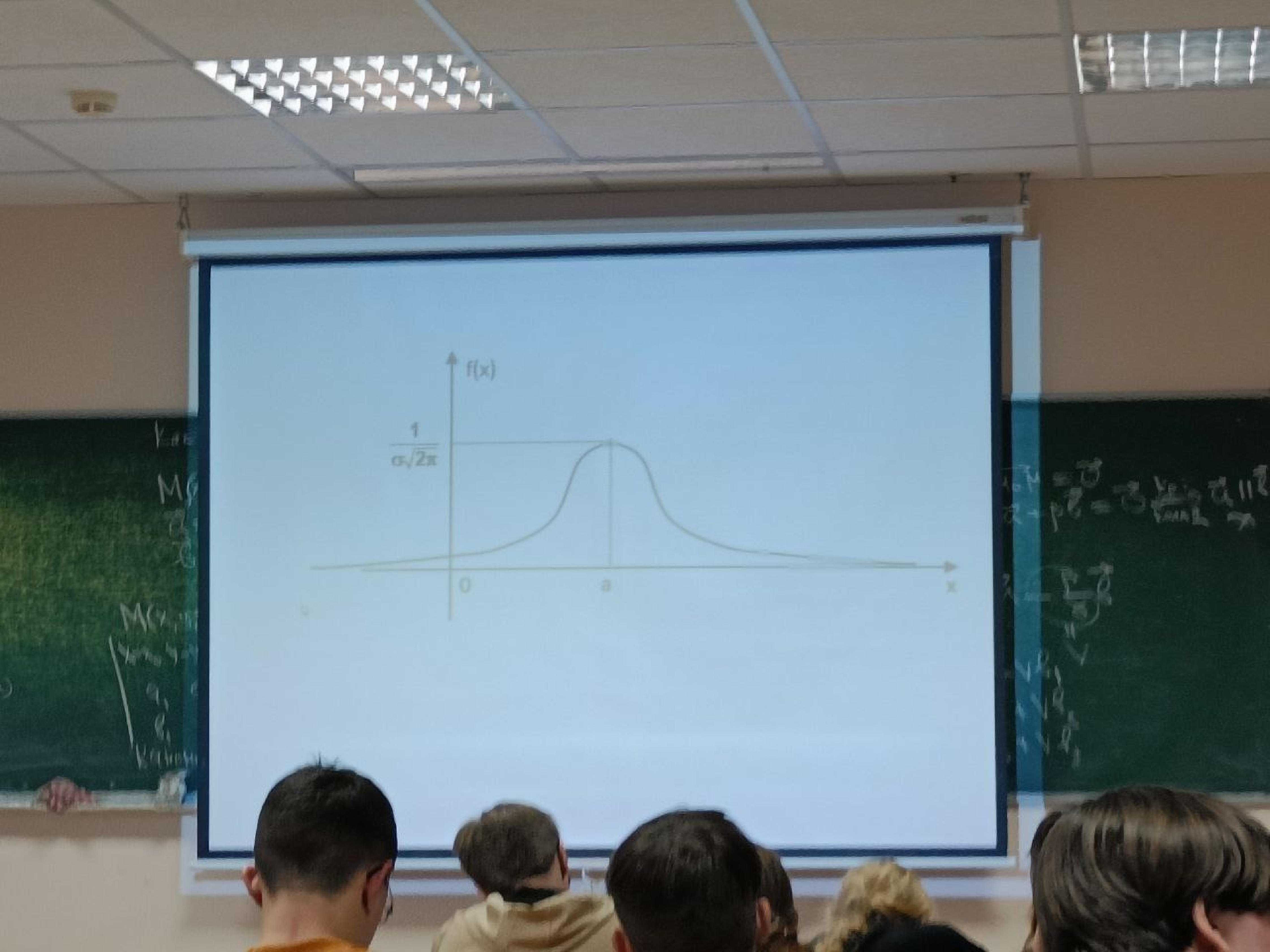
Нормальный закон распределения (распределение Гаусса)

Нормальный закон распределения (распределение Гаусса)

Опр. СВ имеет **нормальное (гауссово)** распределение с параметрами a и $\sigma > 0$, (запись: $\xi \in N(a,\sigma)$), если плотность вероятности этой СВ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Если $a=0, \sigma=1$, т.е. $\xi \in N(0,1)$, то распределение называется **стандартным нормальным**.



f(x)
$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
0
a
x

При этом $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}, x\in R$

Проверка условия нормированности.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$\Big[\ t = \frac{x-a}{\sigma},\quad x = t\sigma + a,$$

При этом $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}, x\in R$

Проверка условия нормированности.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$\left[\, t=\frac{x-a}{\sigma},\ x=t\sigma+a,\right.$$

$$\left. dx=\sigma\, dt,\ -\infty<t<+\infty \,\right] =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{\sqrt{2\pi}\ \text{Интеграл Пуассона}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

Замечание (интеграл Пуассона)

Замечание (интеграл Пуассона)

через I обозначен табличный интеграл (интеграл Пуассона[12])

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

---

[12] Этот интеграл вычисляется так:

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy.$$

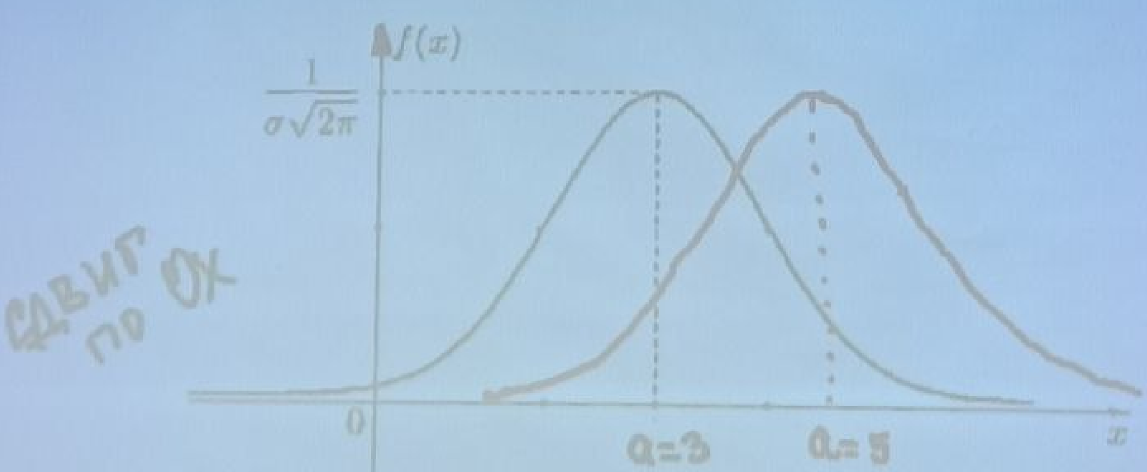
Далее полярная замена переменных: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dx\, dy = r\, dr\, d\varphi,\ x^2 + y^2 = r$

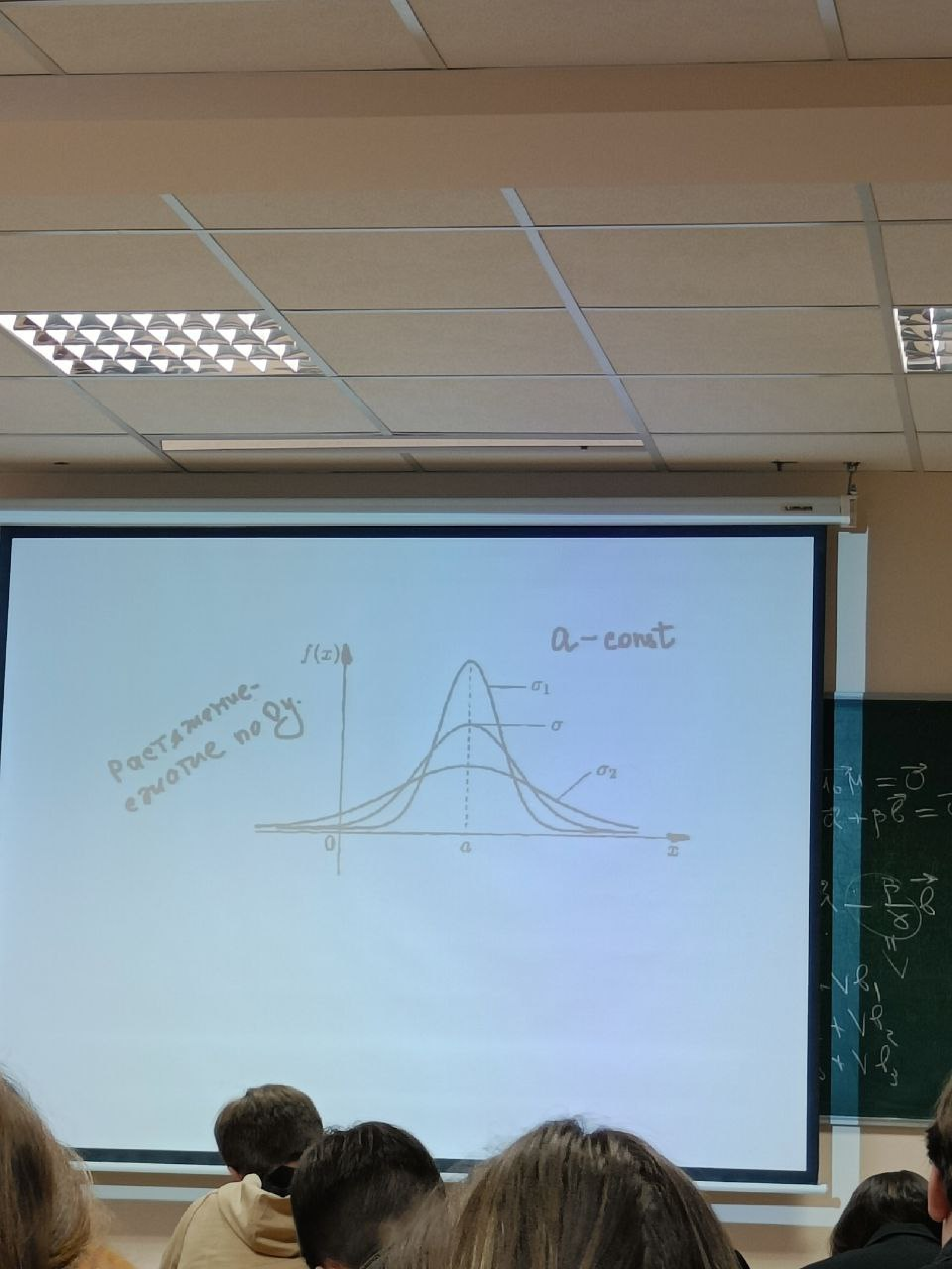
$$I^2 = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} r e^{-r^2/2}\, dr\, d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2/2}\, d(r^2/2)\, d\varphi = 2\pi, \quad I = \sqrt{2\pi}.$$

Кривая Гаусса (нормальная кривая)

Влияние параметров распределения на форму кривой Гаусса

σ – const




a-const
$f(x)$
σ_1
σ
σ_2
0
a
x
растяжение-
сжатие по Oy.

Найдём $F(x)$ для стандартного нормального распределения.

$$F_{станд}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Bigg(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

т.о. для $\xi \in N(0,1)$ $\quad F_{станд}(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$

для $\xi \in N(a,\sigma)$ $\quad \boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}$

Вероятность попадания значений СВ в интервал

$$\boxed{P(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)}$$

т.о. для $\xi \in N(0,1)$ $\quad F_{станд}(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$

для $\xi \in N(a,\sigma)$ $\quad \boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}$

Вероятность попадания значений СВ в интервал

$$\boxed{P(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)}$$

$$P\left(|\xi - a| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$\ldots M = \vec{0}$

$\ldots \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0} \underset{\text{коллн}}{\overset{\text{кр}}{\Longleftrightarrow}} \vec{a} \parallel \vec{b}$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon + a - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon + a - a}{\sigma}\right) = \text{т.е}$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \Phi\left(+\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Правило трёх сигм

Положим $\varepsilon = \sigma$:

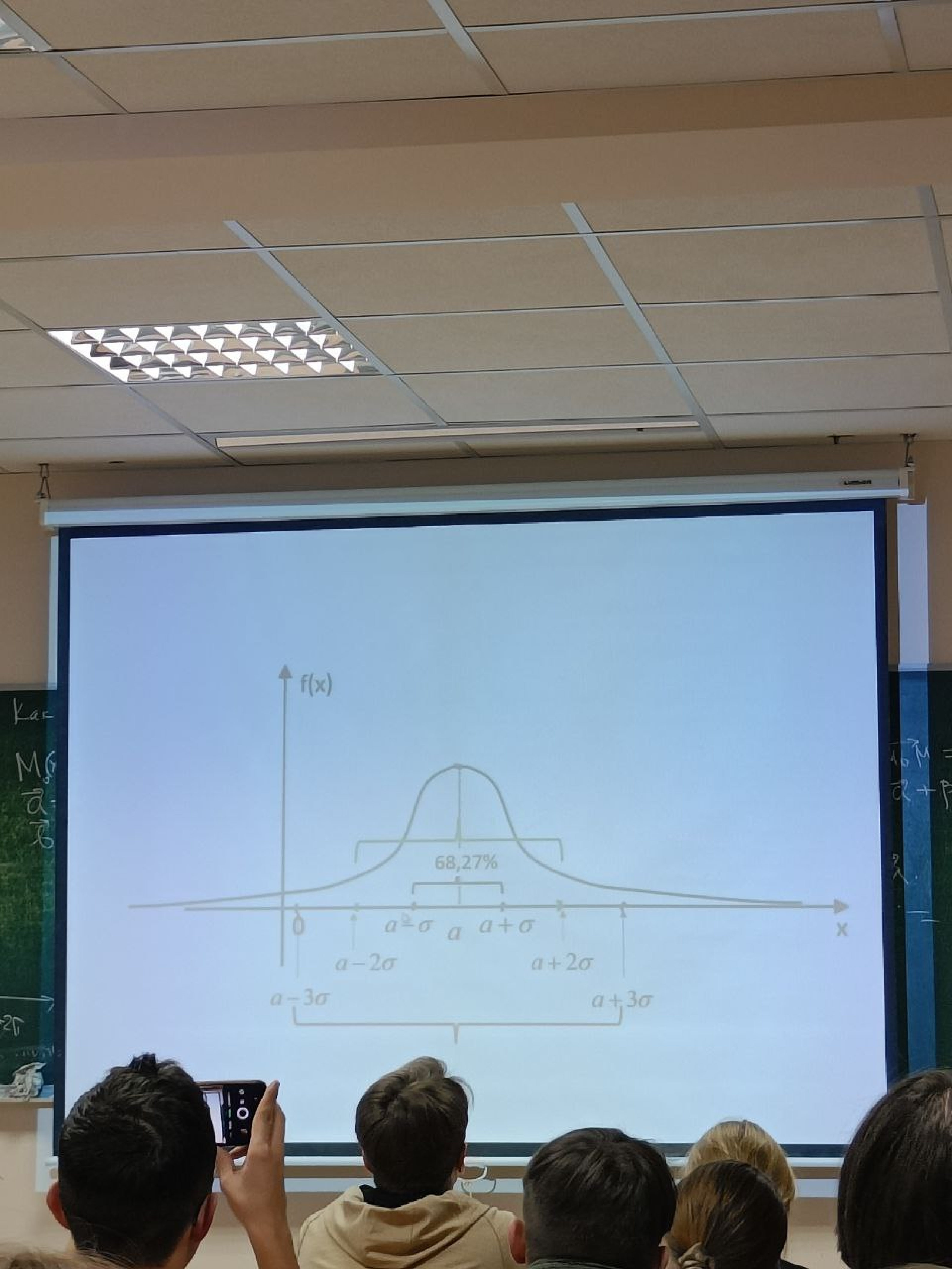
$$P(|\xi - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6827$$

Положим $\varepsilon = 2\sigma$:

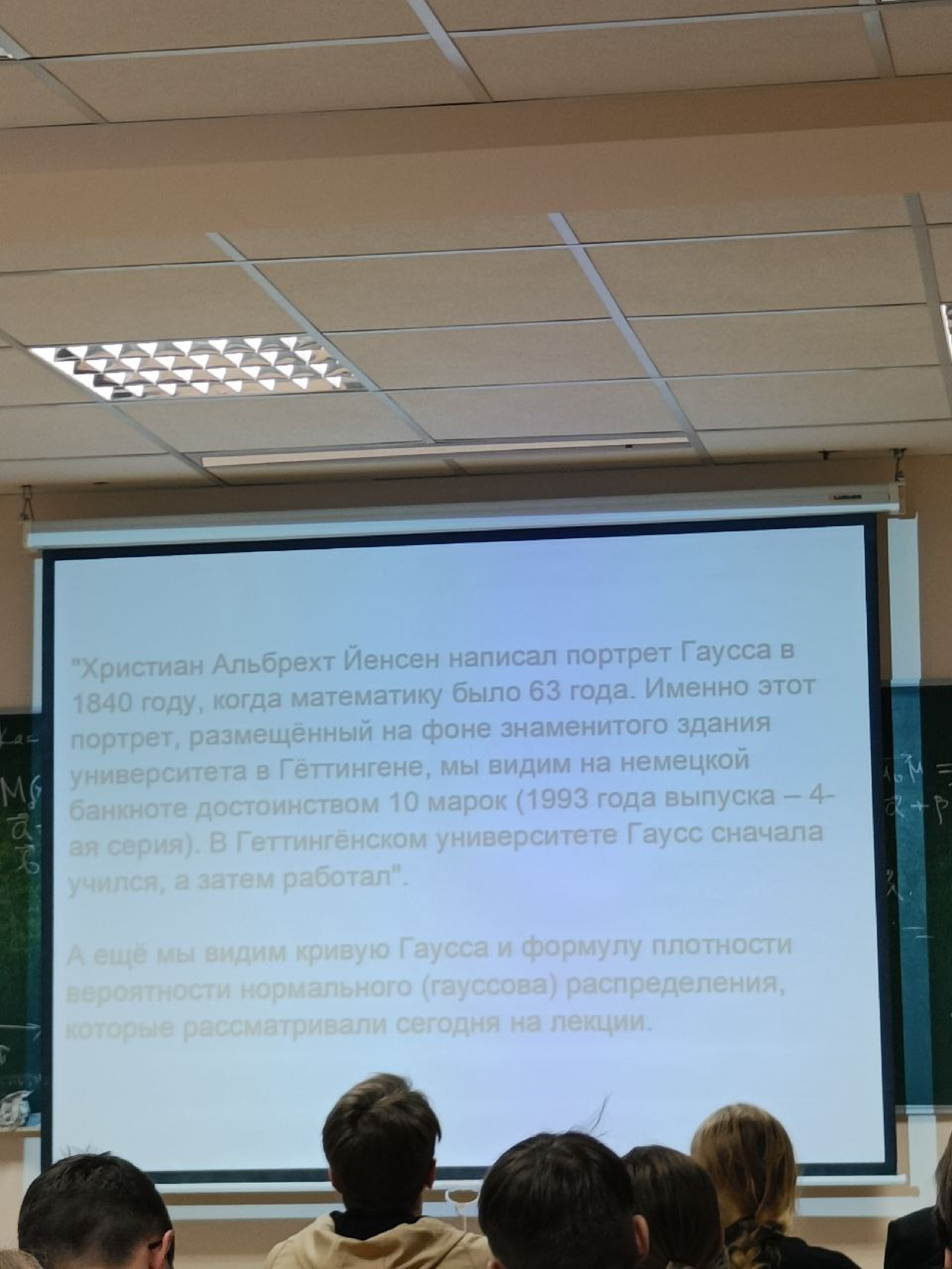
$$P(|\xi - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9545$$

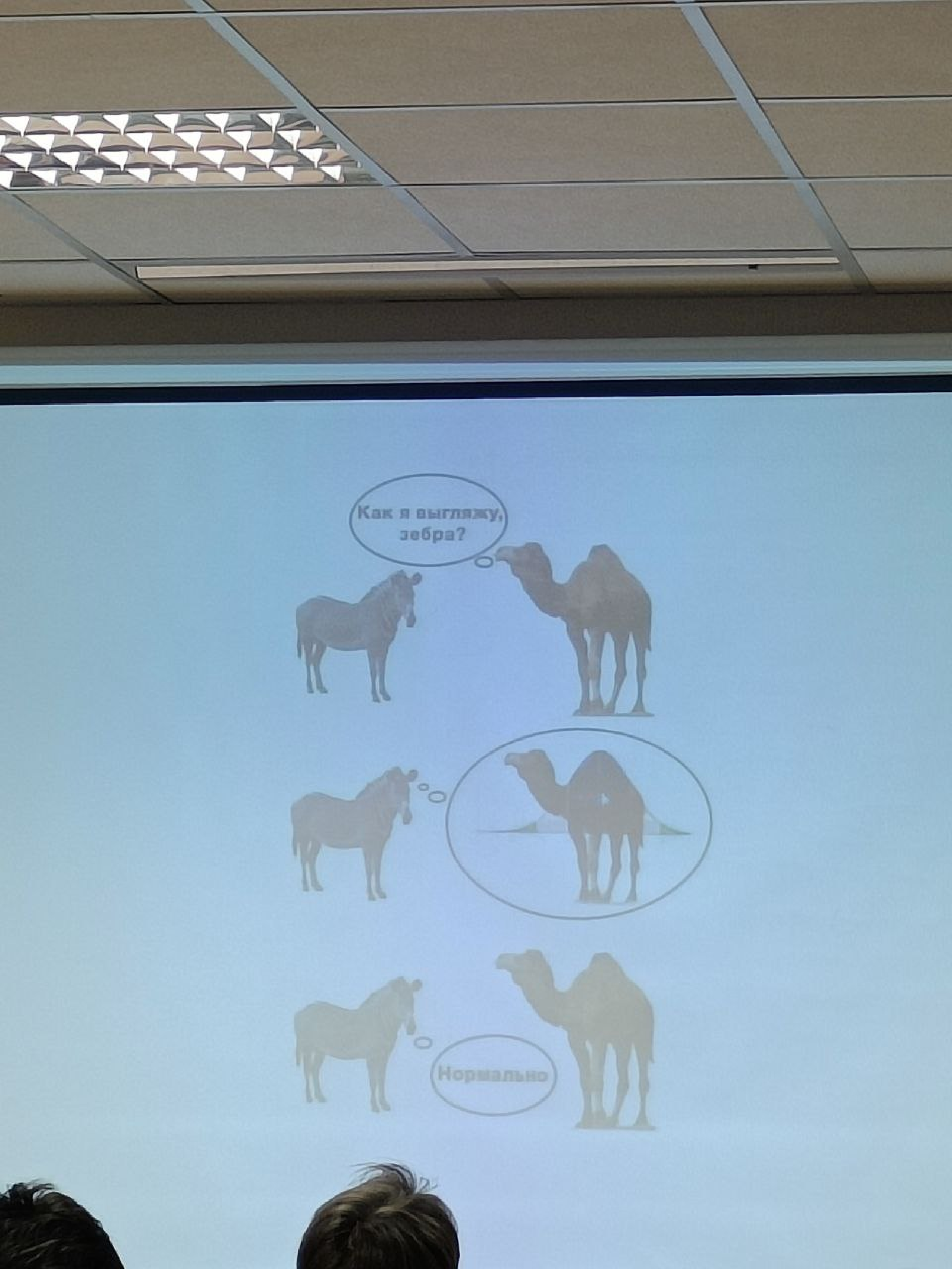
Положим $\varepsilon = 3\sigma$:

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$$



f(x)
68,27%
0
a−σ
a
a+σ
x
a−2σ
a+2σ
a−3σ
a+3σ


"Христиан Альбрехт Йенсен написал портрет Гаусса в 1840 году, когда математику было 63 года. Именно этот портрет, размещённый на фоне знаменитого здания университета в Гёттингене, мы видим на немецкой банкноте достоинством 10 марок (1993 года выпуска – 4-ая серия). В Геттингёнском университете Гаусс сначала учился, а затем работал".
А ещё мы видим кривую Гаусса и формулу плотности вероятности нормального (гауссова) распределения, которые рассматривали сегодня на лекции.


Как я выгляжу, зебра?
Нормально

Числовые характеристики распределения Гаусса

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left[\frac{x-a}{\sigma} = t \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma + a) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{0} + \underbrace{\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}_{\sqrt{2\pi}} = a$$

Числовые характеристики распределения Гаусса

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \qquad \boxed{M[\xi] = a}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left[\frac{x-a}{\sigma} = t\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma + a)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt} + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}_{\sqrt{2\pi}} = a$$

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \left[\frac{x-a}{\sigma} = t\right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t^2}_{= t\cdot t} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t}_{u}\, d\big(\underbrace{-e^{-\frac{t^2}{2}}}_{v}\big) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-t e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right) =$$

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \left[\frac{x-a}{\sigma} = t\right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{t\cdot t}{\underset{\parallel}{t^2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t}_{u}\, d\big(\underbrace{-e^{-\frac{t^2}{2}}}_{v}\big) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-t e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + \sqrt{2\pi}\right) = \sigma^2 \Rightarrow \boxed{D[\xi] = \sigma^2;\ \sigma[\xi] = \sigma}$$

Примеры нормальных распределений

- рост взрослого мужчины
- диаметр дерева (однородный лес, один возраст деревьев)
- процентное содержание консерванта (в партии консервов)

- балл ЕГЭ по математике (после манипуляций со шкалой перевода)

Гамма-распределение

Опр. СВ $\xi \in \Gamma(\alpha; \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

Гамма-распределение

Опр. СВ $\xi \in \Gamma(\alpha; \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x}, & x > 0 \end{cases}$$

Условие нормированности:

$$1 = \int_0^{+\infty} Cx^{\lambda-1}e^{-\alpha x}\,dx =$$

$$= \frac{C}{\alpha^\lambda}\int_0^{+\infty} (\alpha x)^{\lambda-1}e^{-\alpha x}\,dx = \frac{C}{\alpha^\lambda}\Gamma(\lambda)$$

$$\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x}\, dx$$ — гамма-функция Эйлера.

Функция распределения $F(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{x} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}\, dt.$

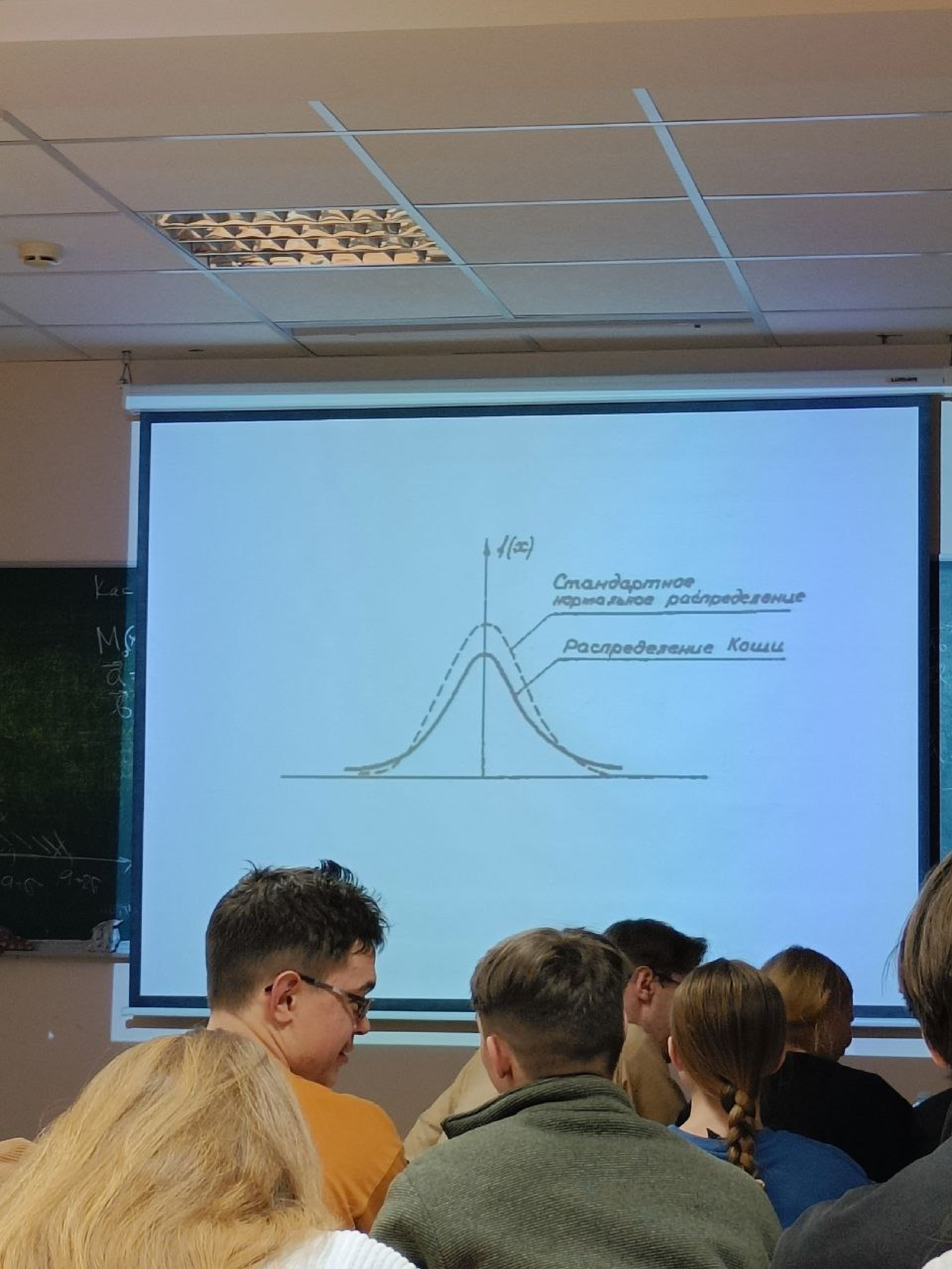
Распределение Коши

Опр. СВ $\xi \in C(\alpha; \sigma), \alpha \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, если

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - \alpha)^2}$$

Функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\left(\frac{x - a}{\sigma}\right), \; x \in \mathbb{R}.$$


f(x)
Стандартное
нормальное распределение
Распределение Коши

Сводка основных распределений

Распределение	График* распределения	Закон** распределения	Параметры распределения	Математическое ожидание	Дисперсия
бернуллиево					
биномиальное					
Пуассоновское					
геометрическое					
гипергеометрическое					
равномерное ***					
экспоненциальное***					
нормальное (Гаусса)***					

* Для ДСВ: столбиковая диаграмма, для НСВ: графики плотности и функции распределения

** Для ДСВ: формула p_m, для НСВ: функции плотности вероятности и функции распределения

*** По две строки: для f(x) и F(x)

Сдать на следующей лекции (подписать ручкой)!