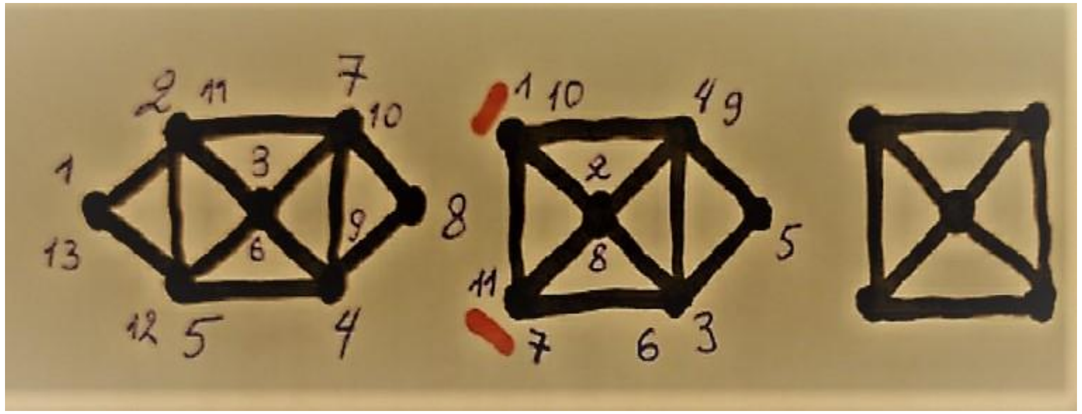
Эйлеровы графы

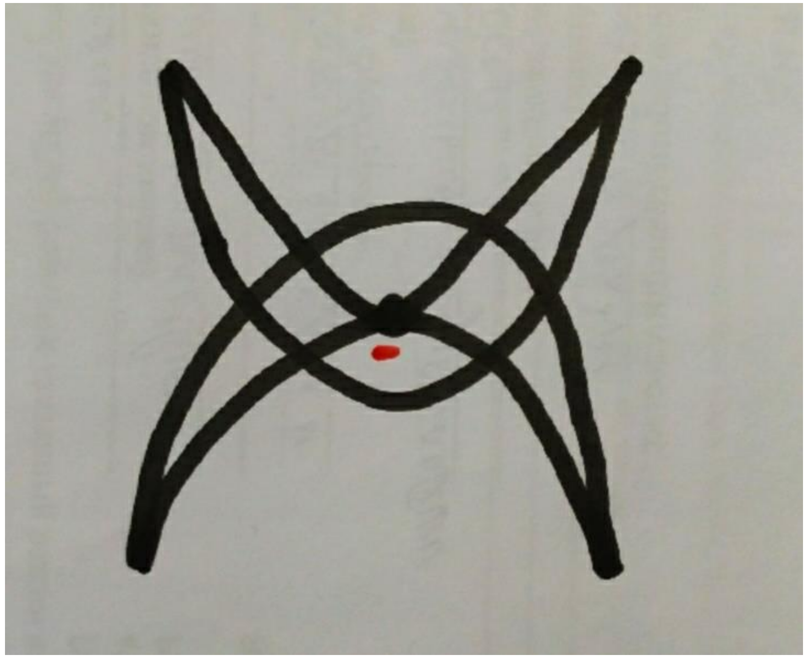
Произвольно вычерчиваемые графы

Замкнутая цепь в графе G называется *эйлеровой цепью*, если она содержит все ребра и все вершины графа.

Граф, содержащий эйлерову цепь, называют *эйлеровым графом*.

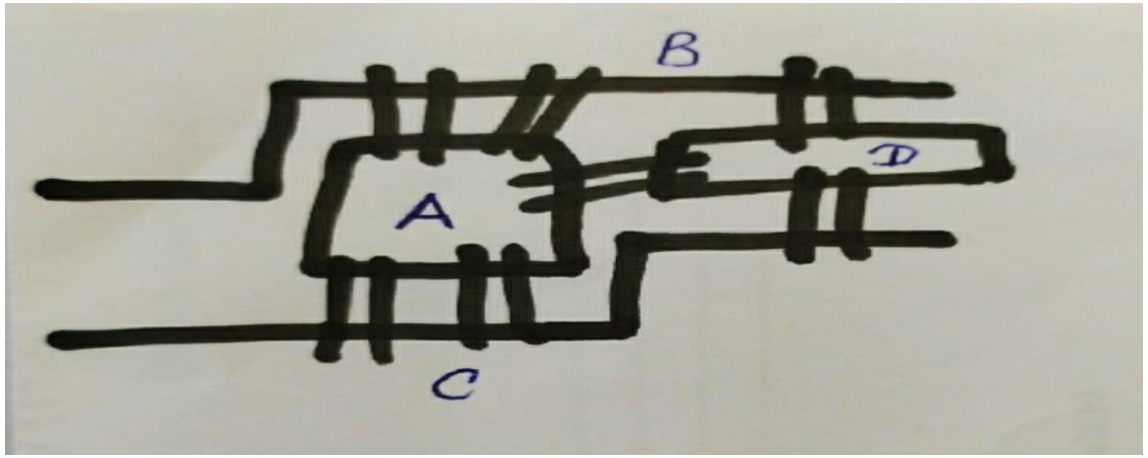
Иными словами, эйлеров граф — это связный граф, в котором имеется замкнутый маршрут, проходящий точно один раз через каждое его ребро.



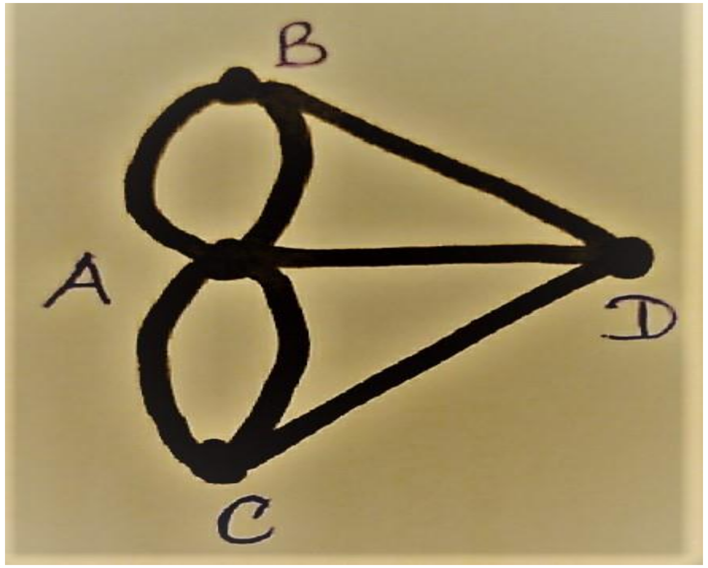


Леонард Эйлер первым рассмотрел такие графы в 1736 году в своей знаменитой работе о кенигсбергских мостах. Этой работой Эйлер положил начало новому разделу математики — теории графов.

Задача о кенигсбергских мостах. На реке Прегель в Кенигсберге было два острова, соединенных между собой и с берегами семью мостами. Спрашивается, можно ли, начиная с некоторого места суши, обойти все мосты по одному разу и вернуться назад?



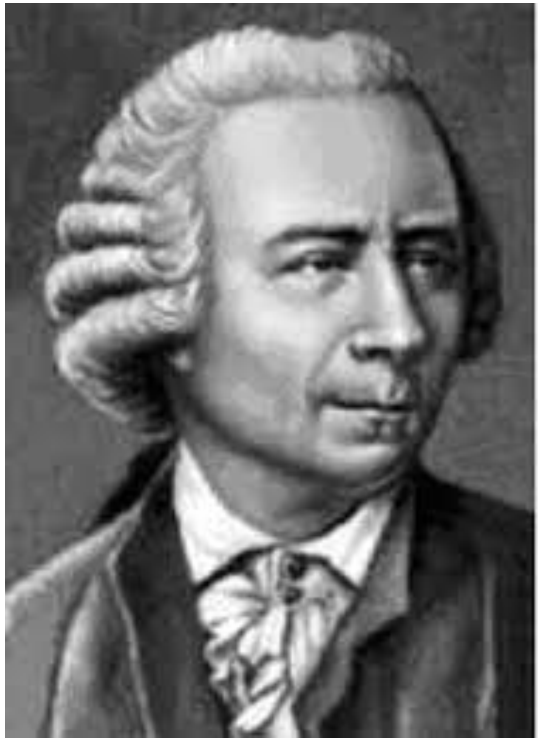
Эйлер предложил рассмотреть граф:



Петр I (1672 – 1725) и **Г.В. Лейбниц** (1646 – 1716)

Математическая школа **Иоганна и Якоба Бернулли** в Базельском университете. В 1725 г. Даниил и Николай Бернулли прибыли работать в СПб (Даниил вскоре умер).

Леонард Эйлер



Леонард Эйлер (Базель, 15 апреля 1707 г. – СПб, 18 сентября 1783 г.).

Окончил Базельский университет в 13 лет, в 17 лет – магистр.

Ученик **Иоганна** и Якоба Бернулли (отец (пастор) друг семьи Бернулли).

В 20 лет в 1727 г. переехал в СПб. 30 лет прожил в СПб и 25 лет – в Берлине.

В конце жизни ослеп. 13 детей (выжили 3 сына и 2 дочери).

В 1957 году (150 лет со дня рождения) был перезахоронен со Смоленского кладбища в Лавру Александра Невского, захоронен рядом М.В. Ломоносовым.

Теорема 1 (Эйлер, 1736). Для связного графа G следующие условия эквивалентны:

1) G — эйлеров граф;
2) каждая вершина графа G имеет четную степень;
3) множество всех ребер графа G можно разбить на циклы.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Пусть P — эйлерова цепь графа G с начальной вершиной v. Двигаясь по цепи P, будем подсчитывать степени вершин.

Прохождение каждой промежуточной вершины в цепи P вносит число 2 в ее степень.

Первое и последнее ребро цепи P дают вклад 2 в степень вершины v.

Так как цепь P содержит каждое ребро графа точно один раз, отсюда следует четность степеней всех вершин графа G.

$2) \Rightarrow 3)$. Граф G связен и не имеет висячих вершин, поскольку степень каждой его вершины четна.

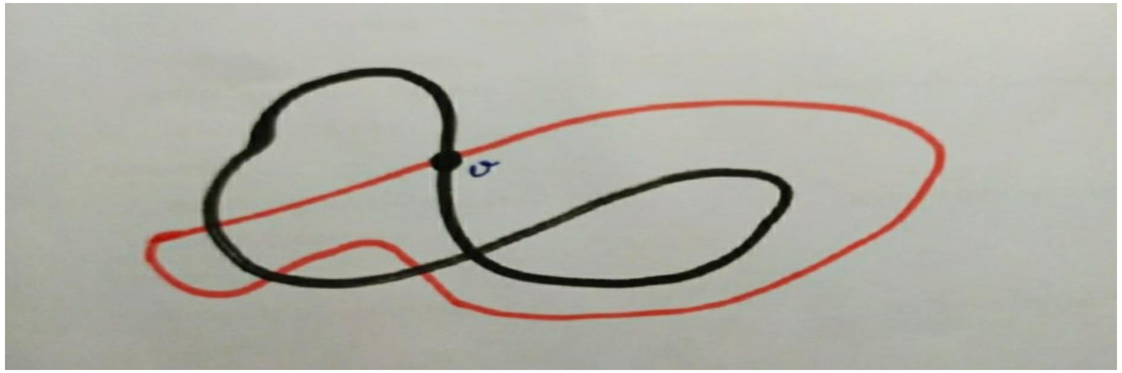
Следовательно, он не является деревом и поэтому содержит некоторый цикл C_1. Удалим C_1 из G, получим граф G_1.

В графе G_1 все степени вершин четны. Если он имеет нетривиальную компоненту связности, то в ней есть цикл C_2. Удаляем этот цикл, получим граф G_2 и т.д.

В результате множество всех ребер будет разбито на циклы, непересекающиеся по ребрам.

3)$\Rightarrow$ 1). Разобьем множество всех ребер графа G на s замкнутых цепей $P_1, P_2, \dots, P_s$ (такое разбиение существует в силу условия 3)). Если $s = 1$, то G – эйлеров граф.

Пусть $s > 1$. В силу связности графа G найдется такое $i \geqslant 2$, что замкнутые цепи P_1 и P_i имеют общую вершину. Поскольку P_1 и P_i не имеют общих ребер, их можно объединить в одну замкнутую цепь, уменьшив общее количество цепей до $s - 1$.



Продолжая этот процесс объединения цепей, мы получим одну замкнутую цепь, содержащую все ребра графа G. Следовательно, G – эйлеров граф.

Теорема доказана.

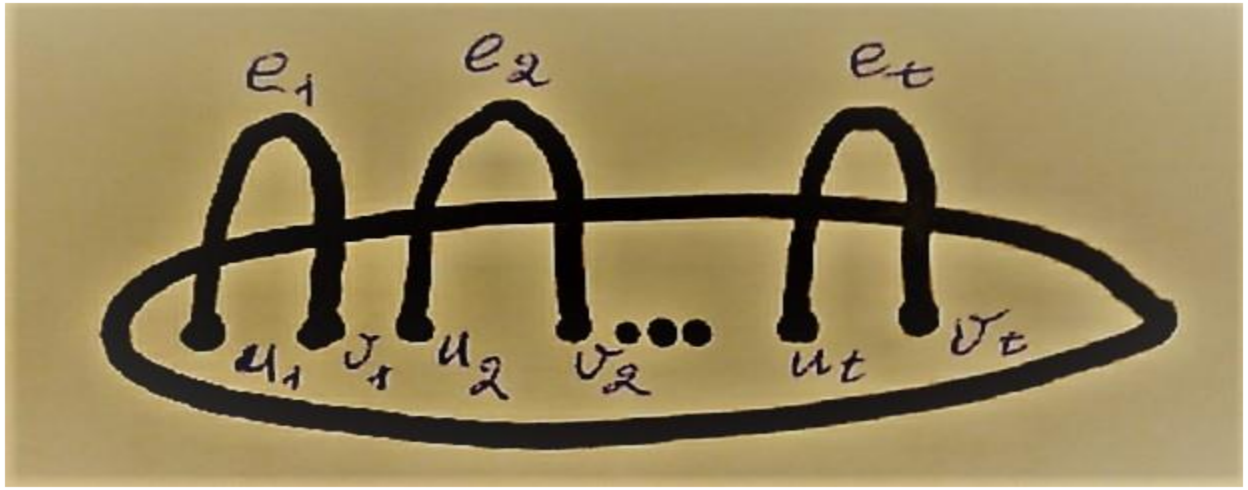
Полиномиальный алгоритм проверки графа на эйлеровость.

Следствие 1. Пусть G — произвольный связный граф, содержащий точно 2t вершин нечетной степени, где $t \geqslant 1$. Тогда множество всех ребер графа можно разбить на t цепей, каждая из которых соединяет две различные вершины нечетной степени, и нельзя разбить на меньшее число таких цепей.

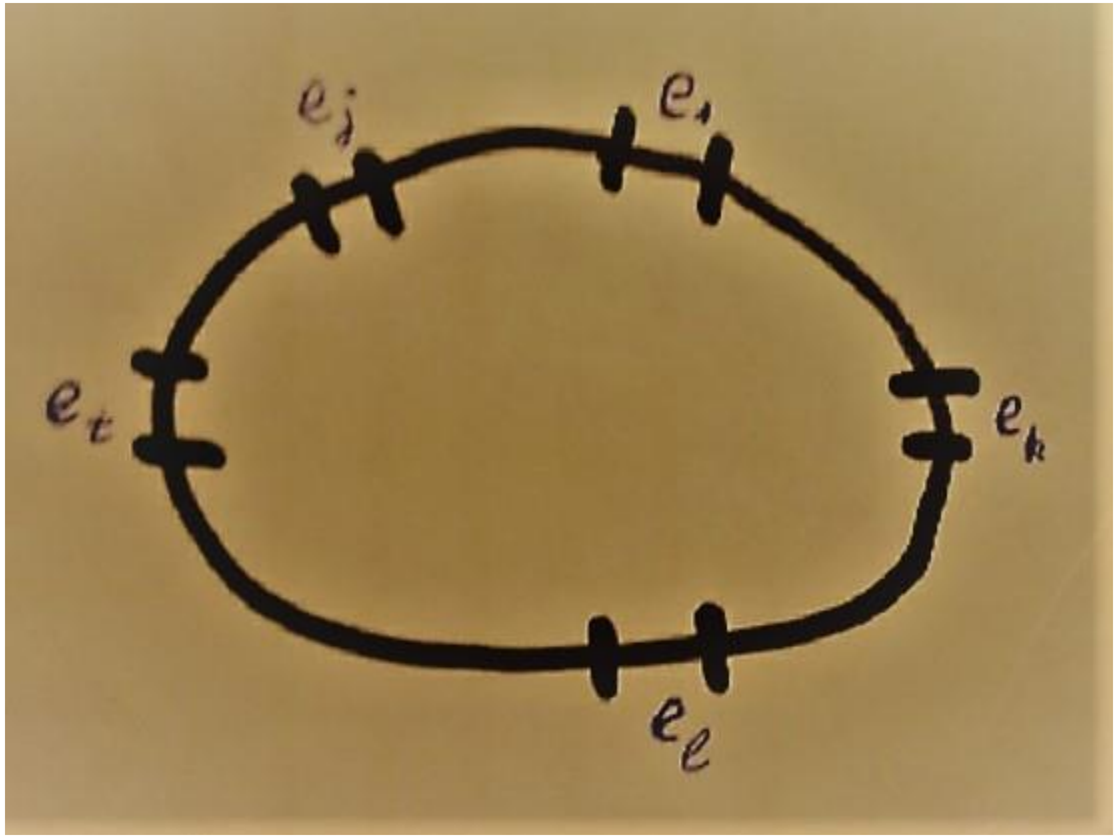
Доказательство. Очевидно, утверждение достаточно доказать для случая, когда граф G связен. Пусть

$$u_1, v_1, \dots, u_t, v_t$$

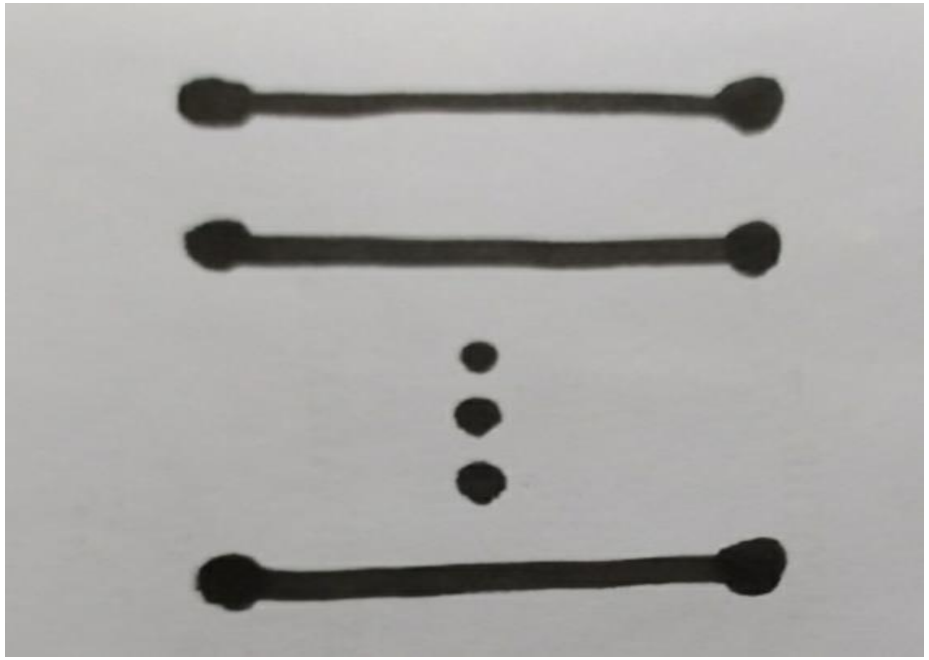
— все вершины нечетной степени связного графа G.
Рассмотрим граф G_1, полученный из G добавлением t новых ребер $e_1, \dots, e_t$ таких, что $e_i = u_i v_i \, (1 \leqslant i \leqslant t)$.



Граф G_1, очевидно, связен и степень каждой его вершины — четное число. Поэтому в G_1 существует эйлерова цепь P. Можно считать, что цепь P начинается с ребра e_1. Удаляя из P все ребра e_i ($1 \leqslant i \leqslant t$), получим t нужных нам цепей.



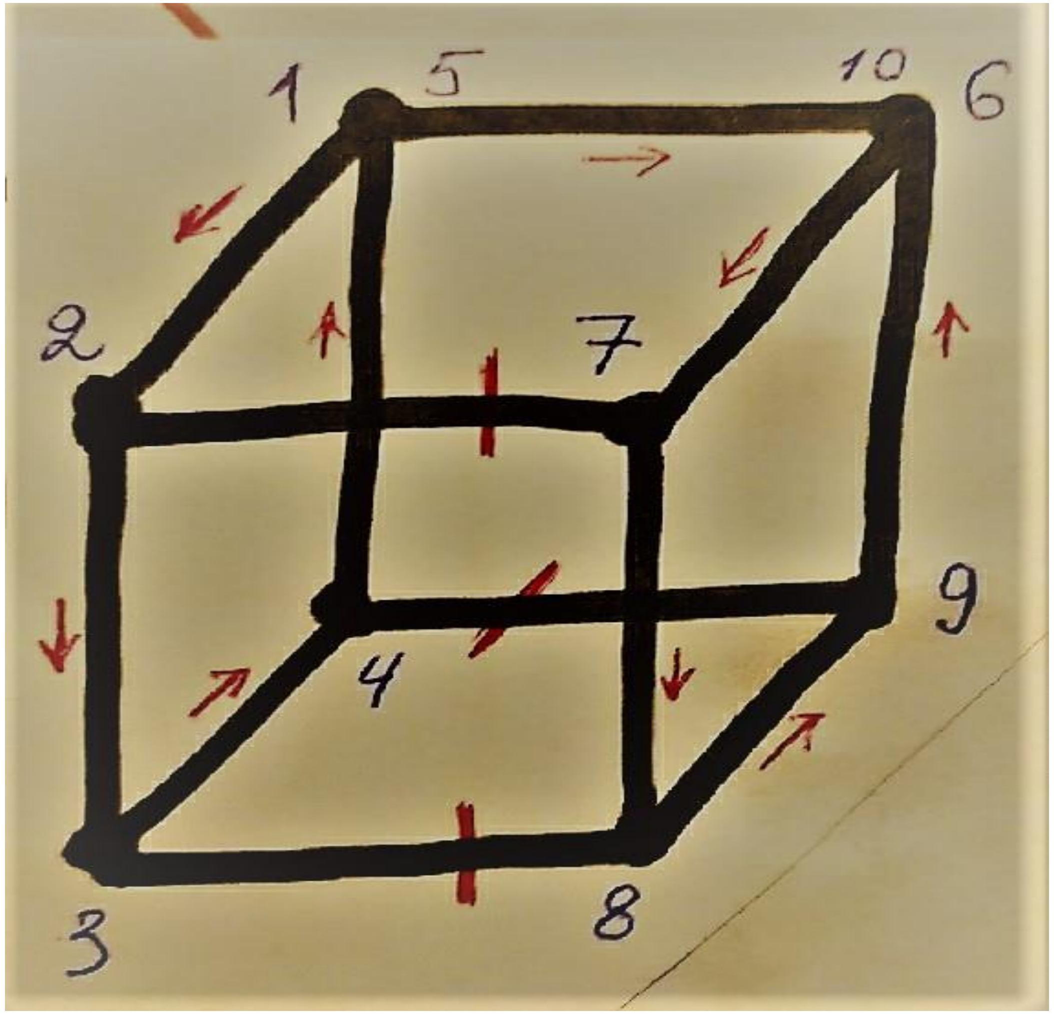
Пусть E можно разбить на s таких цепей.



Нечетными могут быть степени концов таких цепей. Поэтому $2s \geqslant 2t$, т.е. $s \geqslant t$.

Следствие 1 доказано.

Задача о кубе из проволоки. Здесь $2t = 8$ и $t = 4$.



Цепь называется *полуэйлеровой* в графе G , если она содержит все ребра и все вершины этого графа.

Граф называется *полуэйлеровым*, если в нем существует полуэйлерова цепь.

Иными словами, полуэйлеров граф — это связный граф, в котором имеется цепь (возможно, незамкнутая), проходящая точно один раз через каждое его ребро.

Теорема 2. Связный граф G является полуэйлеровым графом тогда и только тогда, когда он содержит не более двух вершин нечетной степени.

Очевидно, полуэйлеров граф содержит не более двух вершин нечетной степени. Обратное утверждение вытекает из теоремы 1 и следствия 1.

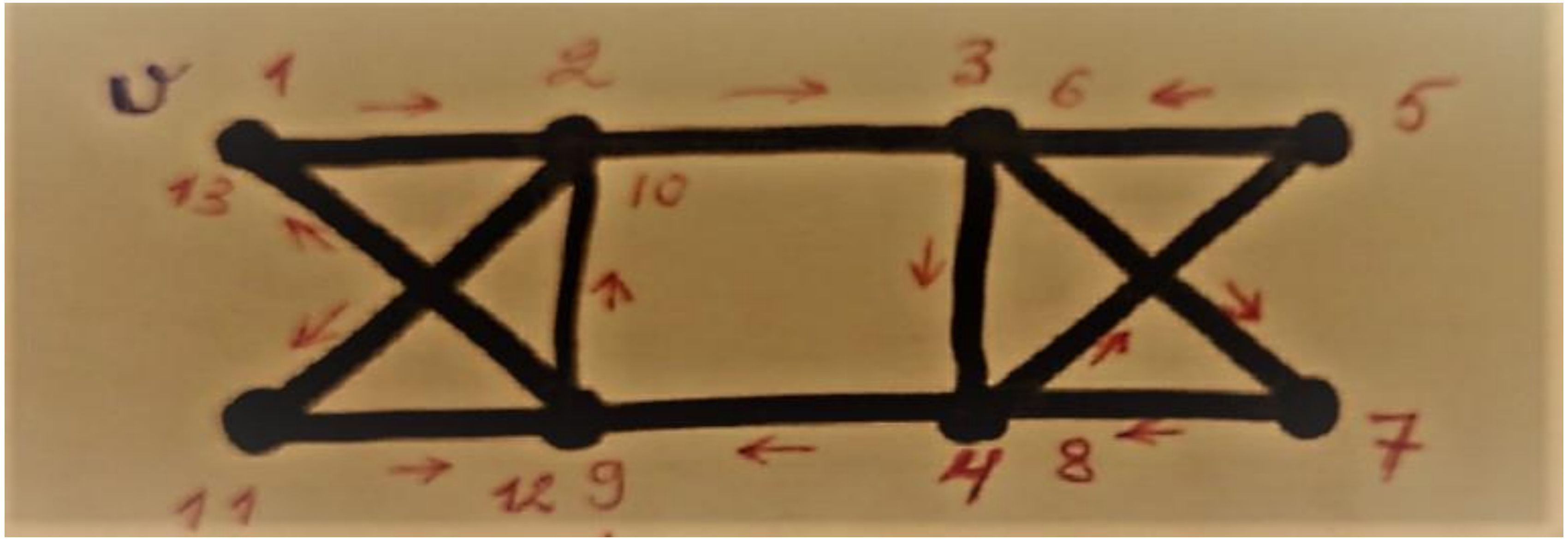
Легко видеть, что если связный граф G содержит две вершины u и v нечетной степени, то существует (u, v)-цепь, содержащая все ребра этого графа.

Теорема 3. Пусть G – эйлеров граф. Тогда следующая процедура (*алгоритм Флёри*) приводит к построению эйлеровой цепи графа G. Выходя из произвольной вершины v, движемся по маршруту, выбирая ребра произвольным образом и соблюдая лишь следующие два правила:

1) удаляем ребра по мере их прохождения;

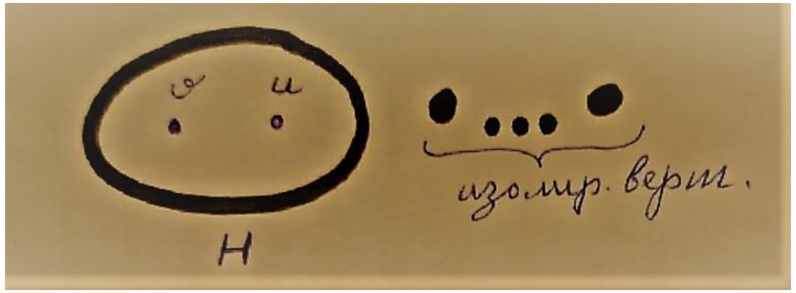
2) на каждом этапе движемся по мосту только в том случае, если нет других возможностей.

Пример.



Доказательство корректности алгоритма Флёри. Индукция по длине пройденного пути.

Пусть нами уже пройдена цепь $v \to \dots \to u$ и в полученном графе G' вершины v и u лежат в одной компоненте связности H, причем H содержит все ребра графа G’ (если в нем имеются ребра). Тогда граф G' имеет следующий вид:



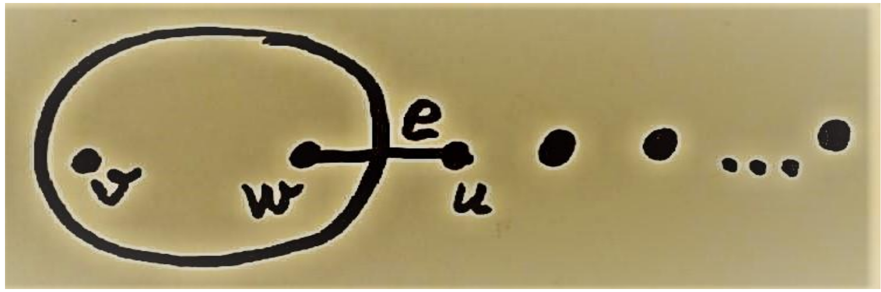
Отметим, что в самом начале $H = G' = G$ и множество изолированных вершин пусто.

Покажем теперь, что если в G имеются ребра, то можно выбрать очередное ребро и после выполнения шага алгоритма в полученном графе будут выполняться указанные нами условия.

1 случай $v = u$. Тогда в H степени всех вершин четны, поэтому H — эйлеров граф. Тогда все его ребра лежат в циклах. Следовательно, можно выбрать не мост e и после удаления e вид графа сохранится.

2 случай $v \neq u$. Тогда в H вершины v и u (и только они) имеют нечетные степени. Поэтому в H имеется полуэйлерова цепь $u \to \ldots \to v$.

2.1. $\deg u = 1$. Тогда

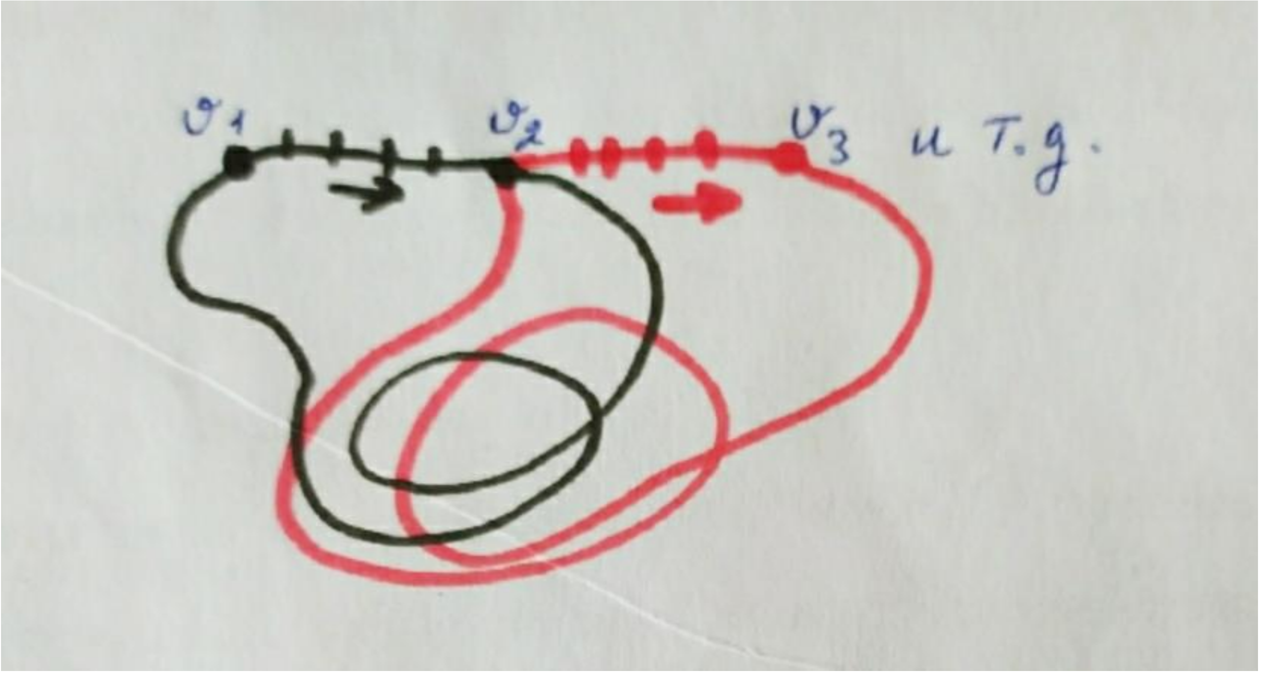


После удаления ребра e условия для графа очевидно сохранятся.

2.2. $\deg u \geq 2$. Тогда в полуэйлеровой цепи $u \to \ldots \to v$ графа H имеется ещё одно вхождение вершины u, т.е. цепь имеет вид $u \to w \to \ldots \to u \to \ldots \to v$. Тогда первое ребро e этой цепи не является мостом (так как имеется цепь от u до w и отношение связности не меняется после удаления e), т.е. имеются не мосты, исходящие из u. Берем любой из таких не мостов, после его удаления вид графа не меняется.

Шаг индукции доказан. Процесс обязательно завершится. Будет построена эйлерова цепь, замкнутость которой гарантируется тем, что очередная вершина w всегда лежит в одной компоненте связности с вершиной v.

Вьетнамский алгоритм построения эйлеровой цепи в эйлеровом графе за время O(n + m).



v_1 – начальная вершина, v_2 – первая не тупиковая вершина на «черной» цепи, v_3 – первая не тупиковая вершина на «красной» цепи и т.д.

Эйлеров граф G называется ***произвольно вычерчиваемым*** из вершины v, если любое применение следующей процедуры приводит к построению его эйлеровой цепи:

Выходим из вершины v и движемся по маршруту, выбирая ребра произвольным образом, и удаляем ребра по мере их прохождения.

Замечание. Эйлеров граф G является произвольно вычерчиваемым из вершины v iff, когда любая его цепь с началом в вершине v может быть продолжена до его эйлеровой цепи.

Теорема 4 (О. Оре, 1956). Эйлеров граф G является произвольно вычерчиваемым из вершины v iff, когда вершина v принадлежит любому его циклу.

Доказательство. ⇒. Пусть, от противного, в графе G существует цикл C, не содержащий v.

Рассмотрим граф $G_1 = G \setminus C$.

Пусть *H* — компонента связности подграфа G_1, содержащая вершину v. Очевидно, что *H* — эйлеров граф. Обозначим через *P* эйлерову цепь подграфа *H*.

Можно считать, что началом и концом цепи *P* является вершина v.

Поскольку v не принадлежит циклу C и не лежит в других компонентах графа G_1, цепь *P* нельзя продолжить до эйлеровой цепи графа G, пришли к противоречию.

$\Leftarrow$. **Обратно**, пусть вершина v эйлерова графа G принадлежит любому циклу.

Рассмотрим произвольную (v, w)-цепь P и покажем, что ее можно продолжить до эйлеровой цепи.

Обозначим через G_1 подграф графа G, полученный удалением из G всех ребер цепи P. Если $w = v$, то все вершины подграфа G_1 имеют четную степень, если же $w \neq v$, то G_1 содержит в точности две вершины нечетной степени.

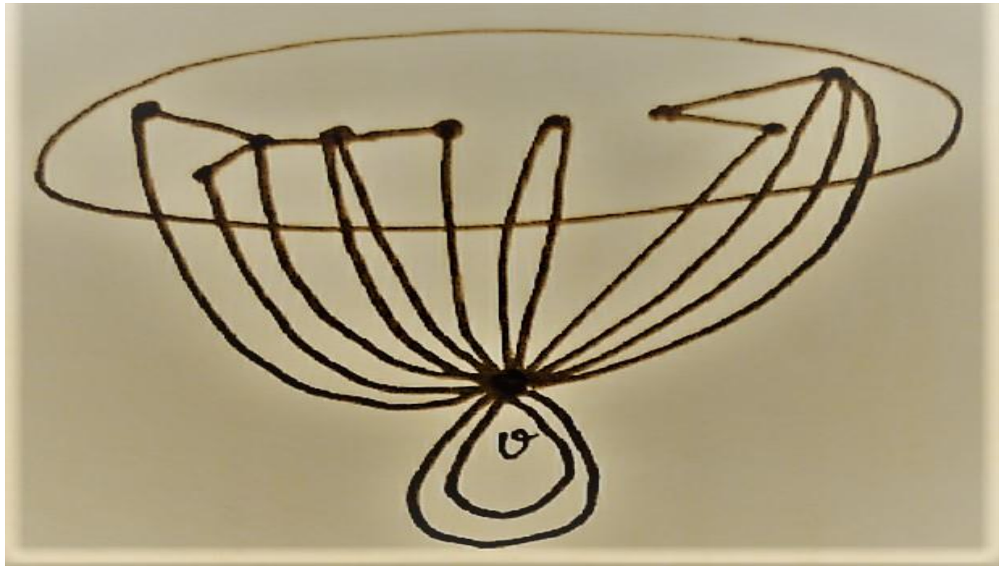
Пусть H_0 — компонента связности графа G_1, содержащая вершину v. Ясно, что вершина w принадлежит H_0. Следовательно, H_0 — полуэйлеров граф, и потому в H_0 существует полуэйлерова (w, v)-цепь Q.

Компонента H_0 содержит все ребра графа G_1. В самом деле, предположим, что G_1 содержит неодноэлементную компоненту связности H, отличную от H_0. Тогда H — эйлеров граф, и потому в H содержится цикл. Этот цикл, очевидно, не проходит через вершину v, что невозможно. Поэтому все компоненты связности подграфа G_1, отличные от H_0, одноэлементны. Следовательно, (v,w)-цепь P продолжается (w, v)-цепью Q до эйлеровой цепи графа G.

Теорема доказана.

Описание строения всех графов, произвольно вычерчиваемых из вершины *v*.

Пусть H — произвольный лес, не содержащий вершину *v*. Присоединим v к H для получения произвольно вычерчиваемого графа G.



Полученный граф G связен, в H теперь все вершины имеют четную степень, вершина v также имеет четную степень (в любом графе число вершин нечетной степени четно), все циклы проходят через вершину *v*.

Применение графов для организации выставок.