Гамильтоновы графы

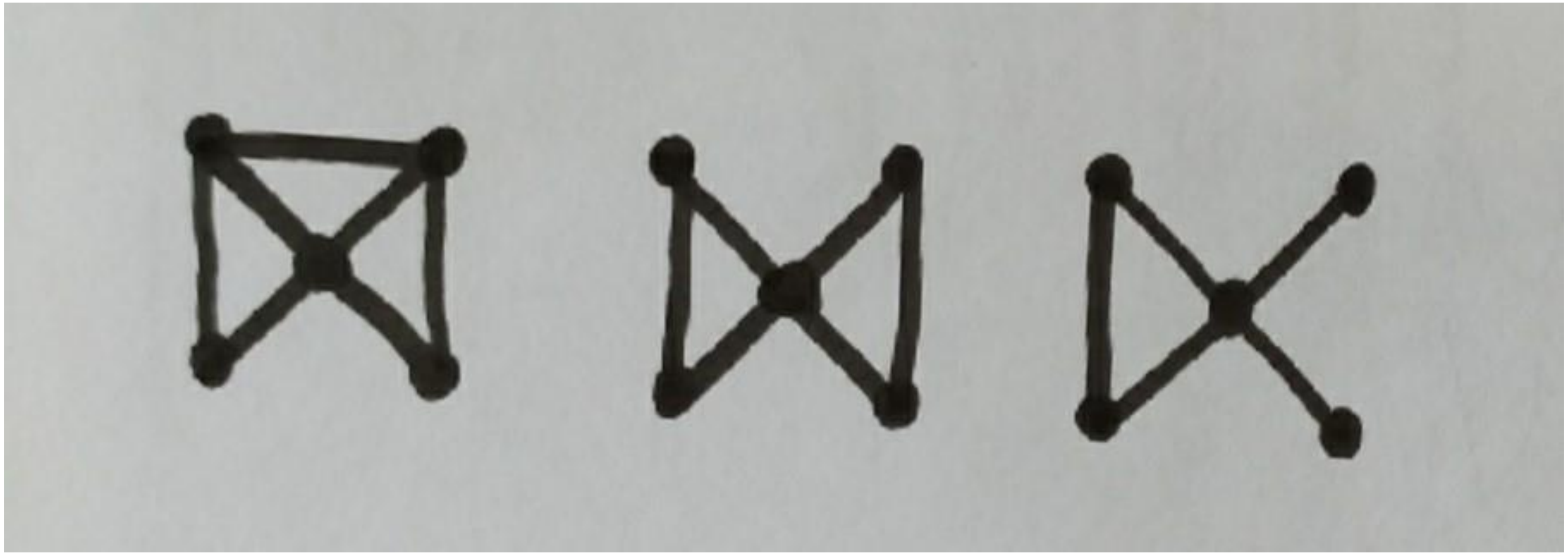
Достаточные критерии гамильтоновости

Гамильтоновой цепью графа называется его незамкнутая простая цепь, которая проходит через каждую вершину графа точно один раз.

Цикл графа, проходящий через каждую его вершину, называется **гамильтоновым циклом.**

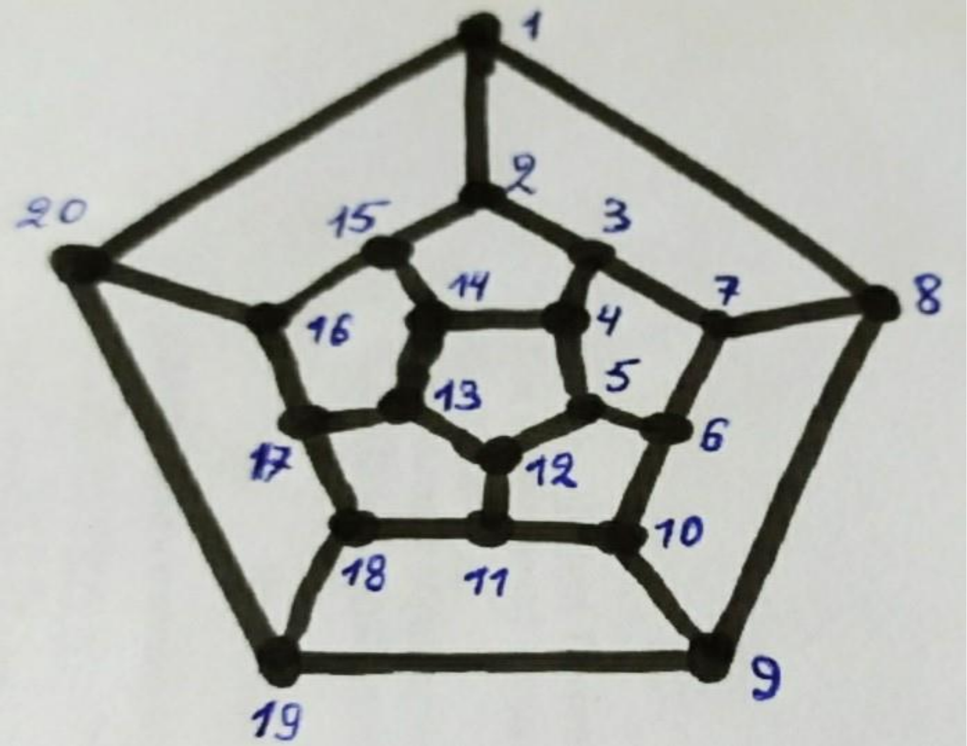
Граф называется ***гамильтоновым***, если он обладает гамильтоновым циклом, и – ***полугамильтоновым***, если он обладает гамильтоновой цепью.

Существование гамильтоновых цепей и циклов при $n \geq 3$ достаточно изучить только для класса обыкновенных графов.



Указанные названия цепей и циклов связаны с именем Уильяма Гамильтона, который в 1859 году предложил следующую игру-головоломку:

1. (***Задача об обходе додекаэдра***). Требуется, переходя по очереди от одной вершины додекаэдра к другой вершине по его ребру, обойти все 20 вершин по одному разу и вернуться в начальную вершину.

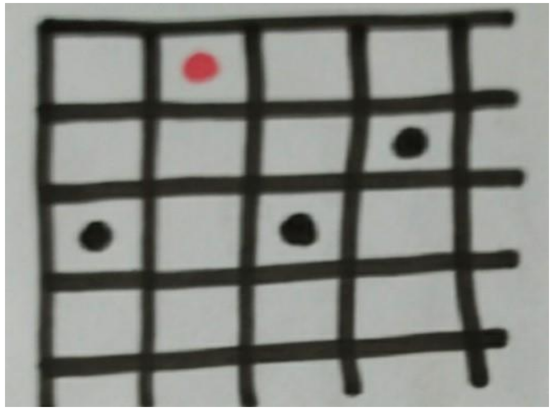


Имеется еще много других развлекательных и полезных задач, связанных с поиском гамильтоновых циклов. Сформулируем две из них.

2. ***(Задача о рассадке за столом)***. Компанию из нескольких человек требуется рассадить за круглым столом таким образом, чтобы по обе стороны от каждого сидели его знакомые.

Очевидно, для решения этой задачи нужно найти гамильтонов цикл в графе знакомств компании.

3. (***Задача о шахматном коне***). Можно ли, начиная с произвольного поля шахматной доски, обойти конем последовательно все 64 поля по одному разу и вернуться в исходное поле?



Несмотря на внешнее сходство задач об эйлеровых цепях и гамильтоновых циклах, оказалось, что проблемы нахождения ***эффективных критериев*** существования таких цепей и циклов имеют принципиально различную сложность.

Как было показано в предыдущем разделе, простой и эффективный критерий существования эйлеровой цепи устанавливается достаточно просто.

Хотелось бы найти подобный критерий и для существования гамильтонова цикла. Однако, поиск эффективного критерия такого сорта является одной из труднейших нерешенных задач теории графов.

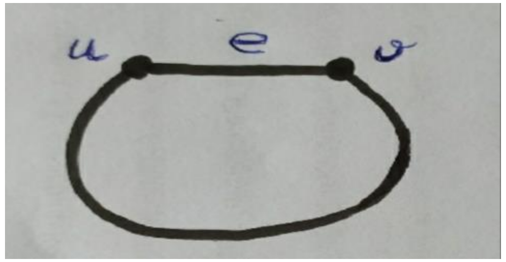
В данном разделе мы ***приведем ряд наиболее интересных достаточных условий существования гамильтонова цикла в обыкновенном графе***, полученных к настоящему времени.

Лемма 1. Пусть G – обыкновенный n-граф, $n \geq 3$ и u, v – две его различные несмежные вершины такие, что $\deg u + \deg v \geq n$. Тогда граф G гамильтонов iff, когда гамильтонов граф G + e, где e – новое ребро такое, что e = uv.

Доказательство. *Необходимость тривиальна*.

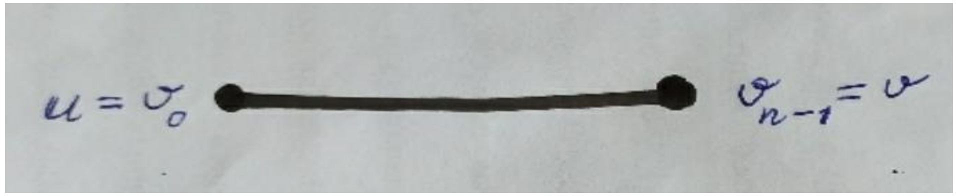
Проверим достаточность. Пусть C – гамильтонов цикл графа G + e. Если e не принадлежит циклу C, то C – гамильтонов цикл и в графе G.

Пусть C проходит через ребро e.



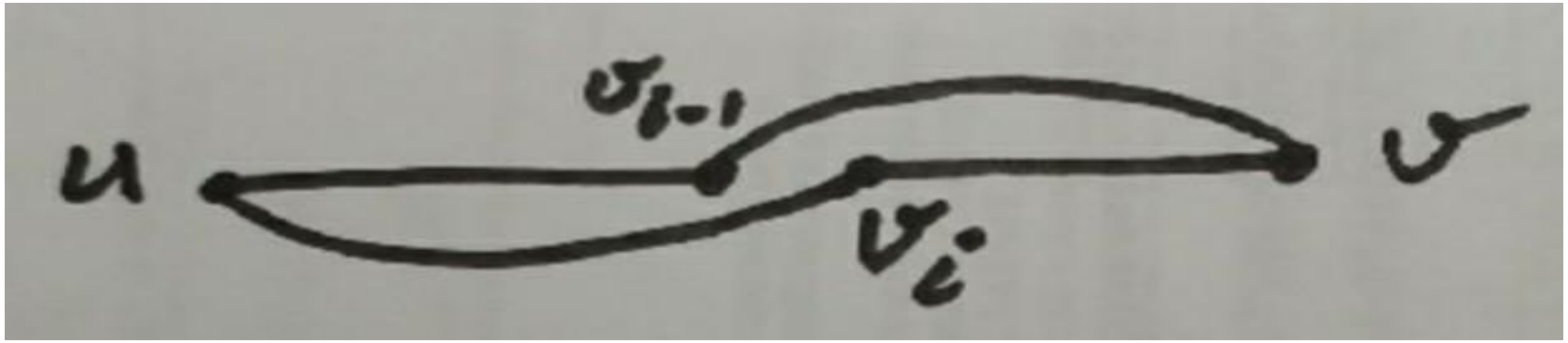
Тогда в G имеется гамильтонова цепь

$$u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1} = v.$$



1 случай. Пусть существует $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ такое, что вершина u смежна с v_i, а вершина v_{i-1} смежна с v в графе G.

Тогда, очевидно, в G существует гамильтонов цикл.



2 случай. Пусть для любого $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ из того, что u смежна с v_i, следует, что v_{i-1} несмежна с v в графе G.

Тогда вершина v несмежна не менее чем с $\deg u + 1$ вершинами (отметим, что вершина v несмежна сама с собой).

Следовательно,

$$\deg v \le n - (\deg u + 1) \le n - \deg u - 1,$$

поэтому $\deg u + \deg v \le n - 1$,

пришли к противоречию и случай 2 невозможен.

Лемма доказана.

Определим ***замыкание*** G^ для n-графа G. Граф G^ получается из G с помощью всевозможных последовательных добавлений ребер вида e = uv для различных несмежных вершин u и v таких, что $\deg_H u + \deg_H v \geq n$ в текущем графе H.

Следствие (John Adrian Bondy, Va'clav Chva'tal, 1976). Пусть G – обыкновенный n-граф и $n \geq 3$. Тогда граф G гамильтонов iff, когда гамильтонов граф G^.

Теорема 1 (Ойстин Оре (1899-1968), 1960). Пусть G – обыкновенный n-граф, $n \geq 3$ и для любых двух его различных несмежных вершин u и v выполняется $\deg u + \deg v \geq n$. Тогда граф G гамильтонов.

Доказательство. Очевидно, $G^\wedge = K_n$. Поскольку при $n \geq 3$ граф K_n гамильтонов, в силу леммы 1 граф G также гамильтонов.

Теорема 2 (Г.А. Дирак (1925-1984), 1952). Пусть G – обыкновенный n-граф, $n \geq 3$ и для любой его вершины v выполняется $\deg v \geq n / 2$. Тогда граф G гамильтонов.

Пример. В компании 12 человек и каждый знаком не менее чем с 6 из них. Тогда эту компанию можно рассадить за круглым столом таким образом, чтобы по обе стороны от каждого сидели его знакомые.

Теорема 3 (John Adrian Bondy, Va’clav Chva’tal, 1980). Пусть G – обыкновенный n-граф, $n \geq 3$, $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ – последовательность его степеней и для любого натурального числа $k \leq (n-1)/2$ выполняется

$$d_k > k \text{ или } d_{n-k} \geq n-k,$$

то граф G гамильтонов.

Доказательство. Сначала покажем, что $d_1 > 0$, т.е. в G нет изолированных вершин.

Пусть, от противного, $d_1 = 0$. Тогда $d_1 \leq 1$ и $d_{n-1} \leq d_n < n - 1$ (поскольку в G есть изолированные вершины), что невозможно. Таким образом, $d_1 \geq 1$.

Для доказательства гамильтоновости графа G достаточно установить, что замыкание G^ является полным графом.

Пусть, от противного, существуют $x, y \in G^\wedge$ такие, что $x \neq y$ и $x \parallel y$.

Ясно, что

$$\deg_{G^\wedge} x + \deg_{G^\wedge} y \leq n - 1. \quad (1)$$

Зафиксируем такие x и y, что $x \neq y$, $x \parallel y$ и сумма $\deg_{G^\wedge} x + \deg_{G^\wedge} y$ принимает максимальное значение.

Без ограничения общности будем считать, что

$$\deg_{G^\wedge} x \leq \deg_{G^\wedge} y.$$

Тогда получаем $2\deg_{G^\wedge} x \leq \deg_{G^\wedge} x + \deg_{G^\wedge} y \leq n - 1.$

Положим $k = \deg_{G^\wedge} x$. Поскольку $d_1 \geq 1$, имеем $k \geq 1$.

Тогда получаем

$$1 \leq k \leq (n - 1)/2.$$

Из (1) вытекает

$$\deg_{G^\wedge} x \leq \deg_{G^\wedge} y \leq n - k - 1. \quad (2)$$

Пусть $X = \{v \in V| \; v \parallel y \text{ и } v \neq y\}$ и $Y = \{v \in V| \; v \parallel x \text{ и } v \neq x\}$ в G^.

1) $|X| = n - 1 - \deg_{G^\wedge} y \geq \deg_{G^\wedge} x = k$ в силу (1).

Для любого $v \in X$ имеем $\deg_G v \leq \deg_{G^\wedge} v \leq \deg_{G^\wedge} x = k$ в силу максимальности суммы $\deg_{G^\wedge} x + \deg_{G^\wedge} y$.

Поэтому в G существует не менее k вершин степени $\leq k$ (в X все вершины таковы). Следовательно,

$$d_k \leq k.$$

2) $|Y| = n - 1 - \deg_{G^\wedge} x = n - k - 1$, поскольку $Y = \{v \in V | \; v \parallel x$ и $v \neq x\}$ в $G^\wedge$.

Для любого $v \in Y$ имеем

$$\deg_G v \;\leq\; \deg_{G^\wedge} v \;\leq\; \deg_{G^\wedge} y \;\leq\; n - k - 1$$

в силу максимальности суммы $\deg_{G^\wedge} x + \deg_{G^\wedge} y$ и (2).

Поэтому в G существует не менее $n - k$ вершин степени $\leq\; n - k - 1$, так как в силу (2) выполняется $\deg_G x \;\leq\; \deg_{G^\wedge} x \;\leq\; n - k - 1$.

Следовательно, $d_{n\text{-}k} \;\leq\; n - k - 1 \;<\; n - k$, т.е.

$$d_{n\text{-}k} < \; n - k.$$

Таким образом, одновременно выполняется

$$d_k \;\leq\; k \quad \text{и} \quad d_{n\text{-}k} < \; n - k,$$

что противоречит условию теоремы. **Теорема доказана**.

В качестве следствия теоремы 3 получаем теорему Хватала в её первоначальной формулировке:

Терема 4 (Va’clav Chva’tal, 1972). Пусть G – обыкновенный n-граф, $n \geq 3$ и $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ – последовательность его степеней. Если для любого натурального числа k такого, что $k \leq (n-1)/2$,

из условия $d_k \leq k$ вытекает условие $d_{n-k} \geq n-k$,

то граф G гамильтонов.

Отметим также, что из теоремы Хватала нетрудно вывести теорему Оре и теорему Дирака.

Граф G называется **2-*связным***, если любые его две различные вершины можно соединить двумя непересекающимися простыми цепями (или, что эквивалентно, для любых двух различных вершин существует содержащий их цикл).

Ясно, что любой гамильтонов граф является 2-связным.

Приведем без доказательства ещё два достаточных условия гамильтоновости обыкновенного графа.

Теорема 5 (G.H. Fan, 1984). Пусть G – 2-связный обыкновенный n-граф и $n \geq 3$. Если для любых вершин x и y выполняется

$$\mathrm{dist}(x, y) = 2 \quad \Rightarrow \quad \max(\deg x, \deg y) \geq n / 2,$$

то граф G гамильтонов.

Теорема 6 (Бонди, Фурнье и Фрайс, 1986). Пусть G – 2-связный обыкновенный n-граф и $n \geq 3$. Если для любой 3-антиклики $\{x, y, z\}$ выполняется

$$\deg x + \deg y + \deg z \geq (3n / 2) - 1,$$

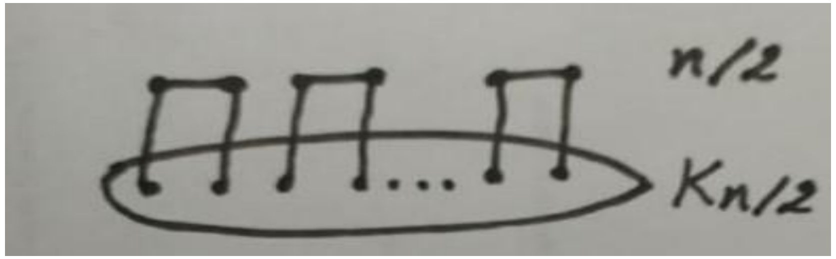
то граф G гамильтонов.

Обыкновенный n-граф G такой, что $n \geq 3$, называется ***панциклическим***, если для любого $t = 3, 4, \ldots, n$ в графе G существует цикл длины t.

Теорема 7 (Шмейхель и Хакими, 1988). В случае теорем 4, 5 и 6 граф G является панциклическим, за исключением графов:

1) в теореме 4 – двудольных графов;

2) в теореме 5 – $K_{n/2,\, n/2}$, $K_{n/2,\, n/2} - e$ и



3) в теореме 6 – $K_{n/2,\, n/2}$, $K_{n/2,\, n/2} - e$ и C_5.

Джон Адриан Бонди

Гражданин Великобритании и Канады,
Был профессором в Университете Уотерлу в Канаде, г. Уотерлу, провинция Онтарио.

В настоящее время профессор Университета Лион 1, Франция.
Среди его соавторов Пол Эрдёш.
Дата рождения: 1944 г.
Образование: Оксфордский университет
Книги: Graph theory with applications

Václav Chvátal	
Born	20 July 1946 Prague
Nationality	Canadian, Czech
Alma mater	University of Waterloo г. Уотерлу, провинция Онтарио, Канада; Charles University, Прага
Awards	Beale–Orchard-Hays Prize (2000) Docteur Honoris Causa, Université de la Méditerranné (2003) Frederick W. Lanchester Prize (2007) John von Neumann Theory Prize (2015)
Fields	Mathematics, Computer Science, Operations Research