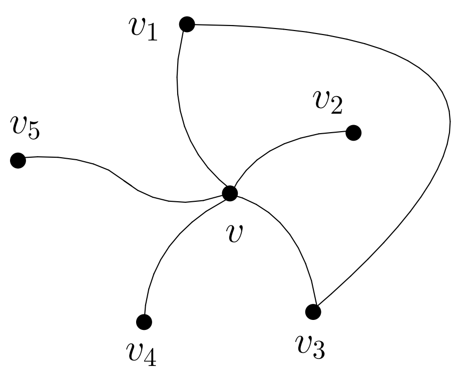


Рис. 62

Теорема 6.4 (Хейкен и Аппель). *Любой планарный граф 4-раскрашиваем.*

Отметим, что доказательство этой теоремы весьма сложно, причем часть доказательства трудно воспроизводима, так как была проведена авторами с помощью компьютера. Конечно, такое доказательство не удовлетворяет многих математиков.

6.2. Хроматические многочлены

Пусть G — обыкновенный граф. Через $P(G, x)$ обозначим *хроматическую функцию*, которая для любого неотрицательного целого числа x принимает значение, равное числу x-раскрасок графа G (при заданном множестве из x красок).

Пример. 1) $P(O_n, x) = x^n$, так как каждую из n вершин нулевого графа O_n можно независимо окрасить в любой из x заданных цветов.

2) $P(K_n, x) = x(x-1)\dots(x-n+1)$, так как первую вершину полного графа K_n можно окрасить в любой из x цветов, вторую — в любой из оставшихся $x - 1$ цветов и т. д.

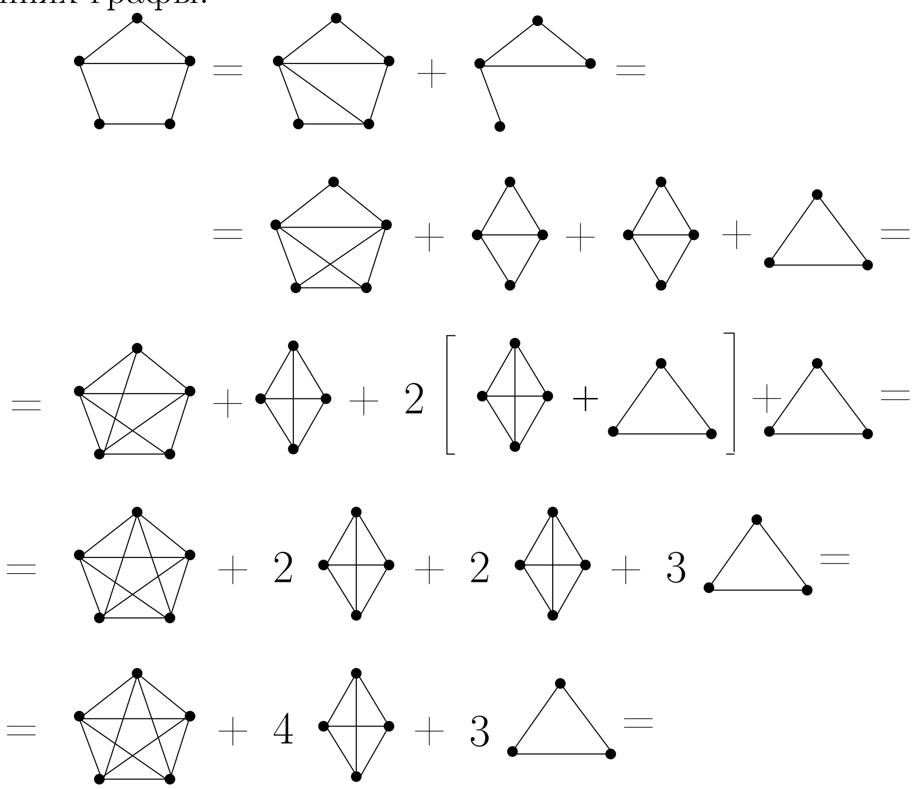
В дальнейшем многочлен $x(x-1)\dots(x-n+1)$ для удобства будем обозначать через $x^{(n)}$ и называть *факториальной степенью* переменной x. В этих обозначениях имеем $P(K_n,x)=x^{(n)}$.

Пусть u и v — две различные несмежные вершины обыкновенного графа G. Через G_1 обозначим граф, полученный из G добавлением нового ребра $e=uv$, а через G_2 — граф, полученный из G отождествлением веришин u, v и отождествлением возникающих при этом кратных ребер.

Лемма 1. $P(G,x)=P(G_1,x)+P(G_2,x)$.

Доказательство. Число x-раскрасок графа G равно сумме числа x-раскрасок графа G, у которых вершины u и v имеют разный цвет, и числа x-раскрасок графа G, у которых вершины u и v имеют одинаковый цвет. Число раскрасок первого типа равно числу x-раскрасок графа G_1, а число раскрасок второго типа — числу x-раскрасок графа G_2. $\square$

Пример. Вычисляя функцию $P(G,x)$ с помощью леммы 1, мы будем опускать символы P, x и изображать только возникающие при вычислениях графы:



$= x^{(5)}+4x^{(4)}+3x^{(3)} = x^5-6x^4+14x^3-15x^2+6x.$

Мы видим, что с помощью леммы 1 для любого обыкновенного n-графа G функцию $P(G,x)$ можно представить в виде суммы хроматических функций полных графов, т. е. в виде многочлена с целыми неотрицательными коэффициентами от факториальных степеней переменной x:

$$P(G,x) = P(K_n,x) + a_1P(K_{n-1},x) + a_2P(K_{n-2},x) + \ldots =$$
$$= x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \ldots .$$

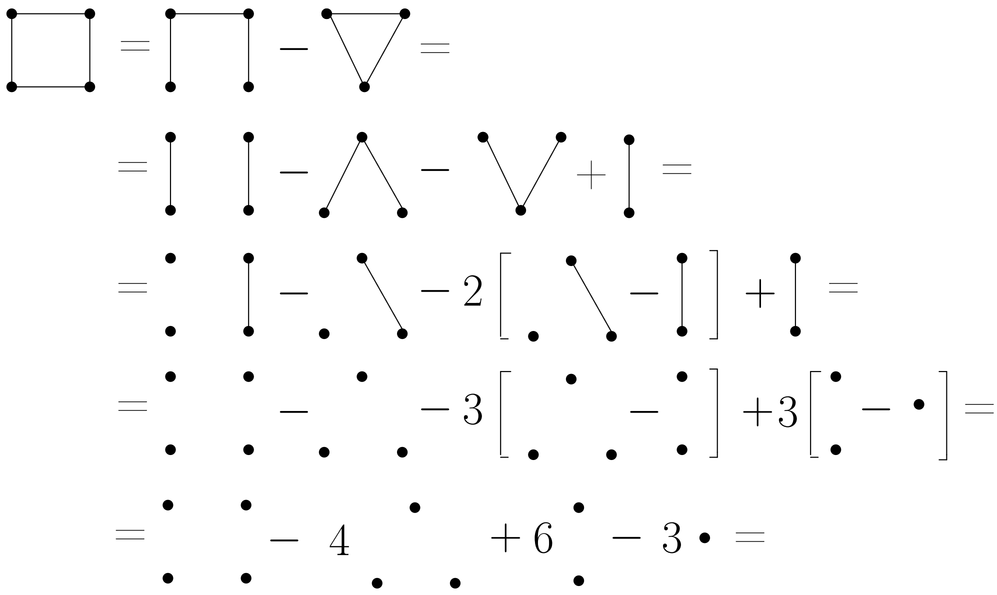
Очевидно, этот многочлен имеет степень n и его старший коэффициент равен 1. Процесс нахождения с помощью леммы 1 соответствующего семейства полных графов будем называть *хроматической редукцией* для графа G.

Из полученного разложения для $P(G,x)$ видно, что хроматическая функция обыкновенного графа является многочленом. Ее называют *хроматическим многочленом* графа G.

Лемму 1 полезно переформулировать еще и в следующем удобном для применений виде.

Лемма 2. $P(G_1,x) = P(G,x) - P(G_2,x)$.

Пример.



$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x.$

Мы видим, что с помощью леммы 2 можно вычислить хроматический многочлен обыкновенного графа сразу по степеням переменной x.

Следующая теорема совершенно очевидна.

Теорема 6.5. *Пусть $G_1,\ldots,G_k$ — множество всех компонент связности графа G. Тогда*

$$P(G,x) = P(G_1,x)\cdot\ldots\cdot P(G_k,x).$$

Теорема 6.6. *Пусть обыкновенный граф G равен объединению двух своих подграфов G_1 и G_2, т. е. $G = G_1 \cup G_2$, причем $H = G_1 \cap G_2$ является полным t-графом для некоторого натурального числа t. Тогда*

$$P(G,x) = \frac{1}{x^{(t)}} \cdot P(G_1,x) \cdot P(G_2,x).$$

Доказательство. Так как H — полный граф, при любой его раскраске все вершины будут иметь разный цвет. В силу симметрии любые две различные x-раскраски графа H могут быть одинаковым числом способов продолжены до x-раскрасок графа G_1. Следовательно, число $P(H,x)$ делит число $P(G_1,x)$ и частное

$$\frac{P(G_1,x)}{P(H,x)}$$

равно числу продолжений произвольной x-раскраски графа H до x-раскрасок графа G_1. Аналогично, частное

$$\frac{P(G_2,x)}{P(H,x)}$$

равно числу продолжений произвольной x-раскраски графа H до x-раскрасок графа G_2.

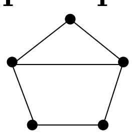
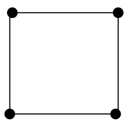
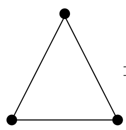
Теперь с учетом равенства $P(H,x) = x^{(t)}$ получаем

$$P(G,x) = x^{(t)} \cdot \frac{P(G_1,x)}{x^{(t)}} \cdot \frac{P(G_2,x)}{x^{(t)}} =$$

$$= \frac{1}{x^{(t)}} \cdot P(G_1,x) \cdot P(G_2,x).$$

□

Пример.

 $= \dfrac{1}{x^{(2)}} \cdot$  $\cdot$  $=$

$$= \frac{1}{x^{(2)}} \cdot (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x) \cdot x^{(3)} = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 15x^2 + 6x.$$

Следствие 1. *Пусть $B_1, \ldots, B_s$ — множество всех блоков неодноэлементного связного обыкновенного графа G. Тогда*

$$P(G,x) = \frac{1}{x^{s-1}} \cdot P(B_1,x) \cdot \ldots \cdot P(B_s,x).$$

Доказательство. Применяем теорему при $t = 1$ последовательно для $s-1$ точек сочленения в качестве H, отщепляя по очереди висячие блоки. □

Следствие 2. *Хроматический многочлен любого неодноэлементного дерева T, имеющего n вершин, равен $x(x-1)^{n-1}$.*

Доказательство. Дерево T имеет $n-1$ двухэлементных блоков, поэтому

$$P(T,x) = \frac{1}{x^{n-2}} \cdot P(K_2,x)^{n-1} = \frac{1}{x^{n-2}}(x^{(2)})^{n-1} =$$
$$= \frac{1}{x^{n-2}} \cdot x^{n-1}(x-1)^{n-1} = x(x-1)^{n-1}.$$

□

Пусть $n \geqslant 3$. Обыкновенный граф будем называть *бесхордным n-циклом*, если все его ребра образуют один цикл длины n и в нем нет изолированных вершин.

Следствие 3. *Хроматический многочлен бесхордного n-цикла равен $(x-1)^n + (-1)^n(x-1)$.*

Доказательство. Обозначим через $P_n(x)$ хроматический многочлен бесхордного n-цикла. В силу леммы 2 имеем

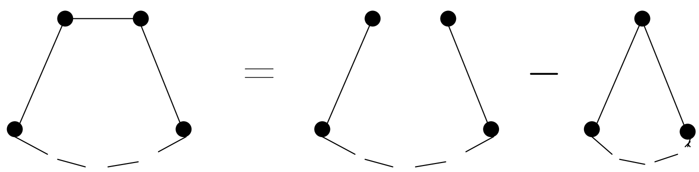


Рис. 63

Следовательно, $P_n(x) = x(x-1)^{n-1} - P_{n-1}(x)$, откуда вытекает

$$P_n(x) - (x-1)^n = (x-1)^{n-1} - P_{n-1}(x).$$

Домножая на $(-1)^n$, получаем

$$(-1)^n(P_n(x) - (x-1)^n) = (-1)^{n-1}(P_{n-1}(x) - (x-1)^{n-1}).$$

Вычисляя эту величину при $n = 3$, получаем

$$(-1)^3(P_3(x) - (x-1)^3) = -(x^{(3)} - (x-1)^3) =$$
$$= -(x(x-1)(x-2) - (x-1)^3) = x - 1.$$

Таким образом, $(-1)^n(P_n(x)-(x-1)^n)=x-1$, откуда получаем

$$P_n(x)=(x-1)^n+(-1)^n(x-1).$$

□

Будем говорить, что обыкновенный граф G является *произведением* $G_1 \otimes G_2$ двух своих вершинно-порожденных подграфов G_1 и G_2, если $VG = VG_1 \cup VG_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ и для любых двух вершин $u \in VG_1$ и $v \in VG_2$ граф G содержит точно одно ребро вида $e = uv$.

Пример.

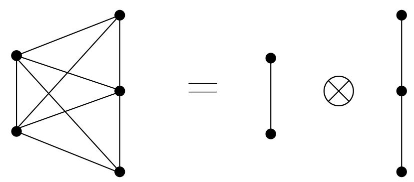


Рис. 64

Пусть $g(x)$ и $h(x)$ — два многочлена с целыми коэффициентами. Через $g(x) \otimes h(x)$ обозначим многочлен, который получается следующим образом. Сначала представляем многочлены $g(x)$ и $h(x)$ в виде многочленов от факториальных степеней переменной x. Затем перемножаем полученные многочлены, действуя с факториальными степенями переменной x, как с обычными степенями. Например,

$$(x^{(3)}+2x^{(2)})\otimes(x^{(2)}+x^{(1)}) = x^{(5)}+2x^{(4)}+x^{(4)}+2x^{(3)} = x^{(5)}+3x^{(4)}+2x^{(3)}.$$

Теорема 6.7. *Если $G = G_1 \otimes G_2$, то*

$$P(G,x) = P(G_1,x) \otimes P(G_2,x).$$

Доказательство. Применяя хроматическую редукцию отдельно к n_1-графу G_1 и отдельно к n_2-графу G_2, мы получаем

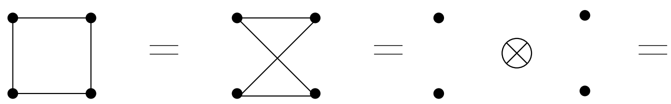
$$P(G_1,x) = P(K_{n_1},x) + a_1P(K_{n_1-1},x) + a_2P(K_{n_1-2}) + \ldots,$$

$$P(G_2,x) = P(K_{n_2},x) + b_1P(K_{n_2-1},x) + b_2P(K_{n_2-2}) + \ldots$$

для некоторых целых чисел $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$.

Если мы применим хроматическую редукцию к графу $G = G_1 \otimes G_2$, то подграфы G_1 и G_2 будут преобразованы как указано выше. На любом этапе хроматической редукции каждая вершина графа, полученного из G_1, будет соединена ребром с каждой вершиной графа, полученного из G_2. Следовательно, в конце концов мы представим хроматический многочлен графа G как сумму хроматических многочленов попарных произведений полных графов из редукции графа G_1 и полных графов из редукции графа G_2. Произведение полного графа K_s на полный граф K_t является полным графом K_{s+t}. В терминах же факториальных степеней имеем $x^{(s)} \otimes x^{(t)} = x^{(s+t)}$. Отсюда теперь вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Пример.



$= x^2 \otimes x^2 = (x^{(2)} + x^{(1)}) \otimes (x^{(2)} + x^{(1)}) =$
$= x^{(4)} + 2x^{(3)} + x^{(2)} = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x.$

Из предыдущего ясно, что очень полезно уметь переходить от факториальных степеней переменной x к ее обычным степеням и наоборот.

В разложении

$$x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} s(n,i)x^i$$

числа $s(n,i)$, где $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $0 \leqslant i \leqslant n$, называют *числами Стирлинга первого рода.* Отметим, что их можно получить, применяя лемму 2 к хроматическому многочлену полного графа K_n (только, к сожалению, эта процедура требует больших временных затрат).

Используя соотношение

$$x^{(n)} = x^{(n-1)}(x - (n-1)) = xx^{(n-1)} - (n-1)x^{(n-1)},$$

нетрудно установить следующие свойства чисел Стирлинга первого рода:

1) $s(n,i) = s(n-1,i-1) - (n-1)s(n-1,i)$ для $0 < i < n$;
2) $s(n,n) = 1$ для $n \geqslant 0$;
3) $s(n,0) = 0$ для $n > 0$.

В разложении

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)x^{(i)}$$

числа $S(n,i)$, где $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $0 \leqslant i \leqslant n$, называют *числами Стирлинга второго рода.* Опять отметим, что их можно получить, применяя лемму 1 к хроматическому многочлену нулевого графа O_n (т. е. применяя хроматическую редукцию к графу O_n). Можно доказать (и это будет сделано в следующем разделе), что число Стирлинга второго рода

$S(n,i)$ равно числу разбиений n-элементного множества на i (непустых) классов.

Числа Стирлинга второго рода обладают следующими свойствами:

1) $S(n,i) = S(n-1,i-1) + iS(n-1,i)$ для $0 < i < n$;

2) $S(n,n) = 1$ для $n \geqslant 0$;

3) $S(n,0) = 0$ для $n > 0$.

Свойства 2) и 3) очевидны, а для доказательства 1) достаточно заметить, что все разбиения множества $\{1,\ldots,n\}$ на i классов бывают двух типов:

a) разбиения, которые имеют одноэлементный класс $\{n\}$ (таких разбиений имеется $S(n-1,i-1)$ штук);

b) все остальные разбиения (число их равно $iS(n-1,i)$), поскольку для их получения надо к произвольному разбиению множества $\{1,\ldots,n-1\}$ на i классов поочередно в каждый класс добавлять элемент n).

6.3. Коэффициенты хроматических многочленов

Пусть G — произвольный обыкновенный (n,m)-граф. В предыдущем разделе было установлено, что хроматический многочлен $P(G,x)$ имеет степень n и его старший коэффициент равен 1. В этом разделе мы продолжим изучение коэффициентов хроматического многочлена.

Теорема 6.8. *Коэффициенты хроматического многочлена составляют знакопеременную последовательность.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу вершин графа. Утверждение очевидно для одноэлементного графа. Пусть оно верно для любого графа, содержащего n вершин. Рассмотрим графы, содержащие $n+1$ вершин. Шаг индукции будем доказывать индукцией по числу ребер графа. Если $(n+1)$-граф не имеет ребер, т. е. является нулевым, то его хроматический многочлен x^{n+1} удовлетворяет доказываемому свойству. Пусть утверждение теоремы верно для любого обыкновенного $(n+1,m)$-графа. Рассмотрим обыкновенный $(n+1,m+1)$-граф G_1 и некоторое его ребро e. Положим $G = G_1 - e$, а через G_2 обозначим граф, полученный из G, отождествлением концов ребра e и образующихся при этом кратных ребер. Тогда по лемме 2 из предыдущего раздела выполняется

$$P(G_1,x) = P(G,x) - P(G_2,x).$$

В силу предположений индукции верны равенства

$$P(G,x) = x^{n+1} - a_1x^n + a_2x^{n-1} - a_3x^{n-2} + \ldots,$$

$$P(G_2, x) = x^n - b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} - \dots$$

для некоторых неотрицательных целых чисел $a_1, a_2, \dots,\ b_1, b_2, \dots$. Из этих двух равенств выводим

$$P(G_1, x) = x^{n+1} - (a_1 + 1)x^n + (a_2 + b_1)x^{n-1} - \dots, \qquad (*)$$

откуда вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Из доказательства видно, что добавление к графу одного нового ребра добавляет 1 к абсолютной величине второго коэффициента хроматического многочлена. Поэтому верно

Следствие 1. *Абсолютная величина второго коэффициента хроматического многочлена равна числу ребер обыкновенного графа.*

Заметим, что для связного обыкновенного n-графа G и любого неотрицательного целого числа x выполняется неравенство

$$P(G, x) \leqslant x(x-1)^{n-1}.$$

В самом деле, возьмем в качестве T некоторый остов графа G. Тогда любая раскраска графа G будет раскраской и графа T (конечно, обратное верно не всегда). Следовательно,

$$P(G, x) \leqslant P(T, x) = x(x-1)^{n-1}.$$

Теорема 6.9. *Обыкновенный n-граф является деревом тогда и только тогда, когда $P(G, x) = x(x-1)^{n-1}$.*

Доказательство. Необходимость условия была установлена в предыдущем разделе. Предположим теперь, что $P(G, x) = x(x-1)^{n-1}$.

Заметим, что свободный член любого хроматического многочлена равен 0, так как число 0-раскрасок равно 0. Поэтому если граф G несвязен, то хроматический многочлен каждой его компоненты связности делится на x и, следовательно, x^2 делит $P(G, x)$, что противоречит нашему предположению. Второй коэффициент многочлена $P(G, x)$ по абсолютной величине равен числу ребер графа и равен в нашем случае $n - 1$.

Таким образом, граф G является деревом, поскольку G — связный $(n, n-1)$-граф. $\square$

Теорема 6.10. *Для связного обыкновенного n-графа G абсолютная величина коэффициента при x^i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, в хроматическом многочлене $P(G, x)$ больше или равна числа сочетаний $\binom{n-1}{i-1}$.*

Доказательство. Возьмем в качестве T некоторый остов графа G. Тогда

$$P(T,x) = x(x-1)^{n-1} = x\sum_{j=o}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(-1)^{n-1-j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n-1}{i-1}x^i.$$

Равенство $(*)$ показывает, что добавление нового ребра к графу не уменьшает абсолютных величин его коэффициентов. Поскольку граф G можно получить из дерева T добавлением новых ребер, осталось воспользоваться найденным видом многочлена $P(T,x)$. $\Box$

Из доказанной теоремы при $i = 1$ вытекает, что для связного обыкновенного графа G абсолютная величина коэффициента при x в хроматическом многочлене $P(G,x)$ больше или равна $\binom{n-1}{0} = 1$. Поскольку свободный член хроматического многочлена равен 0, отсюда на основании теоремы 6.5 получаем

Следствие 1. *Наименьшее число i, для которого отличен от нуля коэффициент при x^i в хроматическом многочлене $P(G,x)$, равно числу компонент связности графа G.*

Иными словами, для любого обыкновенного (n,m,k)-графа G кратность множителя x в хроматическом многочлене $P(G,x)$ равна k.

Перейдем теперь к выводу формул, полезных для исследования коэффициентов хроматического многочлена. Начнем с представления хроматического многочлена через факториальные степени x.

Пусть G — обыкновенный n-граф. Непустое подмножество $U \subseteq VG$ называют *независимым*, если U порождает нулевой подграф, т. е. в графе G нет ребер, соединяющих вершины из U. Через $pt(G,i)$ будем обозначать число разбиений множества вершин графа G на i независимых подмножеств.

Теорема 6.11 (Зыков, 1952). *Для хроматического многочлена любого обыкновенного графа G справедлива формула*

$$P(G,x) = \sum_{i=1}^{n} pt(G,i)x^{(i)}.$$

Доказательство. Подсчитаем число x-раскрасок графа G, в которых используется точно i красок, где $1 \leqslant i \leqslant x$. Чтобы получить такую раскраску сначала одним из $pt(G,i)$ способов выбираем разбиение множества вершин графа G на i независимых множеств, затем берем один из классов и раскрашиваем его вершины в одинаковый цвет одним из x способов, потом берем следующий класс и окрашиваем его вершины в одинаковый цвет любой из $x-1$ оставшихся красок и т. д. Следовательно, число интересующих нас раскрасок графа G равно

$$pt(G,i) \cdot x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-i+1) = pt(G,i) \cdot x^{(i)}.$$

Заметим, при $i > x$ число x-раскрасок, в которых используется точно i красок, равно 0 и при этом $x^{(i)}$ также равно 0. □

Отметим, что для нулевого графа полученное в теореме равенство представляет из себя формулу разложения обычной степени x^n через факториальные степени с числами Стирлинга второго рода в качестве коэффициентов.

Заметим также, что в полученном равенстве наименьшее число i, для которого отличен от нуля коэффициент при $x^{(i)}$, равен хроматическому числу графа G.

Изучим теперь коэффициенты хроматического многочлена в его разложении через обычные степени x.

Теорема 6.12 (Уитни, 1932). *Пусть G — обыкновенный (n,m)-граф. Тогда коэффициент при x^i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, в хроматическом многочлене $P(G,x)$ равен*

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j N(i,j),$$

где $N(i,j)$ — число остовных подграфов графа G, имеющих i компонент связности и j ребер, т. е.

$$P(G,x) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{m}(-1)^j N(i,j))x^i.$$

Доказательство. Применим для подсчета коэффициентов один из широко применяемых принципов комбинаторного анализа — принцип включения-исключения.

Зафиксируем некоторый набор $\mathcal{K}$ из x красок, где x — некоторое натуральное число. Отображение ϕ из VG в $\mathcal{K}$, не являющееся раскраской графа G, будем называть его *несобственной раскраской* (для несобственной раскраски обязательно существует ребро графа, концы которого раскрашены в одинаковый цвет). Конечно, число собственных и несобственных x-раскрасок n-графа G равно x^n.

Возьмем некоторую собственную или несобственную раскраску графа G. Удалим из графа каждое ребро, концы которого раскрашены в разный цвет. Получим остовный подграф H, каждое ребро которого (если таковое имеется) соединяет вершины одинакового цвета. Исходную собственную или несобственную раскраску будем называть *строго несобственной раскраской* остовного подграфа H. Каждой компоненте связности графа H соответствует точно один цвет (это цвет ее вершин), поэтому если остовный подграф H имеет i компонент связности, то имеется x^i различных строго несобственных раскрасок, отвечающих остовному подграфу H.

Заметим, что каждая собственная или несобственная раскраска графа G является строго несобственной раскраской некоторого его остовного подграфа. При этом собственным раскраскам графа G отвечает нулевой остовный подграф.

Обозначим через $N(i,j)$ число остовных подграфов графа G, имеющих i компонент связности и j ребер. Иными словами, это число (n,j,i)-подграфов графа G.

Из общего числа x^n собственных и несобственных раскрасок вычтем сначала число строго несобственных раскрасок тех остовных подграфов, у которых имеется точно одно ребро. Если мы вычтем сумму

$$\sum_i N(i,1)x^i,$$

то мы вычтем указанное число, но вычтем еще и некоторую избыточную величину. Действительно, пусть $e_1 = u_1v_1$ и $e_2 = u_2v_2$ — два различных ребра графа G. Тогда в число строго несобственных раскрасок остовного подграфа, содержащего точно одно ребро e_1, попадут и те, у которых вершины u_2 и v_2 имеют одинаковый цвет, а это — строго несобственные раскраски остовного подграфа, содержащего точно два ребра e_1 и e_2. Более того, их число будет вычтено дважды — один раз для e_1 и один раз для e_2. Аналогично, число строго несобственных раскрасок остовных подграфов, содержащих точно 3, 4 и более ребер, будет вычтено соответствующее число раз.

Чтобы восстановить баланс, мы добавим сумму

$$\sum_i N(i,2)x^i.$$

При этом мы компенсируем двукратное вычитание числа строго несобственных раскрасок, отвечающих остовным подграфам с двумя ребрами, но снова возникнет необходимость компенсации излишне добавленных чисел строго несобственных раскрасок для остовных подграфов с тремя, четырьмя и более ребрами.

Следовательно, число собственных раскрасок графа G равно

$$x^n - \sum_i N(i,1)x^i + \sum_i N(i,2)x^i - \sum_i N(i,3)x^i + \ldots .$$

Так как $N(n,0) = 1$, отсюда вытекает

$$P(G,x) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} (-1)^j N(i,j) x^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=0}^{m} (-1)^j N(i,j)) x^i.$$

□

Отметим, что многие из ранее полученных нами результатов о хроматических многочленах можно легко вывести из доказанной теоремы.

Для подсчета коэффициентов хроматического многочлена $P(G,x)$ в соответствии с доказанной теоремой необходимо перебрать 2^m остовных подграфов графа G. Однако, как установил Уитни, можно существенно уменьшить число перебираемых подграфов.

Зафиксируем некоторую нумерацию ребер обыкновенного графа G натуральными числами от 1 до m, т. е. установим взаимно однозначное соответствие между множествами EG и $\{1,\ldots,m\}$. *Разрушенным циклом* будем называть любую простую цепь, полученную из некоторого цикла графа G удалением ребра с наибольшим номером.

Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 6.13 (Уитни, 1932). *Разложение для хроматического многочлена $P(G,x)$, указанное в предыдущей теореме, сохранится, если $N(i,j)$ считать равным числу (n,j,i)-подграфов n-графа G, не содержащих разрушенных циклов.*

Список литературы

[1] *Абрахамс Д., Каверли Д.* Анализ электрических сетей методом графов.– М.: Мир, 1967.

[2] *Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В.* Потоковые алгоритмы.– М.: Наука, 1975.

[3] *Айгнер М.* Комбинаторная теория.– М.: Мир, 1982.

[4] *Андерсон Дж. А.* Дискретная математика и комбинаторика.– М.: Изд. дом «Вильямс», 2003.

[5] *Асанов М.О.* Дискретная оптимизация.– Екатеринбург: УралНАУКА, 1998.

[6] *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов.– М.: Мир, 1979.

[7] *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Структуры данных и алгоритмы.– М.: Изд. дом "Вильямс 2000.

[8] *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети.– М.: Наука, 1974.

[9] *Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е.* Теория графов.– М.: Высш. шк., 1976.

[10] *Берж К.* Теория графов и ее применения.– М.: ИЛ, 1962.

[11] *Биркгоф Г.* Теория структур. – М:, Наука, 1984.

[12] *Болл У., Коксетер Г.* Математические эссе и развлечения. – М.: Мир, 1986.

[13] *Вирт Н.* Алгоритмы + структуры данных = программы.– М.: Мир, 1985.

[14] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.– М.: Наука, 1966.

[15] *Гретцер Г.* Общая теория решеток.– М.: Мир, 1982.

[16] *Грин Д., Кнут Д.* Математические методы анализа алгоритмов.– М.: Мир, 1987.

[17] *Гудман С., Хидетниеми С.* Введение в разработку и анализ алгоритмов. – М.: Мир, 1981.

[18] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.– М.: Мир, 1982.

[19] *Евстигнеев В.А.* Применение теории графов в программировании.– М.: Наука, 1985.

[20] *Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.* Теория графов: алгоритмы обработки деревьев.– Новосибирск: Наука, 1994.

[21] *Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.* Теория графов: алгоритмы обработки бесконтурных графов.– Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1998.

[22] *Евстигнеев В.А., Мельников Л.С.* Задачи и упражнения по теории графов и комбинаторике.– Новосибирск: Издательство НГУ, 1981.

[23] *Емеличев В.А, Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация.– М.: Наука, 1981.

[24] *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов.– М.: Наука, 1990.

[25] *Замбицкий Д.К., Лозовану Д.Д.* Алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях.– Кишинев: Штиинца, 1983.

[26] *Зыков А.А.* Теория конечных графов.– Новосибирск: Наука, 1969.

[27] *Зыков А.А.* Основы теории графов.– М.: Наука, 1987.

[28] *Камерон П.Дж., ван Линт Дж.Х.* Теория графов, теория кодирования и блок-схемы.– М.: Наука, 1980.

[29] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ.– М.: МЦНМО, 1999.

[30] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. Основные алгоритмы.– М.: Мир, 1976; перераб. издание: М.: Изд. дом «Вильямс», 2000.

[31] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы.– М.: Мир, 1977; перераб. издание: М.: Изд. дом «Вильямс», 2000.

[32] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск.– М.: Мир, 1978; перераб. издание: М.: Изд. дом «Вильямс», 2000.

[33] *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход.– М.: Мир, 1978.

[34] *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику.– М.: Наука, 1975.

[35] *Кук В., Бейз Г.* Компьютерная математика.– М.: Наука, 1990.

[36] *Липский В.* Комбинаторика для программистов.– М.: Мир, 1988.

[37] *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные залачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии.– М.: Мир, 1998.

[38] *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах.– М.: Мир, 1981.

[39] *Миркин Б.Г., Родин С.Н.* Графы и гены.– М.: Наука, 1977.

[40] *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов.– СПб.: Питер, 2000.

[41] *Окулов С.М., Пестов А.А., Пестов О.А.* Информатика в задачах.– Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1998.

[42] *Оре О.* Графы и их применение.– М.: Мир, 1965.

[43] *Оре О.* Теория графов.– М.: Наука, 1980.

[44] *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.– М.: Мир, 1985.

[45] *Папи Ф., Папи Ж.* Дети и графы. – М:, Педагогика, 1974.

[46] *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика.– М.: Мир, 1980.

[47] *Рингель Г.* Теорема о раскраске карт.– М.: Мир. 1977.

[48] *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики.– М.: Наука, 1982.

[49] *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы.– М.: Мир, 1984.

[50] *Сушков Ю.А.* Графы зубчатых механизмов.– Ленинград: Машиностроение, 1983.

[51] *Татт У.* Теория графов.– М.: Мир, 1988.

[52] *Уилсон Р.* Введение в теорию графов.– М.: Мир, 1977.

[53] *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей.– М.: Мир, 1984.

[54] *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях.– М.: Мир, 1966.

[55] *Харари Ф.* Теория графов.– М.: Мир, 1973.

[56] *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисления графов.– М.: Мир, 1977.

[57] *Холл М.* Комбинаторика.– М.: Мир, 1970.

[58] *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов. Теория и приложения.– Киев: Наукова думка, 1984.

[59] Handbook of Theoretical Computer Science. Vol.A: Algorithms and Complexity Theories.– North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1990.

[60] *Read R.C.* An Introduction to Chromatic Polynomials. J. of Comb. Theory, 4, 1968, p. 52-71.

[61] *Tarjan R.E.* Data Structures and Network Algorithms.– Soc. for Idustr. and Applied Math., Philadelphia, Pensylvania, 1983.

[62] *Truemper K.* Matroid Decomposition (Revised Edition).– Leibniz, Plano, Texas, 1998.

[63] *Welsh D.J.A.* Matroid Theory.– New York Acad. Press, 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ