2. Пуассоновская СВ (обозначение $\xi \in \Pi(\lambda)$).

СВ ξ –число успехов в «длинной» серии маловероятных событий (закон редких явлений).

Значения ξ: 0, 1, 2, …, n, …

Вероятности значений: $p_m = P_n(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

(ф-ла Пуассона)

Условие нормированности:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

Числовые характеристики

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!} \cdot z^m = \quad e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^m}{m!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

$$\varphi'(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)}$$

$$\alpha_1 = M[\xi] = \varphi'(1) = \lambda$$

$$\varphi''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}$$

$$\varphi''(1) = \lambda^2$$

$$D[\xi] = \varphi''(1) + \alpha_1 - \alpha_1^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\boxed{M[\xi] = D[\xi] = \lambda}$$

Примеры пуассоновских СВ

- поток отказав элементов оборудования
- поток запросов в поисковике
- поток машин на заправке

Ряд распределения пуассоновской случайной величины имеет вид

ξ	0	1	2	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	...

3. Геометрическое распределение

(обозначение $\xi \in G(p)$).

СВ ξ –число независимых испытаний до первого успеха

Значения ξ: 1, 2, …, n, …

Вероятности значений: $p_m = pq^{m-1}$

Условие нормированности:

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} =$$

3. Геометрическое распределение

(обозначение $\xi \in G(p)$).

СВ ξ –число независимых испытаний до первого успеха

Значения ξ: 1, 2, ..., n, ...

Вероятности значений: $p_m = pq^{m-1}$

Условие нормированности:

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

Числовые характеристики

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} \cdot z^m = pz \sum_{m=1}^{\infty} (qz)^{m-1} =$$

$$= pz \cdot \frac{1}{1-qz} = \frac{pz}{1-qz}$$

$$\varphi'(z) = \frac{p(1-qz) + pzq}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2}$$

Числовые характеристики

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} \cdot z^{m} = pz \sum_{m=1}^{\infty} (qz)^{m-1} =$$

$$= pz \cdot \frac{1}{1-qz} = \frac{pz}{1-qz}$$

$$\varphi'(z) = \frac{p(1-qz) + pzq}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2}$$

$$\alpha_1 = M[\xi] = \varphi'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\varphi''(z)=\frac{2pq}{(1-qz)^3}$$

$$\varphi''(1)=\frac{2pq}{(1-q)^3}=\frac{2pq}{p^3}=\frac{2q}{p^2}$$

$$D[\xi]=\varphi''(1)+\alpha_1-\alpha_1^2=\frac{q}{p^2}$$

Т.о. $\boxed{M[\xi]=\frac{1}{p},\quad D[\xi]=\frac{q}{p^2}}$

Примеры геометрических СВ

- число испытаний прибора до первого отказа

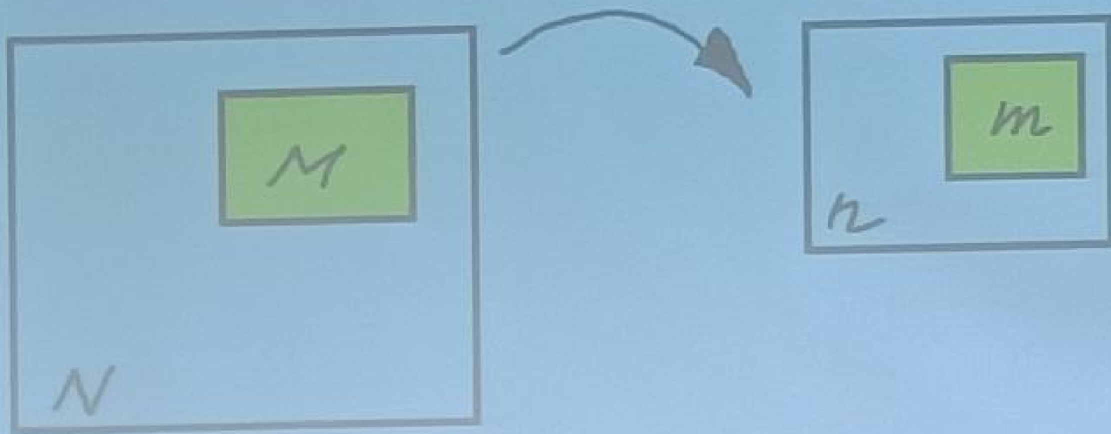
- число проверяемых изделий до обнаружения брака

- число попыток запустить механизм до первого срабатывания

- число выстрелов до первого попадания

4. Гипергеометрическое распределение

(обозначение $\xi \in HG(M, N, n)$).



$$p_m = \frac{C_M^m \, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$M[\xi] = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$D[\xi] = n \cdot \frac{M}{N-1} \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{N^2}$$

Примеры непрерывных СВ

Равномерное распределение

Опр. СВ имеет ***равномерное*** распределение на отрезке $[a;b]$ (запись: $\xi \in R[a;b]$), если плотность вероятности этой СВ постоянна на $[a;b]$ и равна нулю вне его.

Замечание. Выражения «выберем точку А на отрезке $[a;b]$» или «бросим точку А наудачу на отрезок $[a;b]$» означают, что координата точки А есть равномерная СВ, распределённая на $[a;b]$.

Плотность вероятности равномерного распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Применяя формулу $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, нетрудно получить вид функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

x a x b x

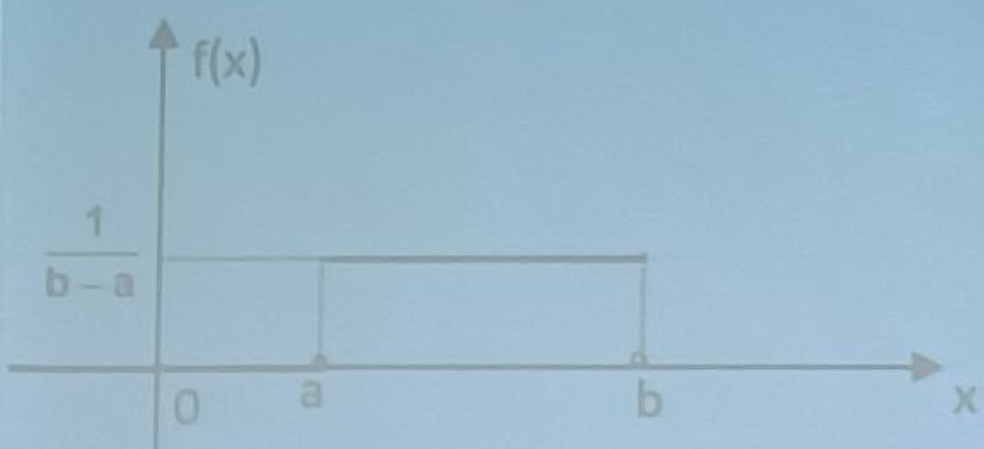
1) $x<a$

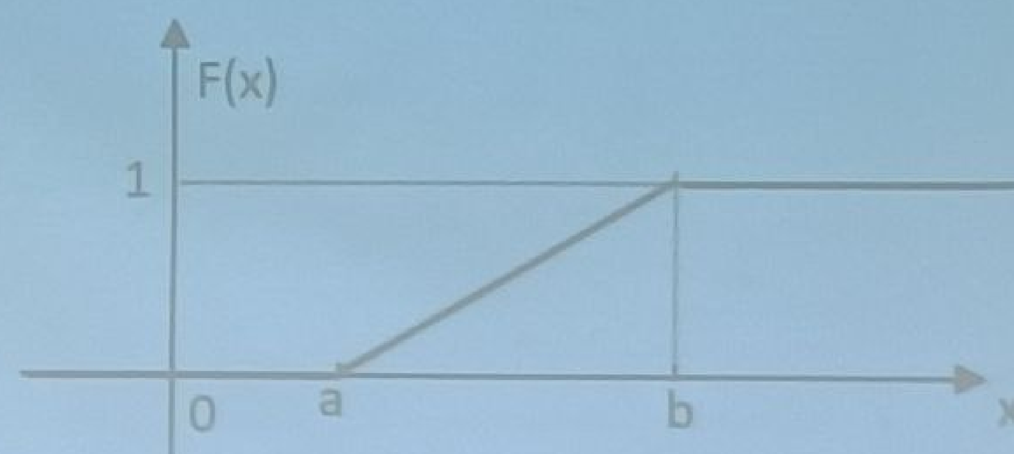
$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0$

2) $a\le x\le b$

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dt+$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





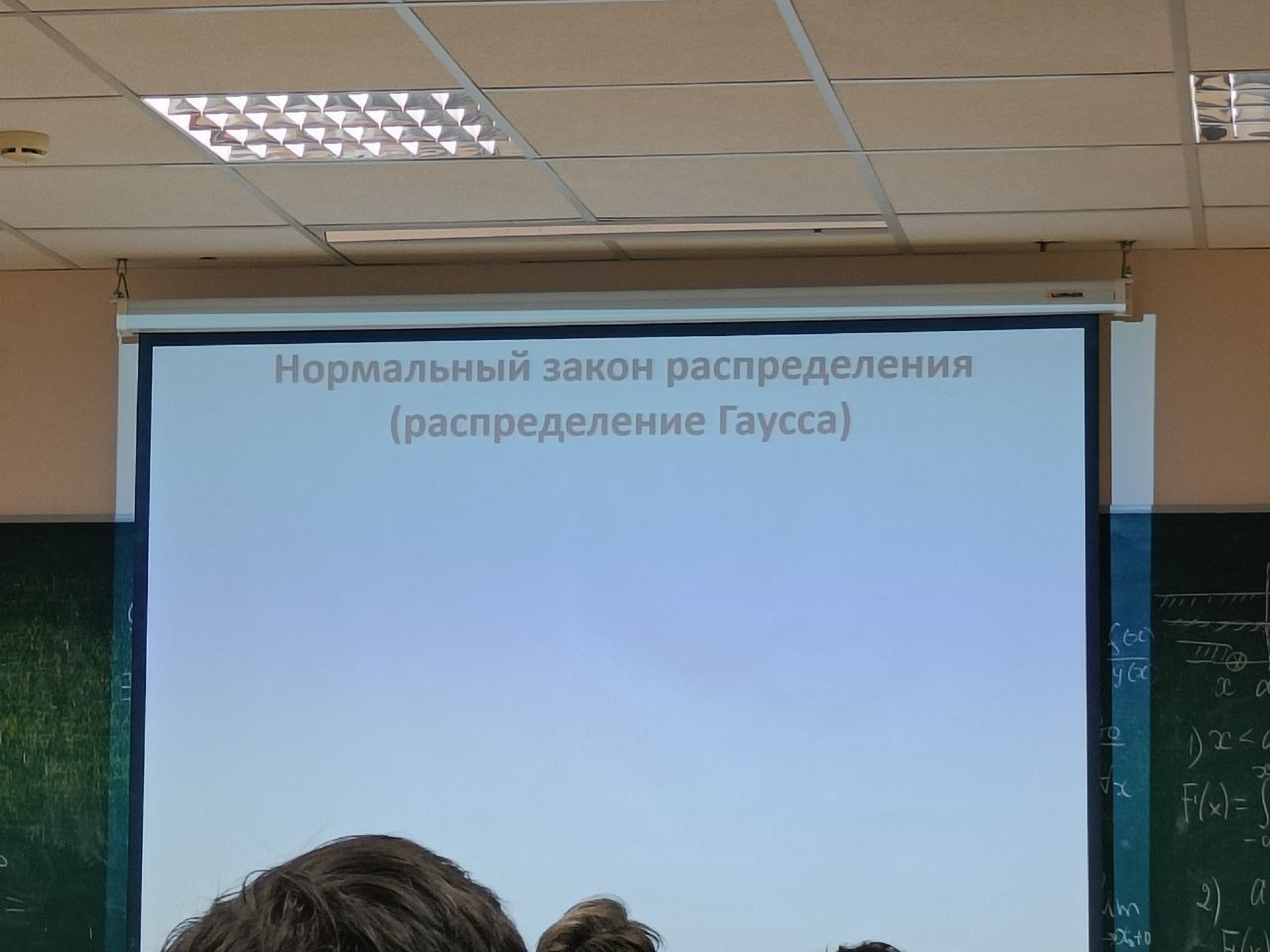
$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2},$$

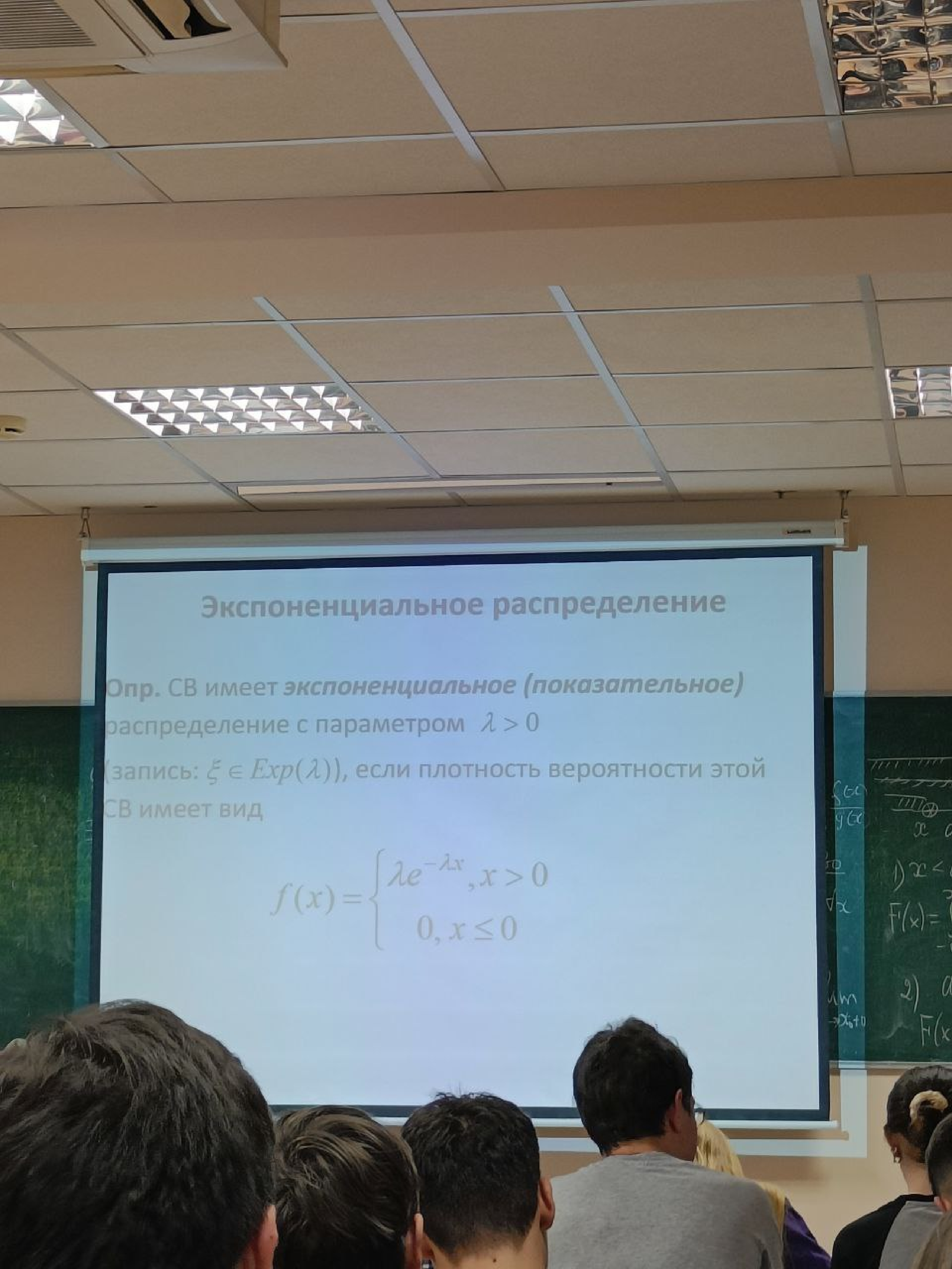
$$D[\xi] = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\sigma[\xi] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

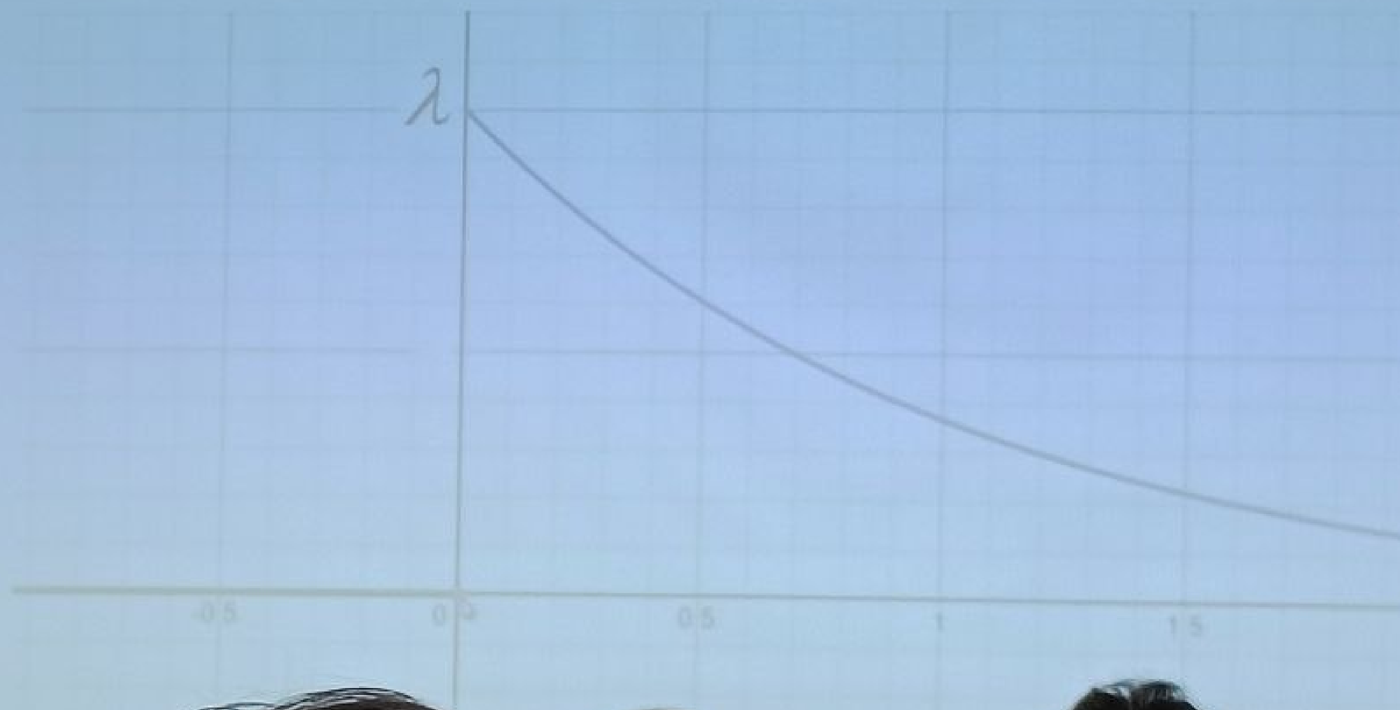
Примеры равномерных СВ

- ошибки округления
- ошибки отсчёта по приборам стрелочного типа
- время ожидания лифта, поезда метро


Нормальный закон распределения
(распределение Гаусса)


Экспоненциальное распределение
Опр. СВ имеет экспоненциальное (показательное) распределение с параметром $\lambda > 0$
(запись: $\xi \in Exp(\lambda)$), если плотность вероятности этой СВ имеет вид
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$



Найдём функцию распределения экспоненциального закона:

При $x \leq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$

При $x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

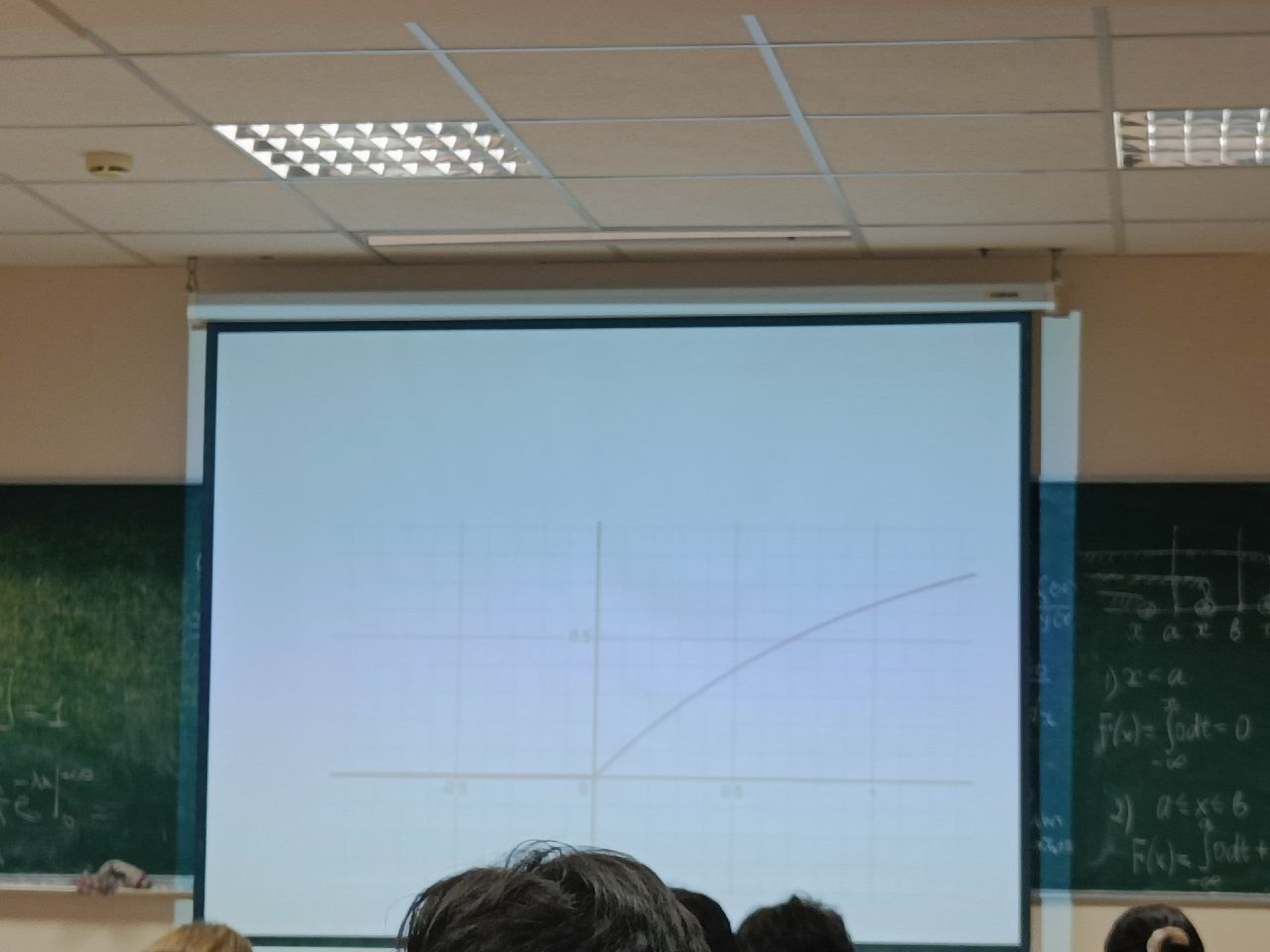
Найдём функцию распределения экспоненциального закона:

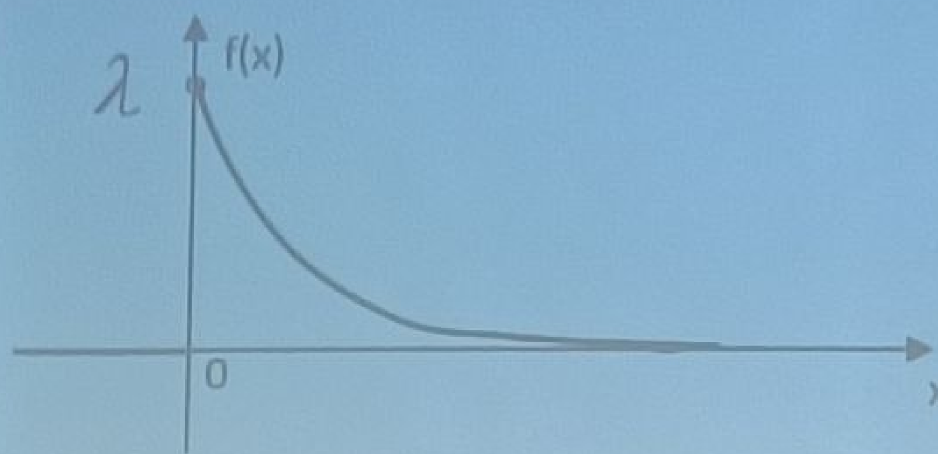
При $x \le 0$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$

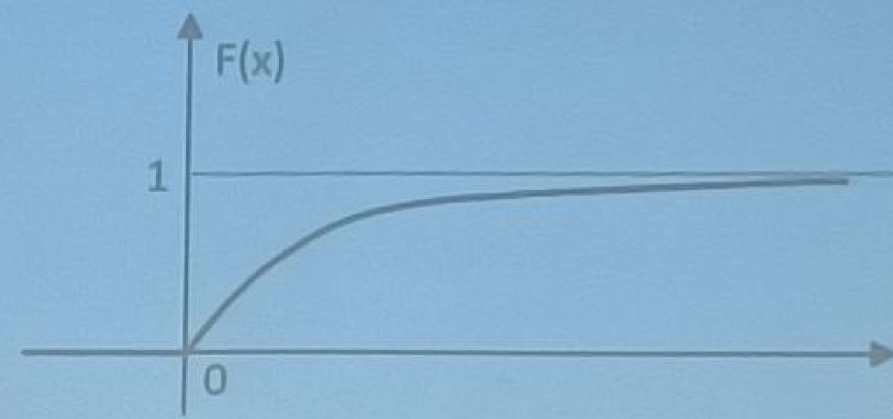
При $x > 0$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1-e^{-\lambda x}.$$

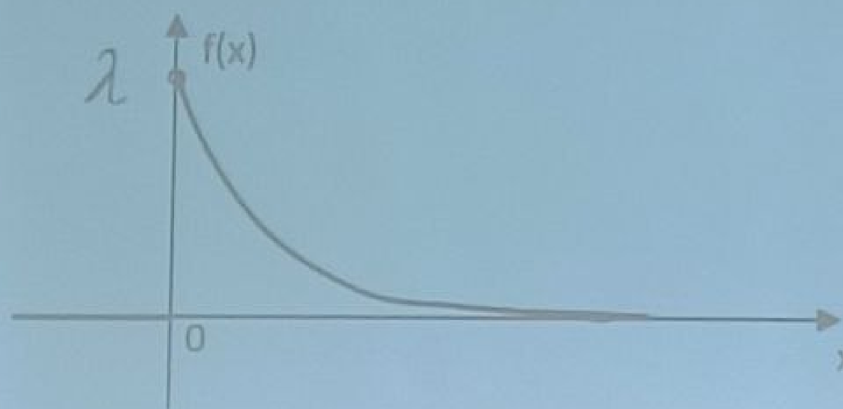
$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

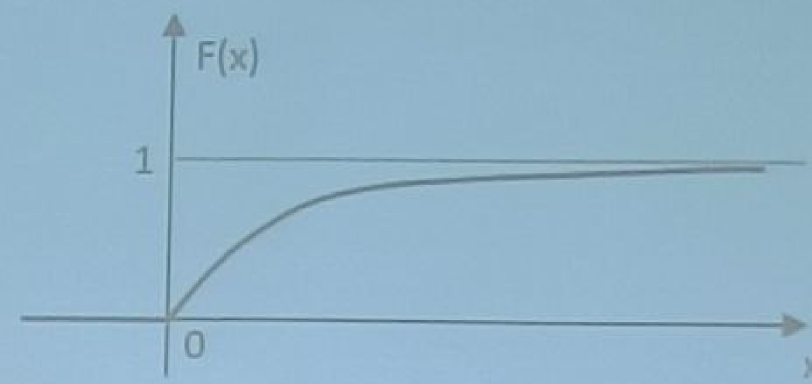

0.5
0
0.5
1
x a x b
1) x < a
F(x) = ∫ 0dt = 0
2) a ≤ x ≤ b
F(x) = ∫ 0dt +





$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\infty} x\cdot \lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}.$$





$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\infty} x\cdot \lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия $D[\xi]=\frac{1}{\lambda^2}.$

$$\sigma[\xi]=\frac{1}{\lambda}.$$