Полумодулярные решетки

Условие Жордана-Дедекинда

Решеткой называется алгебра L с двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$ такими, что для выполняется любых a, b, $c \in L$

1) $a \wedge a = a$, 1′) $a \vee a = a$,
2) $a \wedge b = b \wedge a$, 2′) $a \vee b = b \vee a$,
3) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, 3′) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
4) $a \wedge (a \vee b) = a$, 4′) $a \vee (a \wedge b) = a$.

В решетке L можно ввести отношение частичного порядка $\leqslant$, полагая для a, $b \in L$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Отметим, что $a \wedge b$ и $a \vee b$ являются соответственно точной нижней и точной верхней границами для элементов a и b относительно $\leqslant$, т.е. L, $\leqslant$ - решеточно упорядоченное множество.

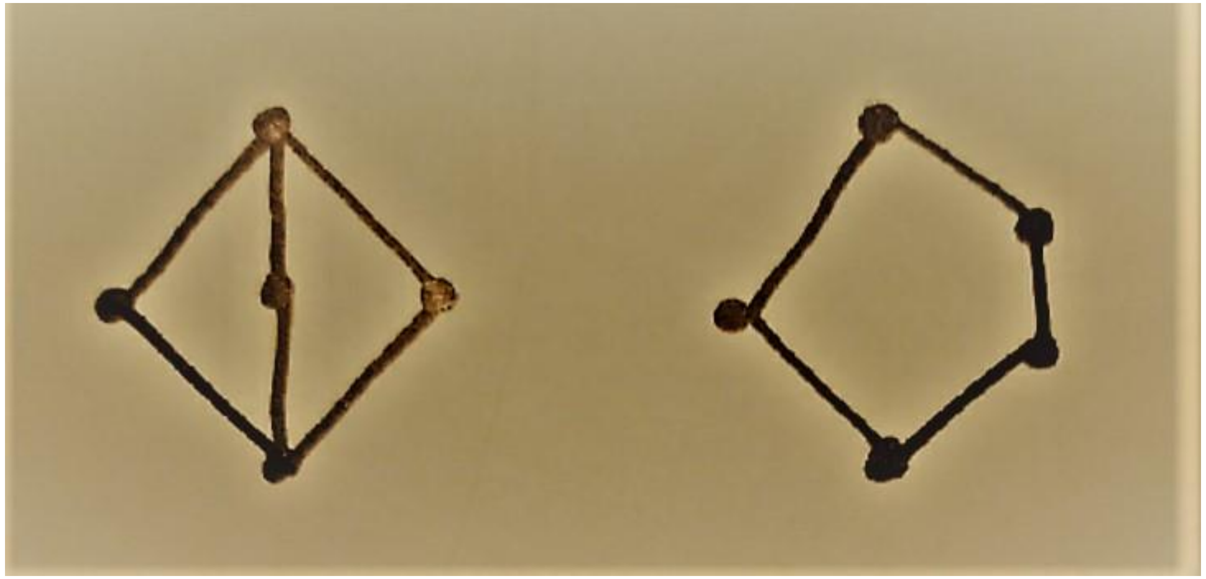
Решетка L, ∧, ∨ ***дистрибутивна***, если для любых a, b, $c \in L$ выполняется

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

или, что эквивалентно, для любых a, b, $c \in L$ выполняется

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Решетка L, ∧, ∨ дистрибутивна iff, когда она не содержит бриллиантов и пентагонов в качестве подрешеток.



Решетка L, ∧, ∨ ***модулярна***, если для любых a, b, $c \in L$ выполняется

$$a \geq b \to a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c).$$

Решетка L, ∧, ∨ модулярна iff, когда она не содержит пентагонов в качестве подрешеток.

Модулярность – это ослабленная дистрибутивность: для любых a, b, $c \in L$ выполняется

$$a \, \sigma \, b \to a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot (a \odot c),$$

где σ – отношение сравнимости в L, ⊙ - любая из операций ∧ или ∨, ⊙ - операция ∧ или ∨, отличная от ⊙.

Для произвольного векторного пространства V над телом F решетка Sub V модулярна.

Пусть L – решетка, $a, b \in L$ и $a \leq b$. Подрешетка

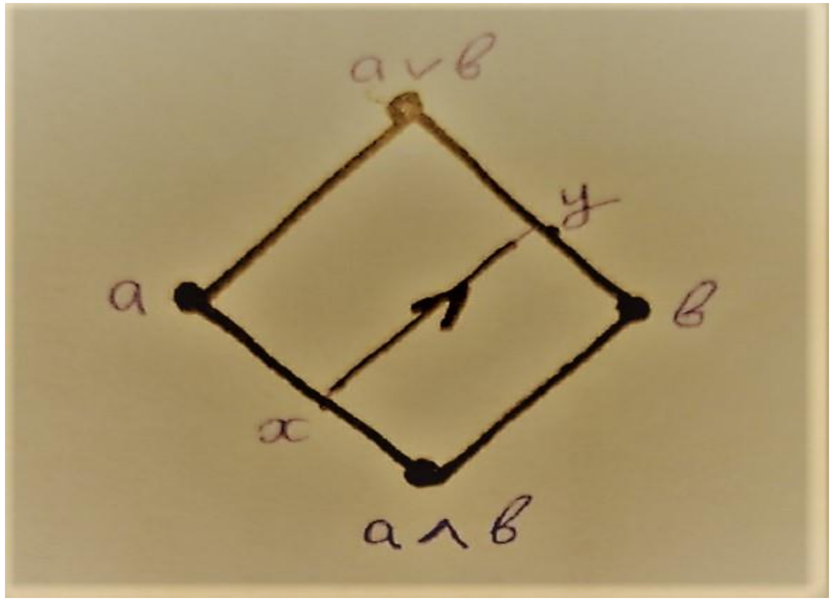
$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in L | \, a \leq x \leq b\}$$

называется ***интервалом*** решетки L.

Лемма 1. Для любых элементов a и b модулярной решетки L интервалы

$$[a \wedge b, a] \text{ и } [b, a \vee b]$$

изоморфны.

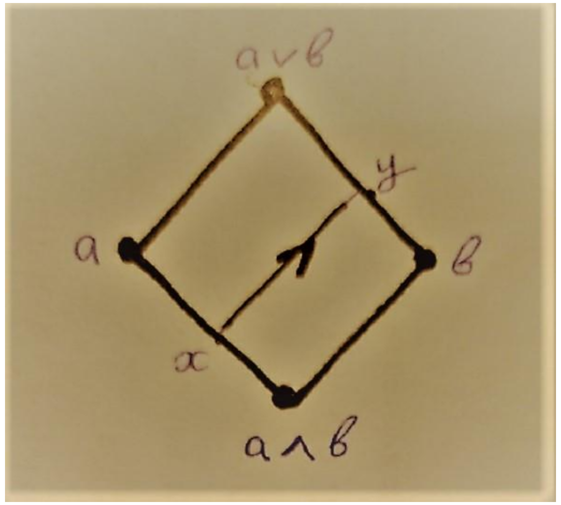


Доказательство. Определим отображение ϕ

из $[a \wedge b, a]$ в $[b, a \vee b]$

и отображение ψ

из $[b, a \vee b]$ в $[a \wedge b, a]$,



полагая
$\phi(x) = x \vee b$ ($x \in [a \wedge b, a]$),
$\psi(y) = y \wedge a$ ($y \in [b, a \vee b]$).

Заметим, что

$$a \wedge b \leqslant x \leqslant a \Rightarrow b = (a \wedge b) \vee b \leqslant \phi(x) \leqslant a \vee b$$

и

$$b \leqslant y \leqslant a \vee b \Rightarrow a \wedge b \leqslant \psi(y) \leqslant a \wedge (a \vee b) = a.$$

Далее, для любого $x \in [a \wedge b, a]$ выполняется

$$\psi\phi(x) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (a \wedge b) = x,$$

т. е. $\psi\phi$ тождественно на $[a \wedge b, a]$ и, аналогично, $\phi\psi$ тождественно на $[b, a \vee b]$.

Следовательно, ϕ и ψ — две взаимно обратные биекции.

Кроме того, ϕ и ψ сохраняют отношение $\leqslant$:

$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \leqslant \phi(x_2),$$

$$y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \psi(y_1) \leqslant \psi(y_2)$$

Для любых $x_1, x_2 \in [a \wedge b, a]$ и $y_1, y_2 \in [b, a \vee b]$.

Отсюда следует, что ϕ — изоморфизм подрешетки $[a \wedge b, a]$ на подрешетку $[b, a \vee b]$.

Лемма 1 доказана.

Через $<\cdot$ будем обозначать **отношение покрытия** в решетке L , т.е. мы полагаем

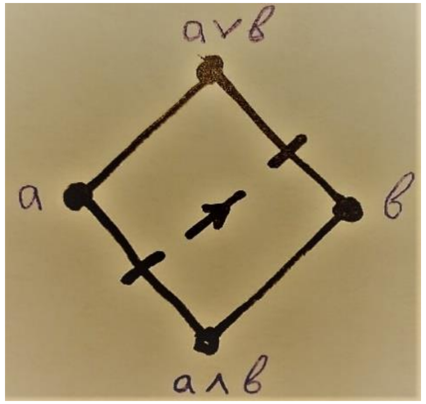
$$a <\cdot\, b,$$

если $a < b$ и интервал $[a, b]$ двухэлементен.

Решетка L называется ***полумодулярной (вверх)***, если

$$a \wedge b \lessdot a \Rightarrow b \lessdot a \vee b$$

для любых $a, b \in L$.



В силу леммы 1 любая модулярная решетка полумодулярна.
В частности решетка Sub V подпространств любого векторного пространства V над телом F полумодулярна.

Будем говорить, что решетка L, в которой все цепи конечны, удовлетворяет **условию Жордана–Дедекинда,** если для любых элементов $a, b \in L$ таких, что $a < b$, все максимальные (a, b)-цепи в L имеют одинаковую длину, т. е. всегда из условий

$$a = u_0 \lessdot u_1 \lessdot \ldots \lessdot u_m = b \text{ и } a = v_0 \lessdot v_1 \lessdot \ldots \lessdot v_n = b$$

вытекает $m = n$.

Теорема 1. *Любая полумодулярная решетка, в которой все цепи конечны, удовлетворяет условию Жордана–Дедекинда.*

Камилл Жордан (1838 - 1922), Рихард Дедекинд (1831 - 1916)

Доказательство. Будем доказывать следующее утверждение:

Для любых a, $b \in L$ таких, что $a < b$, если какая-либо максимальная (a, b)-цепь имеет длину m, то любая максимальная (a, b)-цепь имеет длину m.

При $m = 1$ имеем $a <\cdot\ b$ и утверждение очевидно.

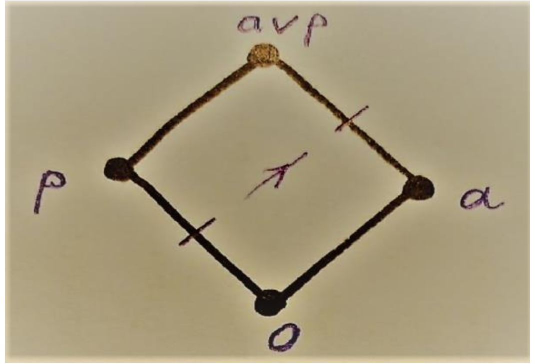
Пусть утверждение верно для любого интервала, имеющего максимальную цепь длины меньшей m, и $m \geqslant 2$. Рассмотрим две максимальные (a, b)-цепи:

$$a = u_0 <\cdot\ u_1 <\cdot\ \ldots <\cdot\ u_m = b \text{ и } a = v_0 <\cdot\ v_1 <\cdot\ \ldots <\cdot\ v_n = b.$$

В силу предположения индукции мы можем считать, что $n \geqslant m$. Если $u_1 = v_1$, то, применяя предположение индукции к интервалу $[u_1, b]$, получаем $m - 1 = n - 1$, т.е. $m = n$. Пусть $u_1 \neq v_1$. В силу полумодулярности выполняется $u_1, v_1 <\cdot\ u_1 \vee v_1$. Любая максимальная (u_1, b)-цепь по предположению индукции имеет длину $m - 1$. Следовательно, любая максимальная $(u_1 \vee v_1, b)$-цепь имеет длину $m - 2$. Отсюда следует, что любая максимальная (v_1, b)-цепь имеет длину $m-1$. Тогда $m - 1 = n - 1$, т. е. опять имеем $m = n$ и **теорема доказана**.

Далее под отношением $\leqslant\!\cdot$ на решетке L будем понимать объединение отношения покрытия $<\!\cdot$ и отношения равенства $=$.

В дальнейшем мы будем рассматривать решетки, обладающие наименьшим элементом, который будем называть ***нулем*** и будем обозначать через 0. ***Атомом*** будем называть элемент решетки, покрывающий ее наименьший элемент 0.

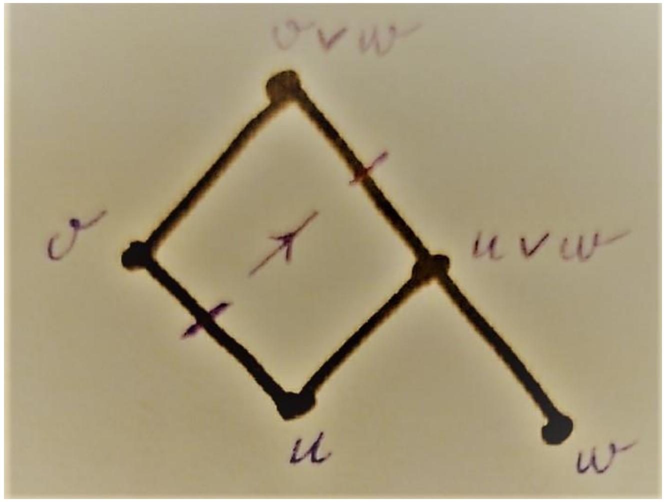


Лемма 2. Пусть L — полумодулярная решетка с нулем 0. Тогда
1) для любых $u, v, w \in L$ выполняется

$$u <\!\cdot\, v \to u \vee w \leqslant\!\cdot\, v \vee w,$$

2) для любого $a \in L$ и атома p, не лежащего под a, выполняется

$$a <\!\cdot\, a \vee p.$$



Доказательство. Если $v \leqslant u \vee w$, то $u \vee w = (u \vee w) \vee v = v \vee w$.

Пусть v не лежит под $u \vee w$. Тогда $u = v \wedge (u \vee w)$, так как $u <\!\cdot\, v$, и $v \vee (u \vee w) = v \vee w$. Отсюда в силу полумодулярности получаем $u \vee w <\!\cdot\, v \vee w$.

Лемма доказана.

Пусть L — полумодулярная решетка с нулем 0, в которой все цепи конечны.

Через $\dim a$ будем обозначать длину максимальной $(0, a)$-цепи. Это определение корректно в силу теоремы 1. Функцию $\dim x$ будем называть ***функцией размерности*** на решетке L.

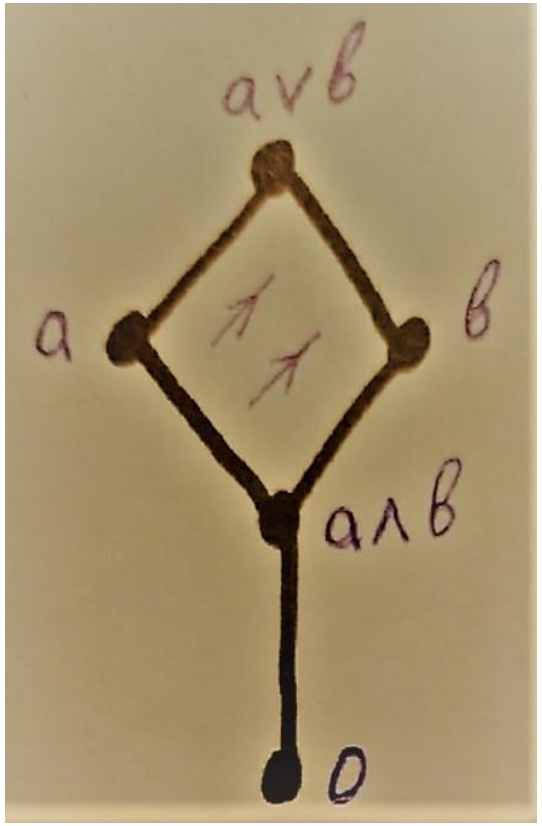
Теорема 2. Пусть L — полумодулярная решетка с нулем 0, в которой все цепи конечны. Тогда

1) для любых $a, b \in L$ выполняется

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) \leqslant \dim a + \dim b;$$

2) решетка L модулярна в том и только в том случае, когда для любых $a, b \in L$ выполняется

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) = \dim a + \dim b.$$



Доказательство. 1) Пусть $a \wedge b = u_0 <\cdot\ u_1 <\cdot\ \ldots <\cdot\ u_m = a$. Объединяя все элементы этой цепи с b, в силу леммы 2 получаем $b = u_0 \vee b \leqslant\cdot\ u_1 \vee b \leqslant\cdot\ \ldots \leqslant\cdot\ u_m \vee b = a \vee b$. Отсюда следует $\dim a - \dim(a \wedge b) = m \geqslant \dim(a \vee b) - \dim b$, т. е. $\dim a + \dim b \geqslant \dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b)$.

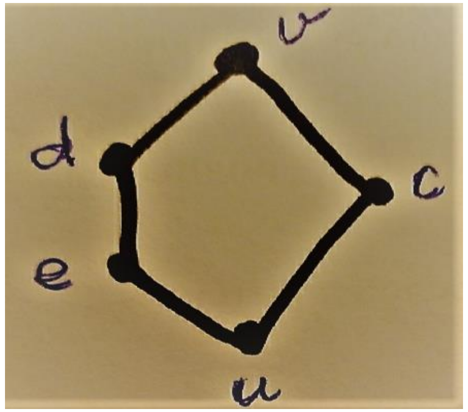
2) Если решетка модулярна, то интервалы $[a \wedge b, a]$ и $[b, a \vee b]$ изоморфны по лемме 1. Следовательно,

$$\dim a - \dim(a \wedge b) = \dim(a \vee b) - \dim b.$$

Обратно, предположим, что для любых $a, b \in L$ выполняется равенство

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) = \dim a + \dim b.$$

Пусть, от противного, L - не модулярная решетка. Тогда, как известно, она содержит пентагон в качестве подрешетки. Для элементов пентагона в силу нашего предположения получаем



$$\dim u + \dim v = \dim c + \dim \mathrm{e},$$
$$\dim u + \dim v = \dim c + \dim \mathrm{d},$$

т. е. $\dim \mathrm{e} = \dim \mathrm{d}$, что невозможно, **теорема доказана**.

Неравенство из 1) называют ***неравенством полумодулярности***.

Пример. Пусть V — конечномерное векторное пространство над телом F. Тогда решетка $\mathrm{Sub}\, V$ — модулярная решетка с нулем, в которой все цепи конечны, и $\dim U$ — обычная размерностью подпространства U. $\mathrm{Sub}\, V$ удовлетворяет условию Жордана–Дедекинда, а равенство из 2) — формула для размерности суммы и пересечения подпространств.