

**МАРШРУТЫ  
ЦИКЛЫ И РАЗРЕЗЫ**

*Маршрутом* в графе  $G$  называется чередующаяся последовательность вершин и ребер

$$v_0, e_1, v_1, \dots, v_{t-1}, e_t, v_t,$$

в которой  $e_i = v_{i-1}v_i (1 \leq i \leq t)$ .

Такой маршрут кратко называют  $(v_0, v_t)$ -*маршрутом* и говорят, что он соединяет  $v_0$  с  $v_t$ ;

$v_0, v_t$  — концевые вершины маршрута.

Часто маршрут изображают в виде:

$$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & & e_2 & & & e_{i-1} \\ v_0 & \rightarrow & v_1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & v_t. \end{array}$$

Стрелки здесь указывают лишь порядок следования вершин в маршруте.

*Длиной маршрута* называют количество содержащихся в нем ребер. Случай, когда длина маршрута равна нулю, не исключается; в этом случае маршрут сводится к одной вершине.

Заметим, что в обыкновенном графе маршрут полностью определяется последовательностью  $v_0, v_1, \dots, v_t$  своих вершин. Если  $v_0 = v_t$ , то маршрут называется **замкнутым**.

**Цепь** — это маршрут, в котором не повторяются ребра.

Цепь называется **простой цепью**, если в ней нет повторяющихся вершин кроме, быть может, совпадающих концевых вершин.

Замкнутая простая цепь называется **циклом**. Заметим, что цикл полностью определяется множеством своих ребер, поэтому под циклом более правильно понимать множество его ребер.

**Петля** — это цикл длины 1, пара кратных ребер образует цикл длины 2. Циклы длины 3 называют обычно **треугольниками**.

**Лемма 1.** Если для некоторых вершин  $u, v$  в графе существует  $(u, v)$ -маршрут, то существует и простая  $(u, v)$ -цепь.

**Доказательство.** Рассмотрим в графе  $(u, v)$ -маршрут наименьшей длины. Покажем, что этот маршрут является простой цепью. Если в нем имеется повторяющаяся вершина  $w$ , то, заменяя часть маршрута от первого вхождения вершины  $w$  до ее второго вхождения на одну вершину  $w$ , мы получим более короткий  $(u, v)$ -маршрут.

Граф  $G$  называется *связным*, если для любых двух различных вершин  $u, v$  существует  $(u, v)$ -маршрут.

На множестве вершин  $VG$  произвольного графа  $G$  определим **отношение связности**  $\sim$ , полагая

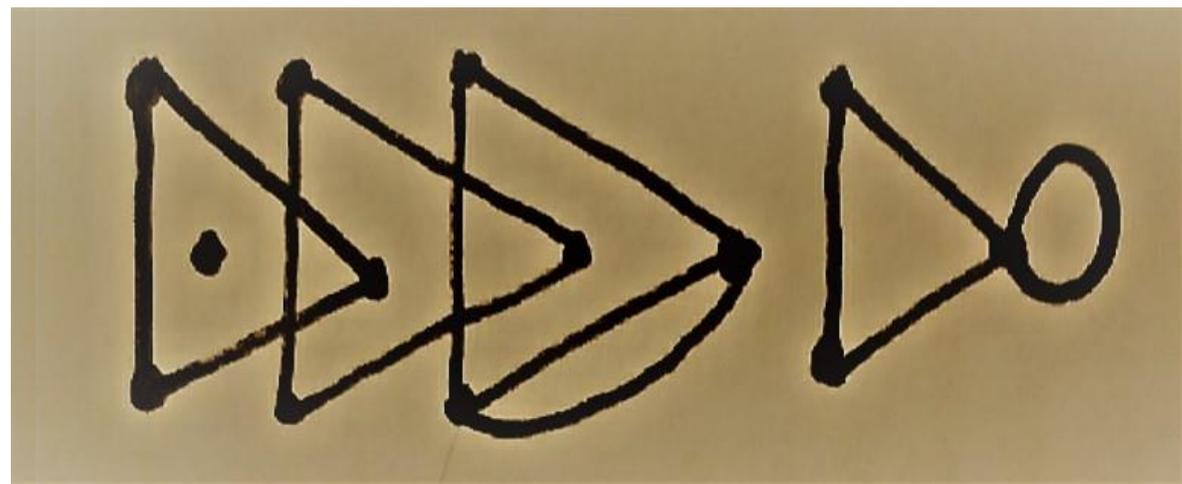
$$u \sim v \Leftrightarrow \text{существует } (u, v)\text{-маршрут.}$$

Отношение является отношением эквивалентности. Обозначим через  $V_1, V_2, \dots, V_k$  классы этого отношения.

Пусть  $G_i = G(V_i)$  — подграф, порожденный множеством вершин  $V_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ).  
Графы  $G_1, G_2, \dots, G_k$  называются *компонентами связности* графа  $G$ .

Каждая компонента связности является связным подграфом. Очевидно, каждый связный подграф графа  $G$  является подграфом некоторой его компоненты связности. Поэтому множество компонент связности — это множество всех максимальных связных подграфов данного графа, и любое ребро принадлежит некоторой компоненте связности.

Поэтому справедливо следующее утверждение: **Каждый граф является дизъюнктивным объединением своих компонент связности.**



Граф, имеющий  $n$  вершин,  $m$  ребер и  $k$  компонент связности будем называть  $(n, m, k)$ -графом.

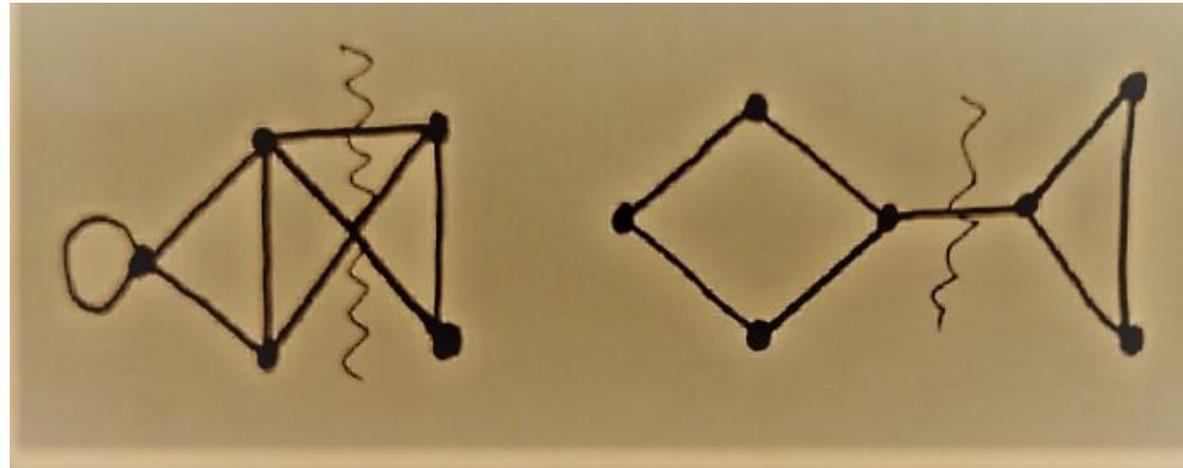
Граф, изображенный на рис., является  $(13, 14, 5)$ -графом.

**Разрезающим множеством ребер** графа называется множество ребер, удаление которого из графа приводит к увеличению числа компонент связности.

Минимальное по включению разрезающее множество ребер графа называется **разрезом**.

**Мост** графа — это ребро, составляющее одноэлементный разрез. Иными словами, при удалении моста число компонент связности возрастает.

На рис. показаны примеры разрезов в графах, причем на правом рис. показан мост.



**Лемма 2.** При удалении из графа ребер разреза число компонент связности увеличивается точно на единицу.

**Доказательство.** 1) Пусть из графа удаляется мост  $e = uv$ . Ясно, что  $u \neq v$ . В графе  $G - e$  вершины  $u$  и  $v$  нельзя соединить простой цепью, иначе сохранился бы отношение связности и, следовательно, сохранился бы число компонент связности.

Таким образом,  $u$  и  $v$  лежат в разных компонентах связности графа  $G - e$ .

Пусть  $x$  — произвольная вершина графа  $G$ , для которой существует простая  $(x, v)$ -цепь (конечно, она лежит в той же компоненте связности графа  $G$ , что и вершина  $v$ ).

Если в этой простой цепи не встречается ребро  $e$ , то вершины  $x$  и  $v$  лежат в одной компоненте связности графа  $G - e$ .

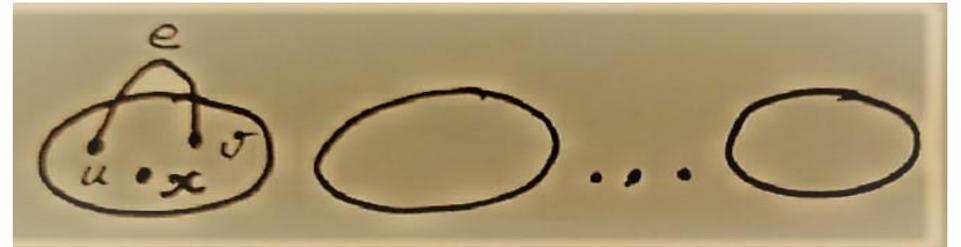
Если в такой простой цепи встречается ребро  $e$ ,

$e$

то цепь обязательно имеет вид  $x \rightarrow \dots \rightarrow u \rightarrow v$ . Поэтому вершины  $x$  и  $u$  лежат в одной компоненте связности графа  $G - e$ .

Поэтому при удалении моста  $e$  точно одна компонента связности графа  $G$ , а именно, компонента, содержащая  $v$ , распадается на две компоненты связности графа  $G - e$ .

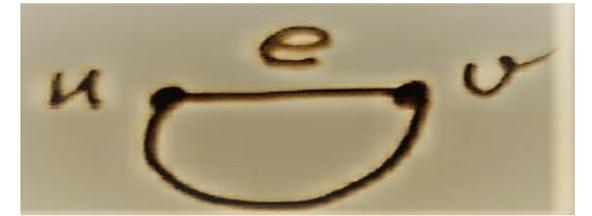
2) Пусть удаляется разрез  $\{e_1, \dots, e_t\}$ , где  $t > 1$ . После удаления ребер  $e_1, \dots, e_{t-1}$  число компонент связности не изменится и ребро  $e_t$  станет мостом. В силу 1) после удаления  $e_t$  число компонент связности увеличится на 1, лемма доказана.



**Лемма 3.** Ребро графа является мостом iff, когда оно не содержится ни в одном цикле.

**Доказательство.** Пусть  $e = uv$  — мост.

Если  $e$  содержится в некотором цикле, то существует простая  $(u, v)$ -цепь, не содержащая  $e$ . Следовательно, после удаления ребра  $e$  из графа отношение связности не изменится, что невозможно.



Обратно, пусть  $e = uv$  не является мостом. После удаления  $e$  из графа  $G$  вершины  $u$  и  $v$  будут лежать в одной компоненте связности графа  $G - e$ . В силу леммы 1 в графе  $G - e$  имеется простая  $(u, v)$ -цепь. Добавляя к этой цепи ребро  $e$ , получим цикл графа  $G$ , содержащий ребро  $e$  и лемма доказана.

Таким образом, множество ребер графа разбиваются на два типа:

- 1) *циклические* ребра — ребра, лежащие в циклах;
- 2) *ациклические* ребра или мосты — ребра, не лежащие в циклах.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  —  $(n, m, k)$ -граф. Тогда  
$$m \geq n - k.$$

**Доказательство.** Применим индукцию по числу ребер. Если  $m = 0$ , то  $n = k$ , и требуемое неравенство очевидно.

Пусть  $m > 0$ . Предположим, что для всех графов с числом ребер, меньшим  $m$ , оценка имеет место.

Рассмотрим  $(n, m, k)$ -граф  $G$ . Пусть  $G_1 = G - e$ , где  $e$  — некоторое ребро графа  $G$ . Тогда  $G_1$  является  $(n, m - 1, k_1)$ -графом, где  $k_1 \leq k + 1$  в силу леммы 2. Следовательно,  
$$m - 1 \geq n - k_1 \geq n - k - 1,$$

т.е.  $m \geq n - k$ .

**Теорема доказана.**

Число  $r(G) = n - k$  называется *рангом* графа  $G$ , а

число  $r^*(G) = m - n + k$  называется его *цикломатическим числом* или *корангом*.

**Теорема 2 (Д. Кёниг).** Ненулевой граф является двудольным графом iff, когда он не имеет циклов нечетной длины.

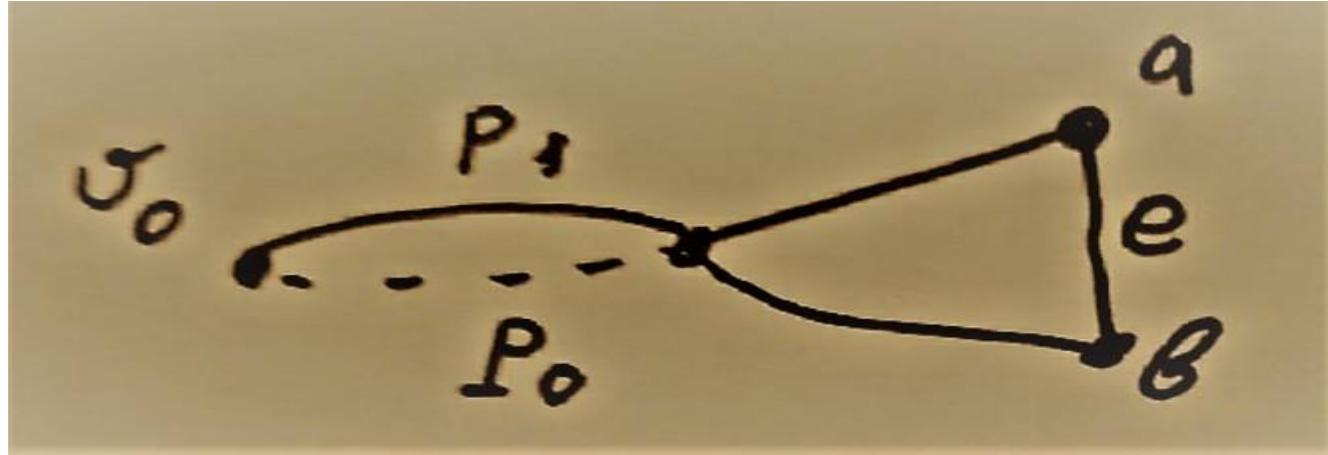
**Доказательство.** В двудольном графе, очевидно, нет петель и любой замкнутый маршрут имеет четную длину.

Обратное утверждение теоремы достаточно доказать для связного графа  $G$ . Пусть ненулевой граф  $G$  связан и не имеет циклов нечетной длины. Зафиксируем некоторую его вершину  $v_0$ . Разобьем множество всех вершин  $V$  на два непустых непересекающихся подмножества  $V_0$  и  $V_1$  следующим образом.

В  $V_0$  и  $V_1$  поместим, соответственно, все вершины  $u$  графа  $G$ , для которых кратчайшая  $(v_0, u)$ -цепь имеет четную, соответственно нечетную, длину. Ясно, что  $v_0 \in V_0$  и  $V = V_0 \cup V_1$ .

Покажем, что в графе  $G$  нет ребер  $e = ab$  таких, что вершины  $a$  и  $b$  лежат одновременно в  $V_0$  или в  $V_1$ . Пусть, от противного, для ребра  $e = ab$  выполняется  $a, b \in V_0$  (случай  $a, b \in V_1$  рассматривается аналогично).

Пусть  $P_0$  — кратчайшая  $(v_0, a)$ -цепь, а  $P_1$  — кратчайшая  $(v_0, b)$ -цепь. Обе эти цепи имеют четную длину. Обозначим через  $u$  последнюю вершину цепи  $P_0$ , принадлежащую цепи  $P_1$ .



Тогда подцепи от  $v_0$  до  $u$  в цепях  $P_0$  и  $P_1$  имеют одинаковую длину. Иначе, пробежав по более короткой подцепи от  $v_0$  до  $u$  мы смогли бы найти более короткую цепь от  $v_0$  до  $a$  или от  $v_0$  до  $b$ , чем цепь  $P_0$  или цепь  $P_1$ . Очевидно, подцепи от  $u$  до  $a$  и от  $u$  до  $b$  в цепях  $P_0$  и  $P_1$  имеют одинаковую четность.

Тогда они вместе с ребром  $e$  образуют цикл нечетной длины, что невозможно.

**Теорема доказана.**