ОРИЕНТИРОВАННЫЕ
ГРАФЫ

Пусть V, D — произвольные конечные множества, причем $V \neq \emptyset$.

Ориентированным графом или, короче, ***орграфом*** G называется тройка (V, D, φ), где φ — некоторое отображение D в декартов квадрат множества V.
Элементы множеств V и D называются соответственно ***вершинами*** и ***дугами*** орграфа G.

Множества вершин и дуг орграфа G удобно обозначать через VG и DG, соответственно. Если f — дуга, то $\varphi(f)$ является упорядоченной парой (u, v), где $u, v \in V$. Дуга f ***выходит из*** вершины u и ***заходит в*** вершину v; в свою очередь u и v называются концевыми вершинами дуги f; в дальнейшем будем писать $f = \overrightarrow{uv}$ (и чаще даже — $f = uv$, если нет опасности возникновения путаницы).

Произвольный орграфа, как правило, будем представлять в виде $G = (V, D)$.

Орграфы принято изображать при помощи диаграмм, аналогичных диаграммам для графов. Разница состоит лишь в том, что линия, изображающая дугу, имеет направление.

С каждым орграфом $G = (V, D)$ естественно связать граф $G_0 = (V, E)$, называемый ***основанием*** данного орграфа. Для получения основания необходимо в орграфе G заменить каждую дугу на ребро, соединяющее те же концевые вершины.

Орграф G называется ***связным***, если связным является его основание.

Ориентированым маршрутом или, короче, ***ормаршрутом*** в орграфе G называется чередующаяся последовательность вершин и дуг

$$v_0,\ f_1,\ v_1,\ \dots,\ v_{t-1},\ f_t,\ v_t,$$

в которой $f_i = v_{i-1}v_i$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$.

Такой ормаршрут принято называть (v_0, v_t)-***ормаршрутом***;

Вершины v_0 и v_t называются соответственно начальной и конечной вершинами ормаршрута. Если $v_0 = v_t$, то ормаршрут называют ***замкнутым***. Количество дуг, составляющих ормаршрут, — это ***длина*** ормаршрута.

Ормаршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называют ***орцепью***. ***Простая орцепь*** — это орцепь без повторяющихся вершин (кроме, быть может, совпадающих начальной и конечной вершин). Замкнутая простая орцепь называется ***орциклом*** или ***контуром***.

Орграф G ***сильно связен*** или ***орсвязен***, если любая его вершина ***достижима*** из любой другой вершины. Очевидно, сильно связный орграф является связным; обратное утверждение, разумеется, не верно.

Пусть G — произвольный орграф.

Полустепенью исхода $\overleftarrow{\deg}\, v$ вершины v называется число всех дуг, имеющих v в качестве начала.

Аналогично, ***полустепень захода*** $\overrightarrow{\deg}\, v$ — это число всех дуг, для которых вершина v является концом.

Орграф, содержащий n вершин и m дуг будем называть (n, m)-орграфом.

Полустепени исхода и полустепени захода связаны следующим очевидным образом.

Лемма 7. Пусть G — произвольный (n, m)-орграф. Тогда

$$\sum_{v \in VG} \overrightarrow{\deg}\, v = \sum_{v \in VG} \overleftarrow{\deg}\, v = m.$$

Это утверждение часто называют орлеммой о рукопожатиях.