

**ЧИСЛО ОСТОВОВ  
В СВЯЗНОМ ОБЫКНОВЕННОМ ГРАФЕ**

**Лемма 1.** Пусть  $H$  — обыкновенный  $(n, n - 1)$ -граф,  $n \geq 2$ ,  $I$  — матрица инцидентности некоторой его ориентации,  $M$  — произвольный минор порядка  $n - 1$  матрицы  $I$ . Тогда

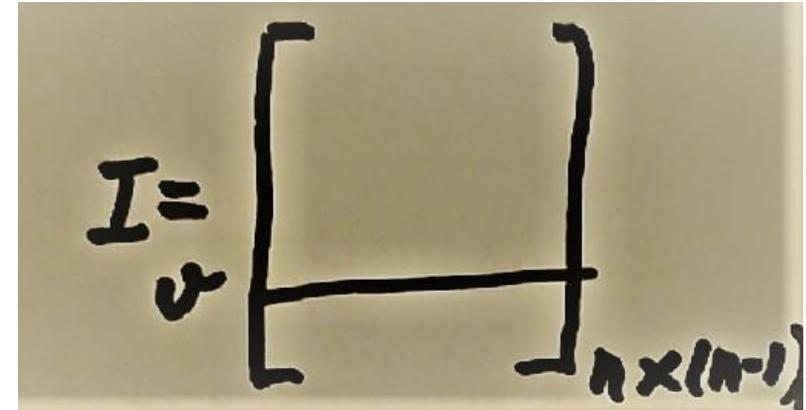
- 1) если  $H$  не является деревом, то  $M = 0$ ;
- 2) если  $H$  — дерево, то  $M = \pm 1$ .

**Доказательство.** Заметим, что смена нумерации вершин и нумерации ребер графа  $H$  приводит к перестановке строк и перестановке столбцов матрицы  $I$ . Рассматриваемый минор при этом может сменить лишь знак.

Пусть  $v$  — вершина, соответствующая строке матрицы  $I$ , не вошедшей в матрицу минора  $M$ .

1) Пусть  $H$  не является деревом. Тогда граф  $H$  несвязен. Пусть  $v_1, \dots, v_t$  — множество вершин некоторой компоненты связности  $H_1$  графа  $H$ , не содержащей  $v$ .

**1.1.** Если  $t = 1$ , то  $v_1$  — изолированная вершина и в матрице минора  $M$  имеется нулевая строка, поэтому  $M = 0$ .



**1.2.** Пусть  $t > 1$ . С помощью подходящей перестановки вершин и ребер из  $H$  матрицу  $I$  приведем к клеточному виду, где  $I_1$  — матрица инцидентности ориентации компоненты  $H_1$ , а вершине  $v$  отвечает строка, не проходящая через  $I_1$ .

$$\begin{array}{c} t \{ \\ v \end{array} \left[ \begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right]$$

Каждый столбец, проходящий через  $I_1$ , содержит точно одну единицу и точно одну  $-1$  (остальные элементы равны нулю).

Следовательно, сумма первых  $t$  строк равна  $0$ . Так как они входят в матрицу минора  $M$ , имеем  $M = 0$ .

2) Пусть  $H$  является деревом.

Заново перенумеруем вершины и ребра графа  $H$  с помощью следующей процедуры.

В качестве  $v_1$  возьмем одну из висячих вершин дерева  $H$ , отличную от  $v$ . Через  $e_1$  обозначим инцидентное ей висячее ребро.

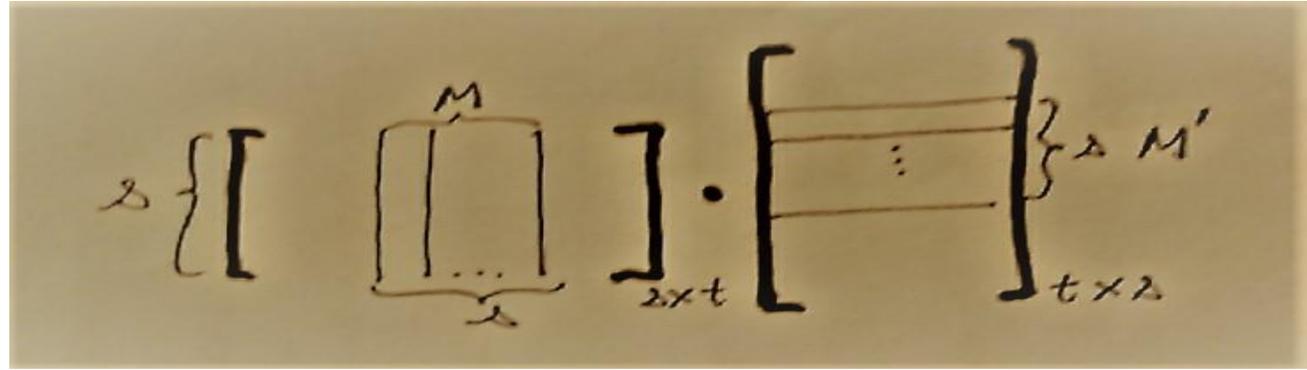
Рассмотрим дерево  $H_1 = H - v_1$ . Если его порядок  $\geq 2$ , то через  $v_2$  обозначим одну из висячих вершин, отличных от  $v$ , а через  $e_2$  — инцидентное ей висячее ребро. Положим  $H_2 = H_1 - e_2$ .

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не получим одноэлементное дерево  $H_{n-1}$ , единственной вершиной которого обязательно будет вершина  $v$ . Получим нумерацию вершин  $v_1, \dots, v_n = v$  и нумерацию ребер  $e_1, \dots, e_{n-1}$ . В новой нумерации матрица  $I$  приведет к виду:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \pm 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ * & * & * & \dots & \pm 1 \\ \cancel{v} \text{---} * & \cancel{*} & \cancel{*} & \dots & \cancel{*} \end{bmatrix} \end{array}$$

Теперь ясно, что  $M = \pm 1$  и лемма доказана.

Пусть  $P$  и  $Q$  — соответственно  $(s \times t)$ -матрица и  $(t \times s)$ -матрица, где  $s \leq t$ .  
 Положим  $C = PQ$ .



Минор порядка  $s$  матрицы  $Q$  называется *соответствующим минором* минору порядка  $s$  матрицы  $P$ , если множество номеров строк, составляющих матрицу минора матрицы  $Q$ , равно множеству номеров столбцов, составляющих матрицу минора матрицы  $P$ .

**Формула Бине–Коши.** *Определитель матрицы  $C$  равен сумме всевозможных попарных произведений миноров порядка  $s$  матрицы  $P$  на соответствующие миноры матрицы  $Q$ .*

Доказательство можно найти в книге Гантмахера «Теория матриц» на стр. 20.

Заметим, что при  $s = t$  формула Бине–Коши утверждает, что определитель произведения двух квадратных матриц порядка  $s$  равен произведению определителей этих матриц.

**Теорема 1 (Кирхгоф, 1847).** Число остовов в связном не одноэлементном обыкновенном графе  $G$  равно алгебраическому дополнению любого элемента его матрицы Кирхгофа.

**Доказательство.** Пусть  $G$  — произвольный связный обыкновенный  $(n, m)$ -граф,  $n \geq 2$  и  $I$  — матрица инцидентности некоторой ориентации графа  $G$ . Заметим, что  $m \geq n - 1$  в силу связности графа  $G$ . В силу ранее доказанного выполняется

$$B = B(G) = I \cdot I^T.$$

Пусть  $B'$  — подматрица матрицы  $B$ , полученная удалением последней строки и последнего столбца, а  $J$  — подматрица матрицы  $I$ , полученная удалением последней строки. Тогда имеем

$$B' = J \cdot J^T,$$

где  $J$  —  $((n-1) \times m)$ -матрица. Очевидно,  $B_{nn} = \det B'$  есть алгебраическое дополнение элемента  $\beta_{nn}$  в матрице Кирхгофа  $B$ . В силу формулы Бине–Коши  $B_{nn}$  равно сумме квадратов всех миноров порядка  $n - 1$  матрицы  $J$ . Согласно лемме 1 каждый такой минор  $M$  равен  $\pm 1$ , если остовный подграф графа  $G$ , ребра которого соответствуют столбцам, вошедшим в матрицу минора  $M$ , является деревом, и равен 0 в другом случае.

Следовательно,  $B_{nn}$  равно числу остовов графа  $G$ . Осталось отметить, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа одинаковы.

**Следствие.** Число остовов в полном графе  $K_n$  равно  $n^{n-2}$ .

**Доказательство.** Утверждение очевидно для  $n = 1$  и  $n = 2$ . Пусть  $n > 2$ . Мы имеем

$$B(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}_{n-1} = n^{n-2}$$

Так как число остовов в полном графе  $K_n$  равно числу помеченных деревьев порядка  $n$ , т. е. числу деревьев на множестве вершин  $1, 2, \dots, n$ , следствие эквивалентно следующему утверждению.

**Теорема 2 (Кели, 1897).** Число помеченных деревьев порядка  $n$  равно  $n^{n-2}$ .

**Задача об остове минимального веса:** построить алгоритм, который во взвешенном графе  $(G, w)$  находит остов минимального веса.

Так в  $K_n$  число остовов экспоненциально зависит от  $n$ , было бы нерационально решать задачу об остове минимального веса, основываясь на переборе всех остовов. Имеются алгоритмы, которые решают эту задачу за полиномиальное время.

## Густав Роберт Кирхгоф.



Член Берлинской академии наук, иностранный член Лондонского королевского общества, член-корреспондент Петербургской академии наук, Парижской академии наук.

**Дата и место рождения:** 12 марта 1824 г., Кёнигсберг

**Дата и место смерти:** 17 октября 1887 г., Берлин, Германия

**Полное имя:** Gustav Robert Kirchhoff

**Открытия:** Цезий, Рубидий, Спектроскопия, теория электрических цепей

**Теорему о числе остовов доказал в 22 года.**

## Артур Кэли

Дата и место рождения: 16 августа 1821 г., Ричмонд,  
Великобритания

Дата и место смерти: 26 января 1895 г., Кембридж,  
Великобритания

Области деятельности: Линейная алгебра  
(Гамильтона — Кэли), Алгебраическая  
геометрия, Теория групп, Математика и Химия

