КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ
И МАТРОИДЫ

Неодноэлементная решетка L называется ***конечномерной геометрической решеткой***, если она

1) **полна** (существуют точная нижняя $\wedge A$ и $\vee A$ точная верхняя границы любого множества A ее элементов (возможно бесконечного));

2) **не содержит бесконечных цепей**;

3) **точечна (**любой её элемент представим в виде объединения некоторого (возможно бесконечного) множества атомов);

4) **полумодулярна**.

В силу полноты решетка L имеет наименьший 0 и наибольший 1 элементы, для которых выполняется $0 = \vee\, \emptyset$ и $1 = \wedge\, \emptyset$. Действительно, любой элемент $a \in L$ является верхней границей для $\emptyset$, поскольку для любого $x \in L$ верна импликация:

$$x \in \emptyset \ \rightarrow\ x \leq a.$$

Аналогично, любой элемент $a \in L$ является нижней границей для $\emptyset$.

Пример. Решетка Sub V – конечномерная геометрическая решетка для конечномерного векторного пространства V над телом F.

Решетка L называется ***решеткой с дополнениями***, если она имеет наименьший элемент 0, наибольший элемент 1 и для любого $u \in L$ существует $v \in L$ такой, что

$$u \wedge v = 0 \text{ и } u \vee v = 1.$$

Элемент v называют тогда ***дополнением*** элемента u.

Решетка называется ***решеткой с относительными дополнениями***, если любой ее интервал есть решетка с дополнениями.

Теорема 1. Любая конечномерная геометрическая решетка является решеткой с относительными дополнениями.

Теорема 2. Любой интервал конечномерной геометрической решетки является конечномерной геометрической решеткой.

Доказательство. Очевидно, нужно проверить лишь точечность интервала. Пусть в решетке L выполняется $a < c \leqslant b$. Тогда $c = \bigvee_{i \in I} p_i$ для некоторых атомов p_i ($i \in I$) решетки L. Очевидно, среди указанных атомов существует атом p_j, не лежащий под a. Будем считать, что для $j \in J \subseteq I$ атомы p_j не лежат под a и $p_k \leqslant a$ для $k \in I \setminus J$. Тогда по лемме 2 предыдущего раздела элементы $p_j \vee a$ являются атомами в интервале $[a, b]$ для $j \in J$ и

$$c = c \vee a = (\bigvee_{i \in I} p_i) \vee a = \bigvee_{i \in I} (p_i \vee a) = (\bigvee_{j \in J} (p_j \vee a)) \vee a = \bigvee_{j \in J} (p_j \vee a).$$

Теорема доказана.

Пусть E — непустое множество. Отображение φ: $A \to \langle A \rangle$ множества $\mathcal{P}(E)$ всех подмножеств множества E в себя называется ***оператором замыкания***, если для любых $A, B \subseteq E$ выполняется:

1) $\boldsymbol{A \subseteq \langle A \rangle}$ (направленность),
2) $\boldsymbol{A \subseteq B \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle}$ (монотонность),
3) $\boldsymbol{\langle\langle A \rangle\rangle = \langle A \rangle}$ (идемпотентность, здесь $\phi^2 = \phi$).

Подмножество $A \subseteq E$ называется ***замкнутым***, если $A = \langle A \rangle$.

Лемма 1. Пересечение любого семейства замкнутых подмножеств замкнуто.

Доказательство. Пусть A_i $(i \in I)$ — семейство замкнутых подмножеств. Тогда в силу монотонности $\langle \cap_i A_i \rangle \subseteq \langle A_j \rangle = A_j$ для любого $j \in I$. Отсюда получаем $\langle \cap_i A_i \rangle \subseteq \cap_i A_i$, т. е. $\cap_i A_i = \langle \cap_i A_i \rangle$ в силу направленности оператора замыкания.

Лемма доказана.

Через **Sub *E*** обозначим множество всех замкнутых подмножеств оператора замыкания на E. В силу направленности $E \in \mathrm{Sub}E$.

Следствие 1. $\mathrm{Sub}E$ — полная решетка относительно $\subseteq$.

Доказательство. В $\mathrm{Sub}E$ существует точная нижняя граница для любого семейства элементов – это их пересечение, а также имеется наибольший элемент E (как мы отметили, удобно считать, что наибольший элемент есть пересечение пустого семейства элементов). Хорошо известно, что в таком случае частично упорядоченное множество является полной решеткой (т. е. существует и точная верхняя граница для любого семейства элементов).

Очевидно, $\wedge\{A_i \mid i \in I\} = \cap_{\,i\in I} A_i$ и $\vee\{A_i \mid i \in I\} = \langle \cup_{\,i\in I} A_i \rangle$ и, в частности,

$$A \wedge B = A \cap B \text{ и } A \vee B = \langle A \cup B \rangle$$

в решетке $\mathrm{Sub}\, E$.

Пример. Пусть V — векторное пространство над телом F. Через $\langle A\rangle$ обозначим линейную оболочку множества $A \subseteq V$. Очевидно, $A \to \langle A\rangle$ $(A \subseteq V)$ — оператор замыкания на V, а решетка $\mathrm{Sub}\, V$ подпространств пространства V и есть решетка замкнутых подмножеств.

Матроидом или ***комбинаторной предгеометрией*** $M(E)$ называется непустое множество E вместе с оператором замыкания $A \to \langle A \rangle$ $(A \subseteq E)$ такое, что

4) (аксиома **замены**) для любых $p, q \in E$ и $A \subseteq E$ выполняется

$$q \notin \langle A \rangle \text{ и } q \in \langle A \cup p \rangle \ \to \ p \in \langle A \cup q \rangle;$$

5) (аксиома **существования конечного базиса**) для любого $A \subseteq E$ существует такое конечное множество $B \subseteq A$, что $\langle B \rangle = \langle A \rangle$.

Матроид $M(E)$ называется **обыкновенным** или **комбинаторной геометрией**, если выполняется

6) $\langle \emptyset \rangle = \emptyset$ и $\langle \{p\} \rangle = \{p\}$ для любого $p \in E$.

В дальнейшем мы будем часто отождествлять множество $\{p\}$ с его элементом p, что не вызовет недоразумений, и будем писать $\langle p \rangle = p$.

Замкнутые подмножества матроида $M(E)$ будем называть его **листами** или **подпространствами**.

Ясно, что $\langle \emptyset \rangle$ — наименьший лист, а E — наибольший лист в решетке листов $\mathrm{Sub}\, E$ матроида $M(E)$.

Лемма 2. Пусть A — лист матроида $M(E)$ и $p \in E \setminus A$. Тогда $A \subset\cdot \langle A \cup p \rangle$ в решетке Sub$E$ листов матроида $M(E)$.

Доказательство. Очевидно, $A \subset \langle A \cup p \rangle$. Пусть B — такой лист, что $A \subset B \subseteq \langle A \cup p \rangle$. Возьмем элемент $q \in B \setminus A$. Тогда $q \in E \setminus A = E \setminus \langle A \rangle$ и $q \in \langle A \cup p \rangle$. Откуда в силу аксиомы замены получаем $p \in \langle A \cup q \rangle \subseteq B$, т. е. $A \cup p \subseteq B$. Следовательно, $\langle A \cup p \rangle \subseteq B$ и поэтому $B = \langle A \cup p \rangle$.

Следствие 2. Если $p \in E \setminus \langle \emptyset \rangle$, то $\langle p \rangle$ — атом решетки Sub$E$.

Далее будем рассматривать
конечные геометрические решетки (точечные и полумодулярные) и
конечные матроиды (аксиомы оператора замыкания 1) - 3) и аксиома замены 4).

Следующую теорему сформулируем и докажем для конечных матроидов. Её аналог верен и для произвольных матроидов.

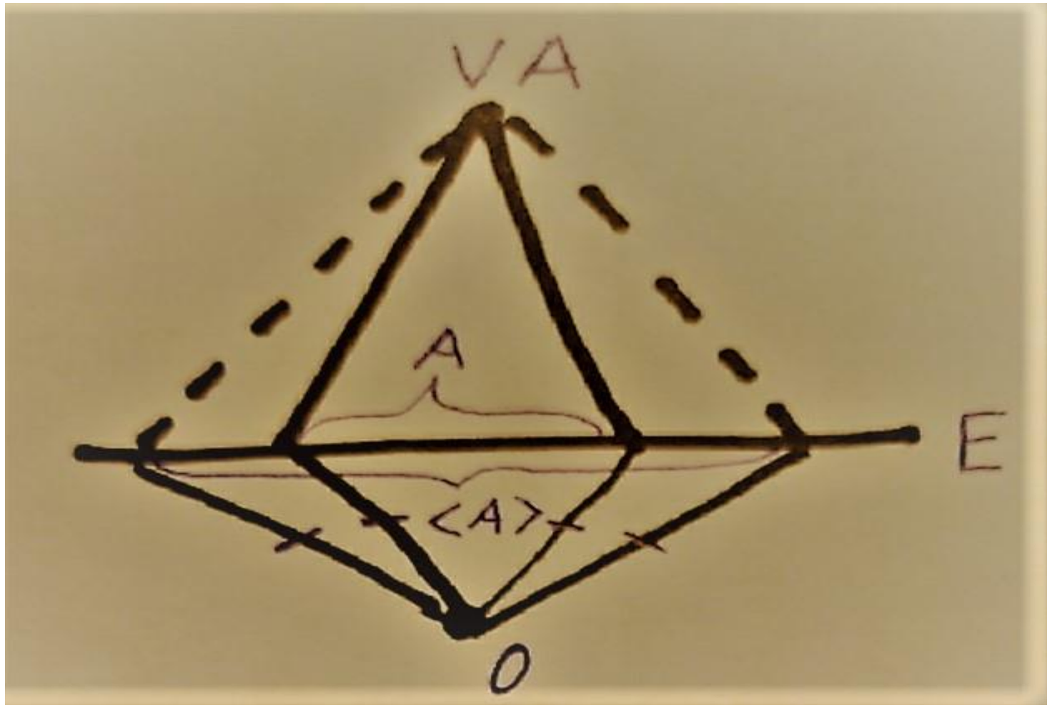
Теорема 3 (Биркгоф и Уитни).

1) Решетка листов конечного матроида является конечной геометрической решеткой.

2) Пусть L — конечная геометрическая решетка и E — множество её атомов. Для каждого $A \subseteq E$ положим

$$\langle A \rangle = \{p \in E \mid p \leqslant \vee A\}.$$

Тогда множество E вместе с отображением $A \to \langle A \rangle$ является обыкновенным конечным матроидом, решетка листов которого изоморфна L.

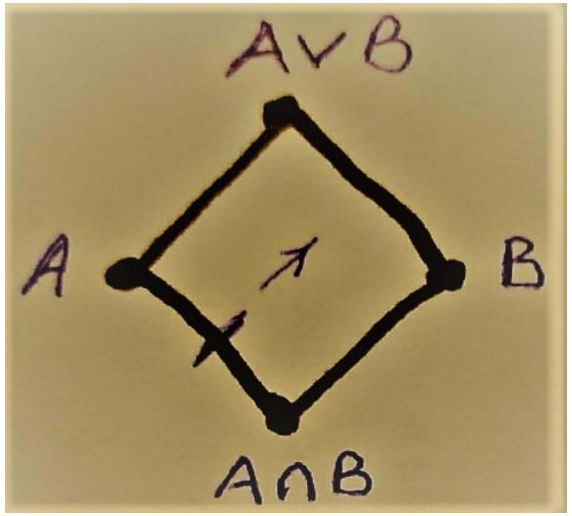


Доказательство. 1) Рассмотрим решетку Sub E листов конечного матроида $M(E)$. Проверим её точечность и полумодулярность.

Она точечная, так как

$$A = \vee\{\langle p\rangle \mid p \in A \setminus \langle\emptyset\rangle\}$$

для любого $A \in \mathrm{Sub}\ E$ и по следствию 2 элементы $\langle p\rangle$, где $p \in A \setminus \langle\emptyset\rangle$, есть атомы решетки Sub$E$.



Покажем, что решетка Sub E полумодулярна. Пусть A, B – листы и $A \cap B \subset\cdot A$. Возьмем элемент $p \in A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$. Тогда $A = \langle (A \cap B) \cup p\rangle$. Отсюда получаем

$$A \vee B = \langle A \cup B\rangle = \langle B \cup p\rangle$$

и $B \subset\cdot \langle B \cup p\rangle$ по лемме 2, т. е. $B \subset\cdot A \vee B$.

2) Легко проверить, что отображение $A \rightarrow \langle A\rangle$ $(A \subseteq E)$ является оператором замыкания на множестве атомов E конечной геометрической решетки L.

Проверим, что выполняется аксиома замены.

Пусть $q \in E \setminus \langle A \rangle$ и $q \in \langle A \cup p \rangle$ для некоторых $p, q \in E$ и $A \subseteq E$.

Тогда в решетке L элемент q не лежит под элементом $\vee A$ и $q \leqslant (\vee A) \vee p$. Из этих условий вытекает, что элемент p не лежит под элементом $\vee A$. Тогда в силу полумодулярности и леммы 2 из предыдущего раздела получаем

$$\vee A \lessdot (\vee A) \vee p \text{ и } \vee A \lessdot (\vee A) \vee q \leqslant (\vee A) \vee p.$$

Следовательно, $(\vee A) \vee q = (\vee A) \vee p$ и поэтому $p \leqslant (\vee A) \vee q$, т. е. $p \in \langle A \cup q \rangle$.

Итак, множество E вместе с оператором замыкания $A \to \langle A \rangle$ $(A \subseteq E)$ является конечным матроидом.

Поскольку

$$\langle \emptyset \rangle = \{p \in E \mid p \leqslant \vee\emptyset = 0\} = \emptyset$$

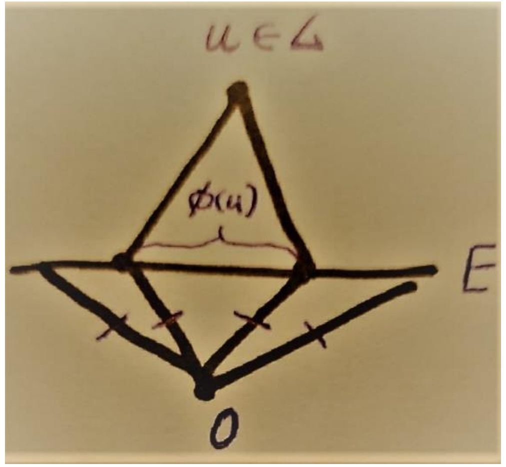
и

$$\langle p \rangle = \{q \in E \mid q \leqslant p\} = p,$$

этот матроид является обыкновенным.

Рассмотрим теперь отображение ϕ решетки L в решетку Sub E:

$$\phi(u) = \{p \in E \mid p \leqslant u\}.$$



Поскольку $u = \vee\phi(u)$, имеем $\langle\phi(u)\rangle = \phi(u)$, т.е. $\phi(u)$ – лист и ϕ действительно отображает L в Sub E.

Если A – лист, то $\phi(\vee A) = \{p \in E \mid p \leqslant \vee A\} = \langle A \rangle = A$, поэтому ϕ сюрьективно.

Так как $u = \vee\, \phi(u)$ для любого u из L, отображение ϕ инъективно.

Таким образом, ϕ – биекция L на Sub E.

Если $u \leqslant v$ в L, то $\phi(u) \subseteq \phi(v)$ и, обратно, если $\phi(u) \subseteq \phi(v)$, то $u = \vee\, \phi(u) \leqslant \vee\, \phi(v) = v$.

Таким образом, ϕ — изоморфизм решетки L на решетку Sub E.

Теорема доказана.

В силу этой теоремы существует естественное взаимно однозначное соответствие между конечными обыкновенными матроидами и неодноэлементными конечными геометрическими решетками.

В решетке $\mathrm{Sub}\, E$ листов матроида $M(E)$ в силу ее полумодулярности и отсутствия бесконечных цепей определена функция размерности. Листы размерности 1, 2 и 3 будем называть соответственно **точками**, **прямыми** и **плоскостями**.

В заключение этого раздела обсудим без доказательства строение **модулярных** конечномерных геометрических решеток.

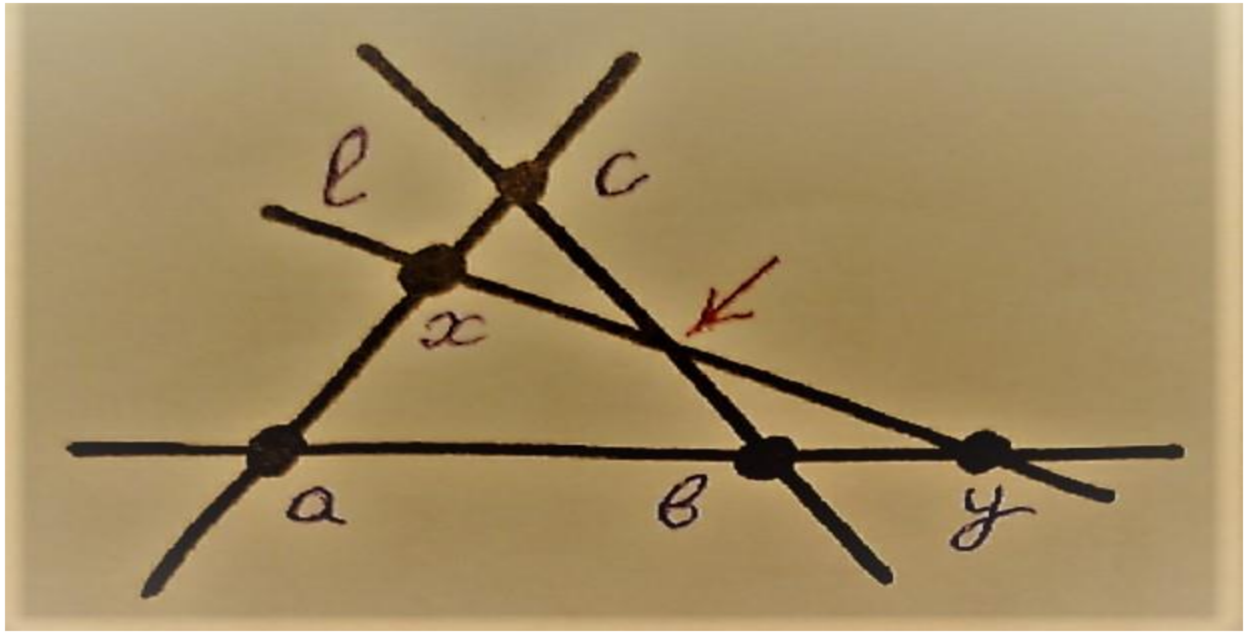
Пример. Пусть V — n-мерное векторное пространство над телом F. Решетка $\mathrm{Sub}\, V$ подпространств пространства V является конечномерной геометрической решеткой, поэтому по теореме Биркгофа–Уитни ей отвечает некоторый обыкновенный матроид, который называют ***векторной проективной геометрией*** $PG(n-1, F)$ над телом F.

Пусть $\mathcal{U}$ — некоторое непустое множество элементов, называемых **точками**, а $\mathscr{L}$ — некоторое семейство подмножеств из $\mathcal{U}$, называемых **прямыми**. Множество точек $\mathcal{U}$ и прямых $\mathscr{L}$ называется **проективной геометрией**, если

1) через любые две различные точки проходит точно одна прямая;

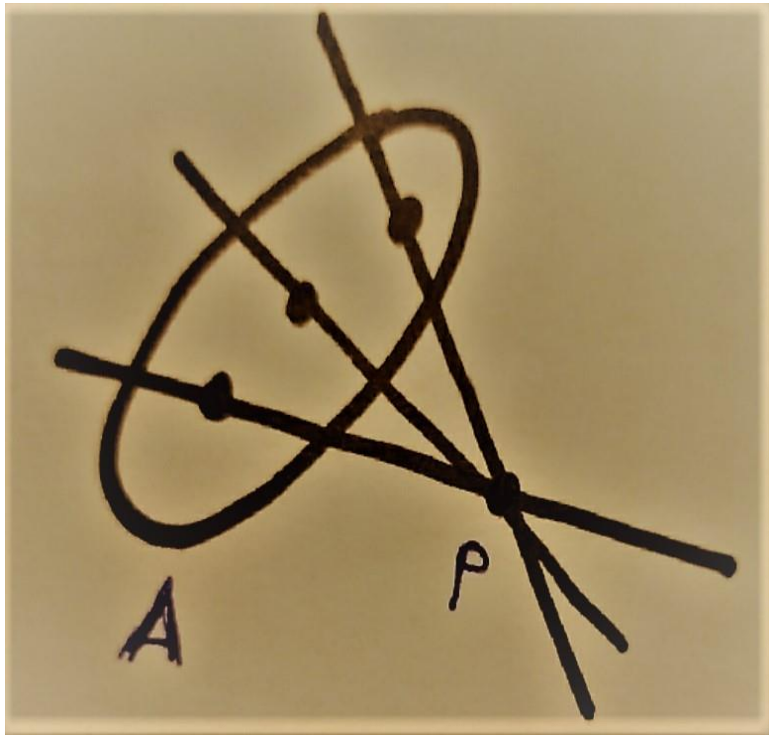
2) любая прямая содержит не менее трех различных точек;

3) (**аксиома Па'ша**) если три точки a, b, c образуют треугольник, т. е. не лежат на одной прямой, и некоторая прямая l пересекает две стороны треугольника, но не в точках a, b, c, то она пересекает и третью сторону треугольника.



Подпространством A проективной геометрии называется такое её множество точек, которое вместе с любыми двумя различными точками из A содержит и прямую, проходящую через них.

Введем понятие **g-размерности** или **геометрической размерности** для подпространств проективной геометрии. По определению точки имеют g-размерность 0, а прямые — g-размерность 1. Пусть A – произвольное подпространство g-размерности k p – точка, не лежащая в A. Объединим все прямые, проходящие через p и точки из A. Получим, как нетрудно установить, подпространство. Это подпространство по определению имеет g-размерность k+1. Можно проверить, что понятие g-размерности введено корректно.



Добавим к трем аксиомам еще одну аксиому:
4) $\mathcal{U}$ имеет конечную g-размерность.
Если $\mathcal{U}$ имеет g-размерность m, то говоря т, что проективная геометрия ($\mathcal{U}$,$\mathcal{L}$) имеет **g-размерность m.**

Пересечение любого семейства подпространств проективной геометрии, очевидно, является подпространством. Поэтому множество $\operatorname{Sub}\mathcal{U}$ всех подпространств проективной геометрии $(\mathcal{U}, \mathscr{L})$ является полной решеткой относительно теоретико-множественного включения.

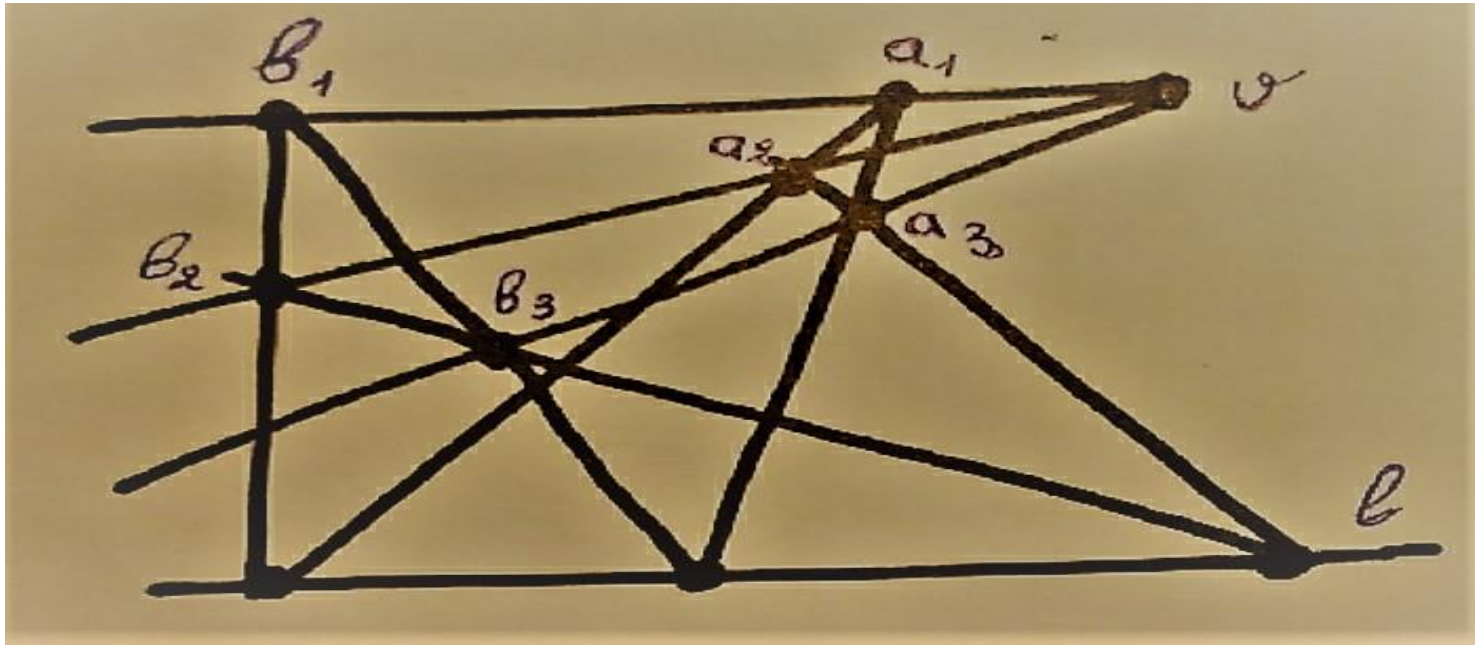
Теорема 4. $\operatorname{Sub}\mathcal{U}$ — модулярная конечномерная геометрическая решетка для любой проективной геометрии $(\mathcal{U}, \mathscr{L})$.

Теорема 5. Любая проективная геометрия g-размерности $m > 2$ изоморфна векторной проективной геометрии $PG(m, F)$ для некоторого тела F.

Для проективных плоскостей, т. е. проективных геометрий g-размерности 2, справедлива следующая

Теорема 6. Проективная плоскость изоморфна векторной проективной геометрии $PG(2, F)$ для некоторого тела F тогда и только тогда, когда она удовлетворяет аксиоме Дезарга:

если два треугольника a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 перспективны относительно некоторой точки v (т. е. для любого $i = 1, 2, 3$ прямая, проходящая через a_i и b_i, проходит и через v), то точки пересечения соответственных сторон треугольника лежат на некоторой прямой l.



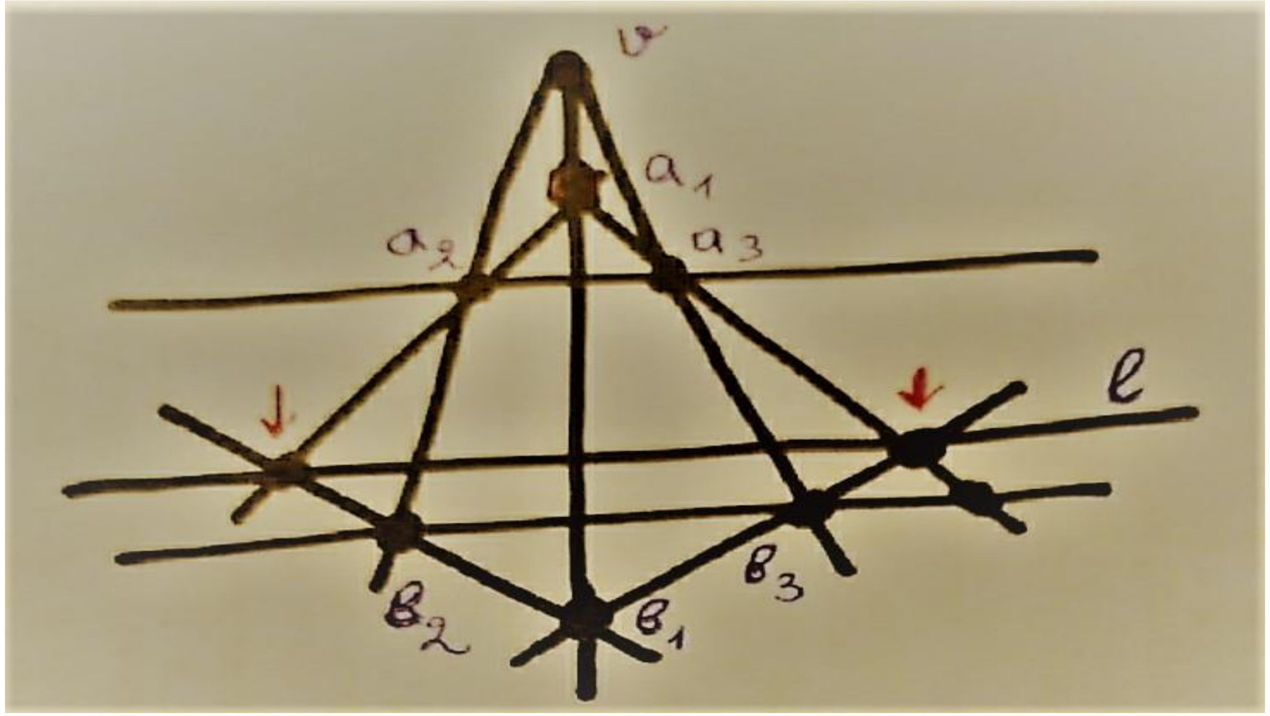
Если для обычной евклидовой плоскости расширить

1)множество точек, добавив семейство несобственных точек по одной для каждого пучка параллельных прямых,

2) каждую прямую, добавив несобственную точку пучка параллельных ей прямых,

3) множество прямых, добавив одну несобственную прямую, состоящую из всех несобственных точек,

то получим дезаргову (т. е. удовлетворяющую аксиоме Дезарга) проективную плоскость.



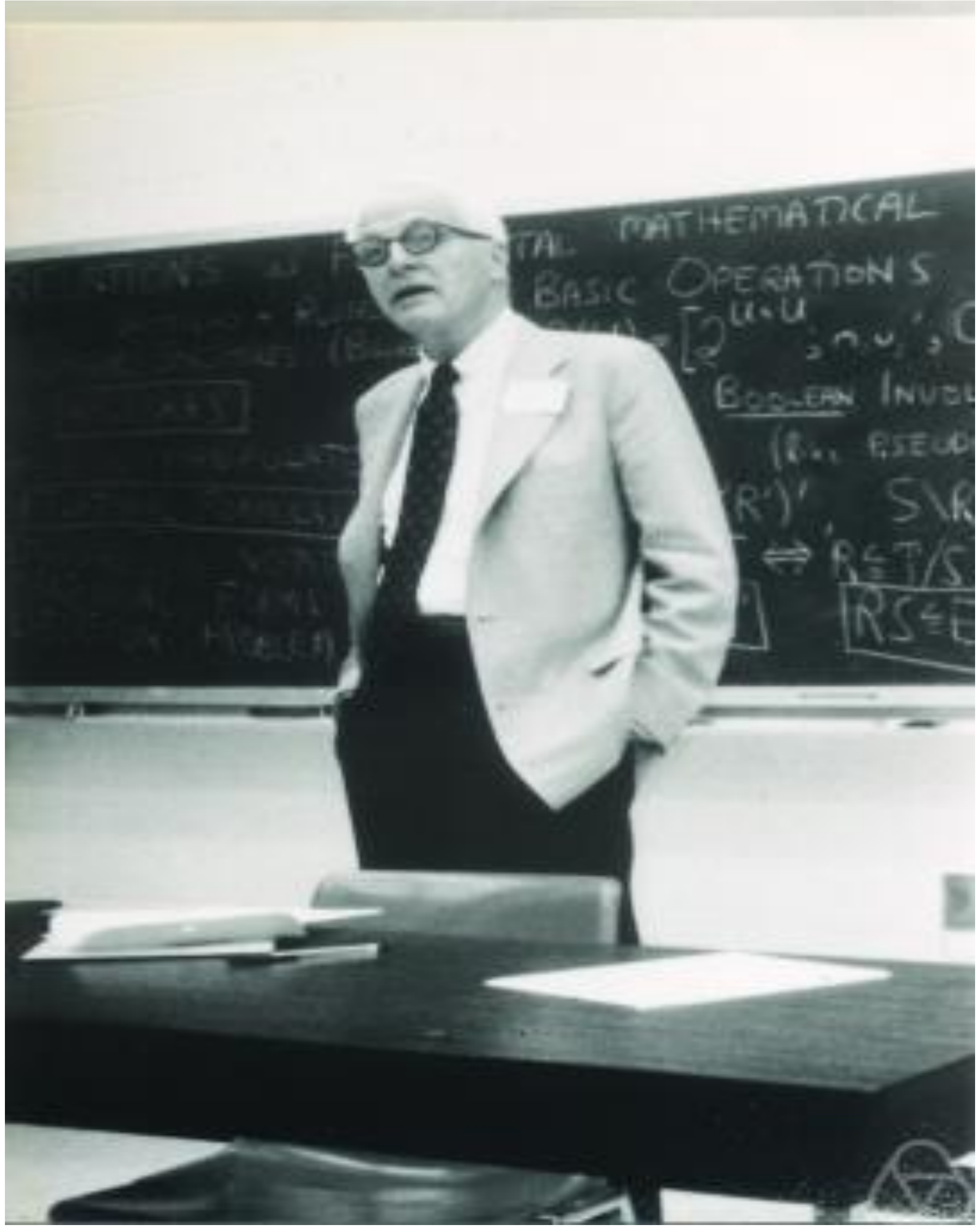
Теорема 7 (Биркгоф). Модулярные конечномерные геометрические решетки исчерпываются прямыми произведениями конечного числа решеток вида Sub $\mathcal{U}$ для проективных геометрий $(\mathcal{U}, \mathscr{L})$.

$$L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_t, \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_t)$$

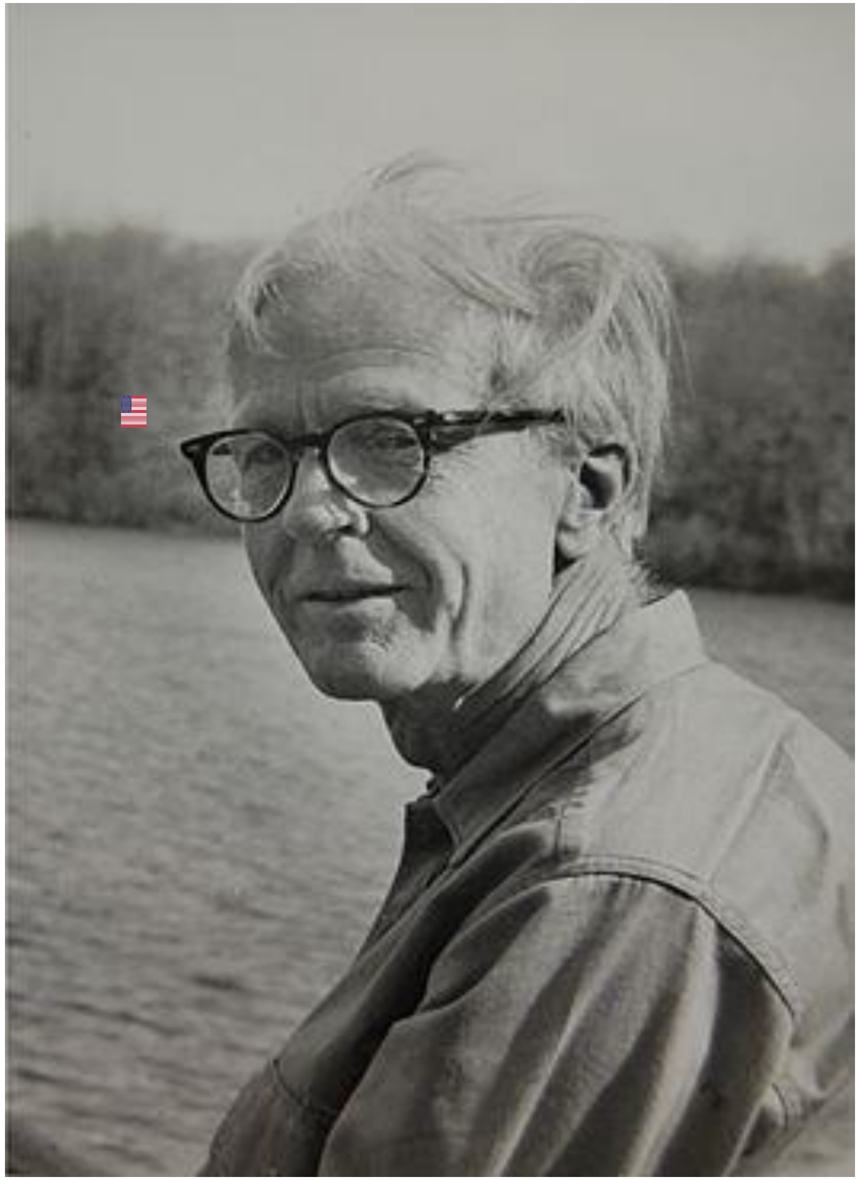
В силу предыдущих теорем фигурирующие здесь прямые множители Sub $\mathcal{U}$ представляют из себя решетки подпространств конечномерных векторных пространств над телами, за исключением случаев, когда $(\mathcal{U}, \mathscr{L})$ — недезарговы проективные плоскости.

Открытая проблема. К настоящему времени ещё не получено полной классификации недезарговых проективных плоскостей.

Отметим также, что дистрибутивные конечномерные геометрические решетки исчерпываются конечными булевыми алгебрами.



Гаррет Биркгоф	
Garrett Birkhoff	
Дата рождения	19 января 1911
Место рождения	•Принстон, Мёрсер, Нью-Джерси, США
Дата смерти	22 ноября 1996 (85 лет)
Место смерти	•Уотер-Милл, Нью-Йорк
Страна	• США
Научная сфера	алгебра и решётки
Место работы	•Гарвардский университет
Альма-матер	•Гарвардский университет •Принстонский университет
Научный руководитель	Филипп Холл



Хасслер Уитни	
Дата рождения	23 марта 1907
Место рождения	Нью-Йорк, США
Дата смерти	10 мая 1989 (82 года)
Место смерти	Mount Dents Blanches, Швейцария
Страна	• США
Научная сфера	математика
Место работы	•Принстонский университет •Гарвардский университет
Альма-матер	Йельский университет
Научный руководитель	Д. Д. Биркгоф