Турниры

Замкнутая орцепь в орграфе G называется *эйлеровой орцепью*, если она содержит все дуги и все вершины орграфа.

Орграф, содержащий эйлерову орцепь, называют *эйлеровым орграфом*.

Иными словами, эйлеров орграф — это связный орграф, в котором имеется замкнутый ормаршрут, проходящий точно один раз через каждую его дугу.

Замечание. Связный орграф является эйлеровым орграфом iff, когда для любой его вершины полустепени исхода и захода совпадают.

Гамильтоновой орцепью орграфа называется его незамкнутая простая орцепь, которая проходит через каждую его вершину точно один раз.

Орцикл орграфа, проходящий через каждую его вершину, называется ***гамильтоновым орциклом***.

Орграф называется ***полугамильтоновым***, если он обладает гамильтоновой орцепью, и — ***гамильтоновым***, если он обладает гамильтоновым орциклом.

О гамильтоновых орграфах в целом известно не очень много. Приведем без доказательства аналог теоремы Дирака.

Теорема 1 (Гуйя–Ури)**.** Пусть G — орсвязный n-орграф. Если все полустепени исхода и захода его вершин $\geqslant n/2$, то G — гамильтонов орграф.

Гуйя-Ури и исследования Л.Н. Шеврина и Н.Д. Филиппова (характеризация графов сравнимости ч. у. множеств в 1962 г.).

Турниром называется орграф, основание которого есть полный граф, т. е. любые две его различные вершины соединены точно одной дугой (точно в одном из направлений) и нет петель.

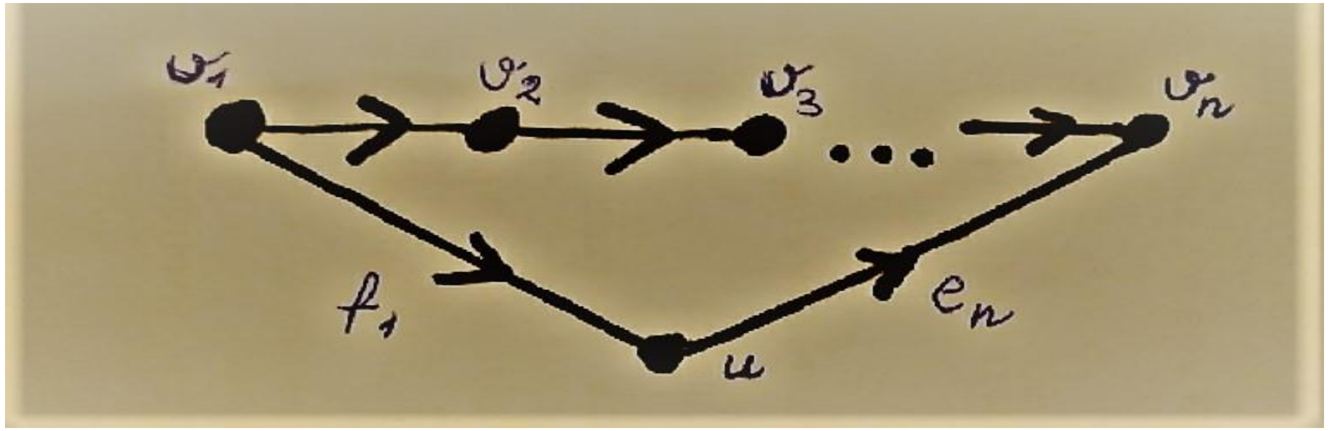
Турнир может иметь ***источник*** (или ***сток***), т. е. вершину, в которой дуги только выходят (соответственно заходят), поэтому турнир может и не гамильтоновым.

Теорема 3.15 (Редеи (1934), Камион (1959))**.** 1) *Любой турнир полугамильтонов.* 2) *Любой орсвязный турнир гамильтонов.*

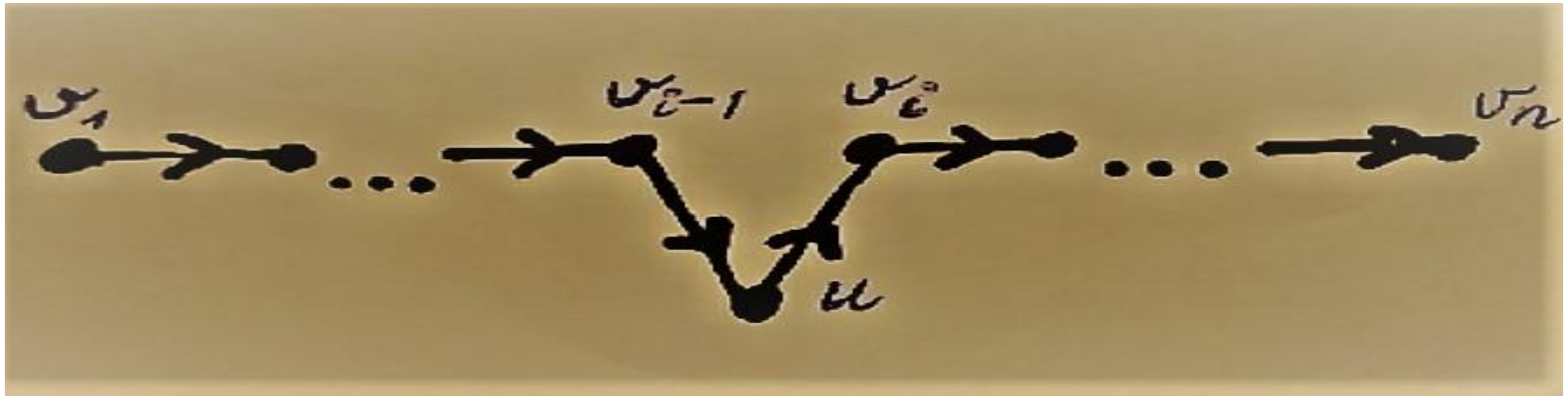
Доказательство. 1) Утверждение очевидно для турнира, содержащего менее трех вершин.

Предположим по индукции, что любой турнир на n вершинах полугамильтонов. Рассмотрим произвольный турнир G, имеющий $n+1$ вершин, где $n \geqslant 2$, и произвольную вершину u в нем. По предположению индукции турнир $G-u$ полугамильтонов, т. е. в нем существует гамильтонова орцепь $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$. Если в G имеется дуга $e_1 = uv_1$ или дуга $f_n = v_nu$, то турнир G полугамильтонов.

Поэтому можно считать, что в G присутствуют дуги $f_1 = v_1u$ и $e_n = uv_n$.



В гамильтоновой орцепи турнира $G - u$ возьмем первую вершину v_i, для которой в G имеется дуга $e_i = uv_i$. В силу выбора вершины v_i в G имеется дуга $f_{i-1} = v_{i-1}u$.

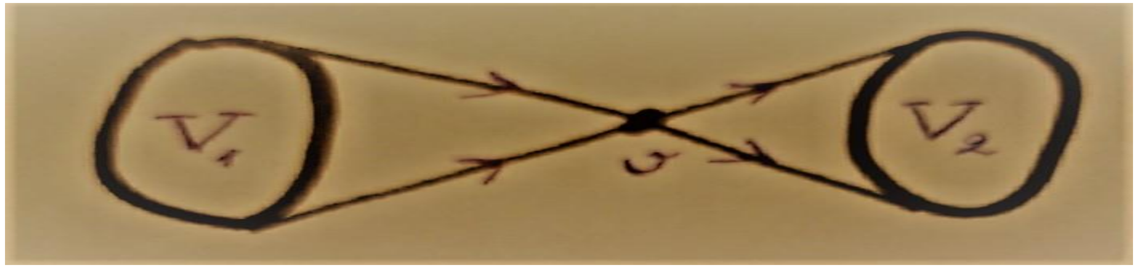


Тогда в турнире G получаем гамильтонову орцепь $v_1 \rightarrow \cdot\ \cdot\ \cdot \rightarrow v_{i-1} \rightarrow u \rightarrow v_i \rightarrow \cdot\ \cdot\ \cdot \rightarrow v_n$.

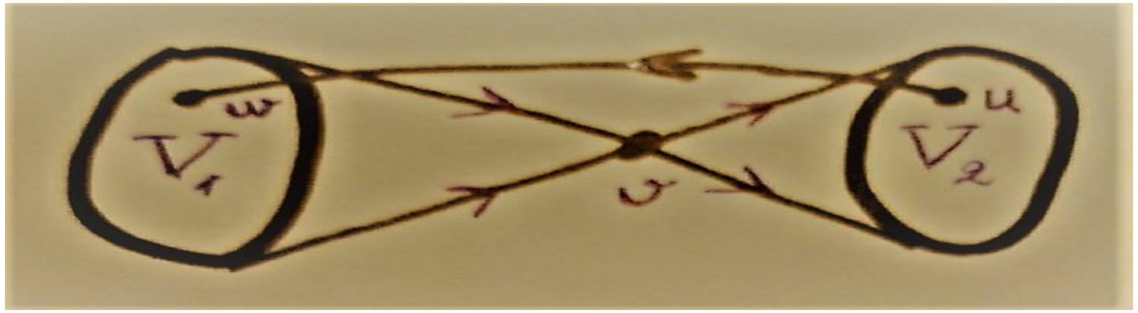
2) Будем доказывать более сильное утверждение: **любой неодноэлементный орсвязный турнир G на n вершинах содержит орциклы длины 3, 4, . . . , n.**

Заметим, что в силу орсвязности турнира $n \geq 3$.

Возьмем в турнире G произвольную вершину v. Множество вершин турнира $G - v$ распадается на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2:



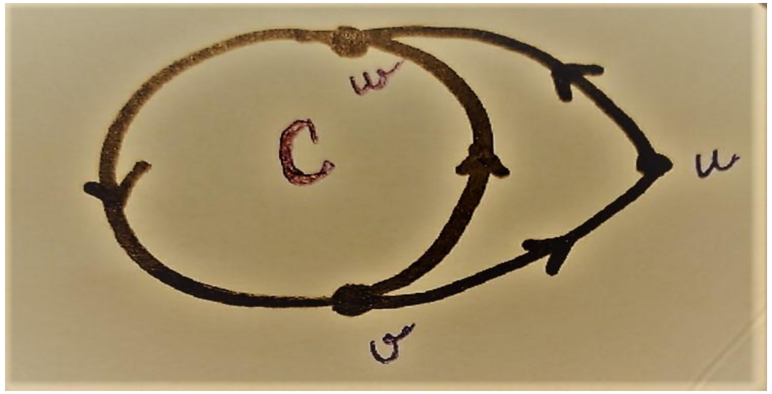
В силу орсвязности $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ и существует дуга $u \to w$, где $u \in V_2$ и $w \in V_1$.



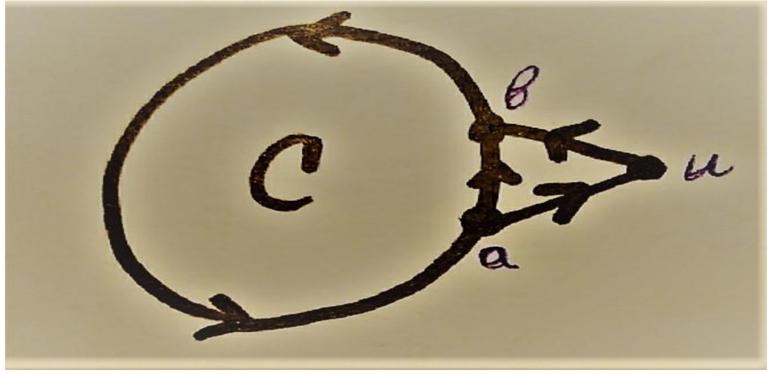
Поэтому в G имеется треугольник $v \to u \to w \to v$.

Предположим теперь, что в G имеется орцикл C: $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_t \to v_1$ длины t, где $3 \le t < n$. **Покажем, что в G имеется орцикл длины $t + 1$**. Положим $U = VG \setminus VC$.

Пусть в U имеется вершина u такая, что в G имеются дуги $v \to u$ и $u \to w$, для которых $v, w \in VC$ и $v \neq w$:

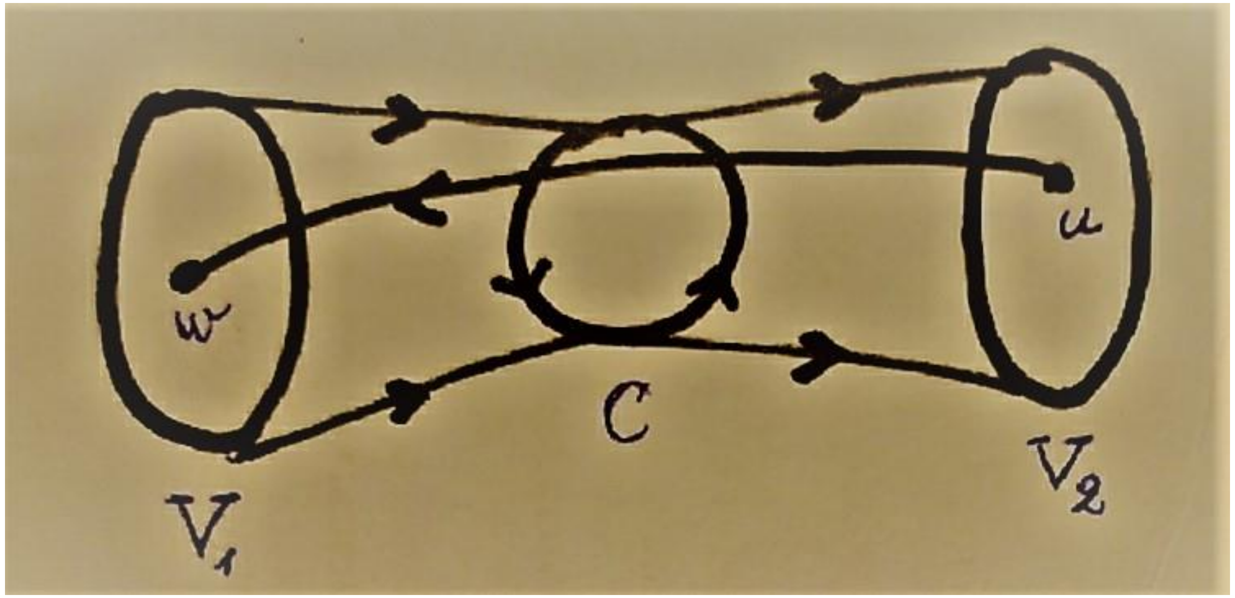


Рассмотрим на цикле C орцепь от v до w. Рассуждая также, как в доказательстве 1), получим на этой орцепи две соседние вершины a и b с разными направлениями дуг относительно u:



Теперь очевидно, что в G имеется (t + 1)-орцикл.

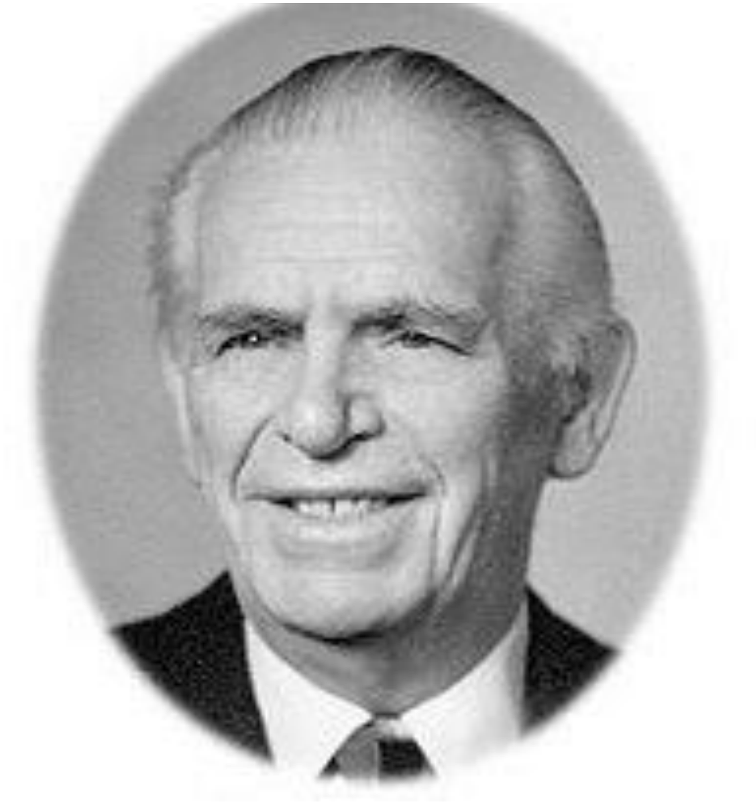
Теперь можно считать, что множество U распадается на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2:



В силу орсвязности $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ и существует дуга $u \to w$, где $u \in V_2$ и $w \in V_1$.
Поэтому в G имеется (t + 1)-орцикл:

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{t-1} \longrightarrow u \to w \longrightarrow v_1$$

Теорема доказана.



László Rédei	
Born	15 November 1900 Rákoskeresztúr, Austria-Hungary
Died	21 November 1980 (aged 80) Budapest, Hungary
Nationality	Hungarian
Fields	Mathematics

Honoris causa

Совместные работы

- по абелевым группам с Н.Ф. Сесекиным и

- с А.Н. Трахтманом