Случайные векторы

Кафедра прикладной математики и механики

Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике

Случайные векторы

Определение

Упорядоченный набор случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных исходов, называется n-**мерной СВ** (случайным вектором, системой СВ).

Одномерные СВ $X_i, i \in \overline{1, n}$ – **компоненты** случайного вектора.

Положим для определенности $n = 2$ и рассмотрим ниже двумерные случайные векторы.

Случайные векторы

Определение

Упорядоченный набор случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных исходов, называется **n-мерной СВ** (случайным вектором, системой СВ).

Одномерные СВ $X_i, i \in \overline{1,n}$ – **компоненты** случайного вектора.

Положим для определенности $n = 2$ и рассмотрим ниже двумерные случайные векторы.

Обозначение (для удобства): (X, Y).

Функция распределения системы двух СВ

Определение

Функцией распределения случайного вектора (X, Y) называется вероятность совместного наступления событий $X < x, Y < y$.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

$F(x, y)$ называют двумерной функцией распределения.

Геометрически $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки в бесконечный квадрант с вершиной в токе (x, y).

Свойства $F(x, y)$

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.
2. F(x,y) не убывает по каждому из своих аргументов (при фиксированном другом):
   при $x_2 > x_1$ $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$,
   при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.
3. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$.
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.
5. $F(x, +\infty) = F_X(x) = F_1(x)$,
   $F(+\infty, y) = F_Y(y) = F_2(y)$ – функции распределения компонент случайного вектора (одномерные функции распределения).

Свойства $F(x, y)$

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.
2. F(x,y) не убывает по каждому из своих аргументов (при фиксированном другом):
   при $x_2 > x_1$ $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$,
   при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.
3. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$.
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.
5. $F(x, +\infty) = F_X(x) = F_1(x)$,
   $F(+\infty, y) = F_Y(y) = F_2(y)$ – функции распределения компонент случайного вектора (одномерные функции распределения).
6. Вероятность попадания в прямоугольник D

$$P((X, Y) \in D) = P(\alpha \le X < \beta,\ \gamma \le Y < \delta) =$$

$$= F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma).$$

Дискретные случайные векторы

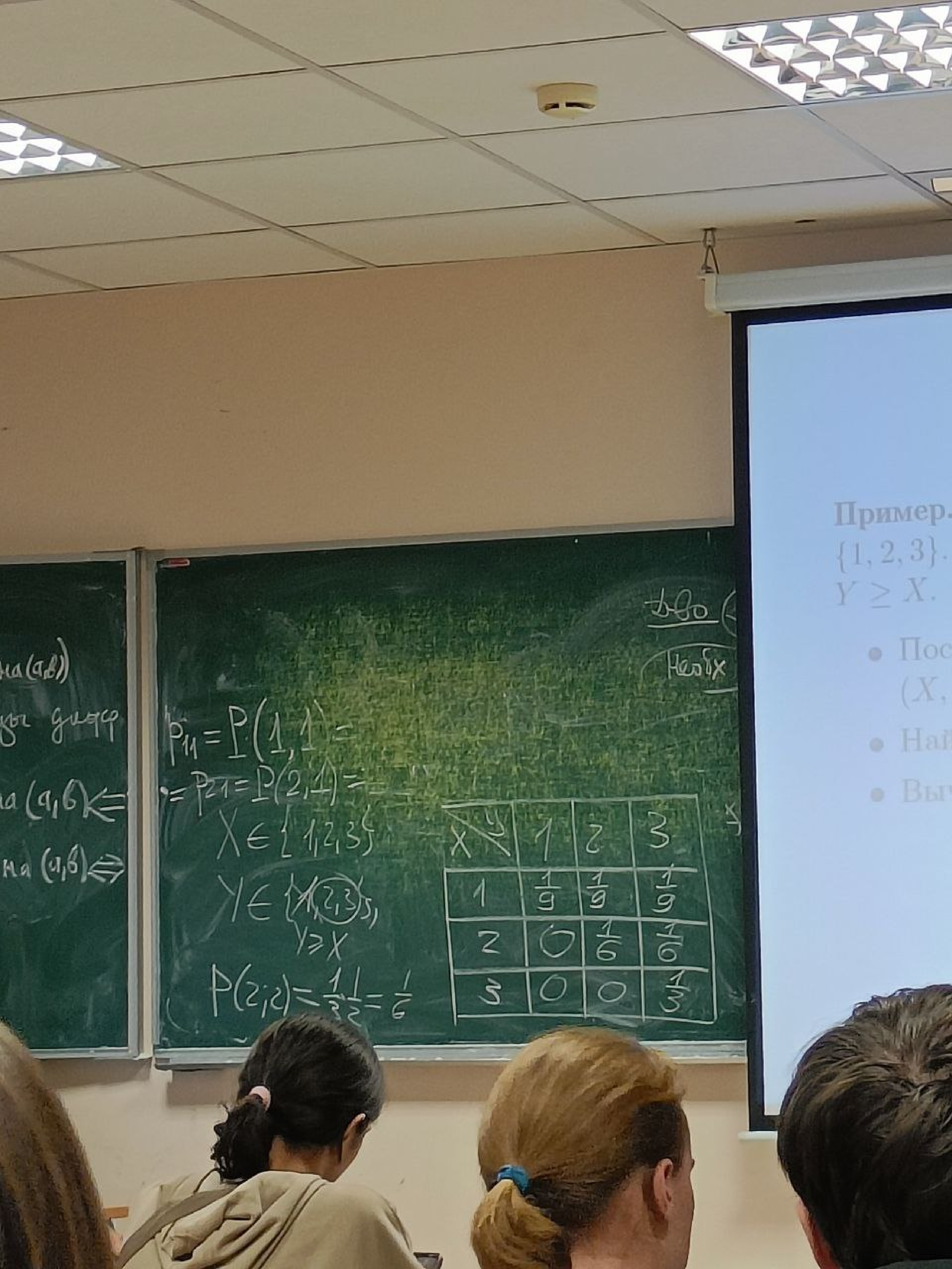
Двумерная СВ называется дискретной, если множество ее значений конечно или счетно.

- Закон распределения дискретной СВ (X, Y) задается таблицей.
- Условие нормированности: $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1$.
- $p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j),\ i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m}$.
- Функция распределения случайного вектора

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}.$$

Пример. Число X наудачу выбирается из множества $\{1, 2, 3\}$. Затем из того же множества выбирается число $Y \geq X$.

- Построить таблицу распределения случайного вектора (X, Y).
- Найти $F(x, y)$.
- Вычислить вероятность $P(1{,}5 \leq X < 2{,}4; 0{,}5 \leq Y < 4)$.



Пример.
{1, 2, 3}.
Y ≥ X.
P11 = P(1,1) =
= P21 = P(2,1) =
X ∈ {1,2,3}
Y ∈ {1,2,3},
Y≥X
P(2,2) = 1/3 · 1/2 = 1/6
x \ y | 1 | 2 | 3
1 | 1/9 | 1/9 | 1/9
2 | 0 | 1/6 | 1/6
3 | 0 | 0 | 1/3

Непрерывные случайные векторы. Плотность вероятности

Пусть имеется непрерывный случайный вектор (X, Y), который интерпретируется случайной точкой на плоскости xOy.

Рассмотрим на этой плоскости малый прямоугольник со сторонами $\triangle x$ и $\triangle y$, примыкающий к точке (x, y).

Вероятность попадания в этот прямоугольник

$$P((X,Y) \in D_{\triangle}) = F(x + \triangle x, y + \triangle y) -$$

$$-F(x + \triangle x, y) - F(x, y + \triangle y) + F(x, y).$$

Непрерывные случайные векторы. Плотность вероятности

Пусть имеется непрерывный случайный вектор (X, Y), который интерпретируется случайной точкой на плоскости xOy.

Рассмотрим на этой плоскости малый прямоугольник со сторонами $\triangle x$ и $\triangle y$, примыкающий к точке (x, y).

Вероятность попадания в этот прямоугольник

$$P((X,Y) \in D_{\triangle}) = F(x + \triangle x, y + \triangle y) -$$

$$-F(x + \triangle x, y) - F(x, y + \triangle y) + F(x, y).$$

Пусть $F(x, y)$ непрерывна и дифференцируема по каждому аргументу. Тогда

$$\lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \frac{P((X,Y) \in D_\triangle)}{\triangle x \triangle y} =$$

$$= \lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \frac{F(x+\triangle x, y+\triangle y) - F(x+\triangle x, y) - F(x, y+\triangle y) + F(x,y)}{\triangle x \triangle y} =$$

$$= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

$$\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}} \frac{P((X,Y)\in D_\triangle)}{\triangle x\triangle y}=$$

$$=\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}} \frac{F(x+\triangle x,y+\triangle y)-F(x+\triangle x,y)-F(x,y+\triangle y)+F(x,y)}{\triangle x\triangle y}=$$

$$=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

$f(x,y)$ – **плотность вероятности случайного вектора.**

Геометрически $f(x,y)$ задает поверхность распределения.

Свойства $f(x, y)$

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $P((X, Y) \in D) = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$
3. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dudv$
4. Условие нормированности: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dxdy = 1$
5. Одномерные плотности распределения составляющих

$$f_1(x) = f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_2(y) = f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Доказательство

1) Следует из неубывания $F(x, y)$ по своим аргументам.

2) $P(x \leq X < x + dx,\ y \leq Y < y + dy) \approx f(x, y)dxdy$ – элемент вероятности двумерной СВ (вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник со сторонами $dx,\ dy$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка (по сравнению с $dx,\ dy$). Разбив D на прямоугольники и применив к каждому формулу для вычисления вероятности попадания в прямоугольник, получаем при $\triangle x \to 0, \triangle y \to 0$ требуемое.

Д-во

Необх

$p_{11} = P(1,1) =$

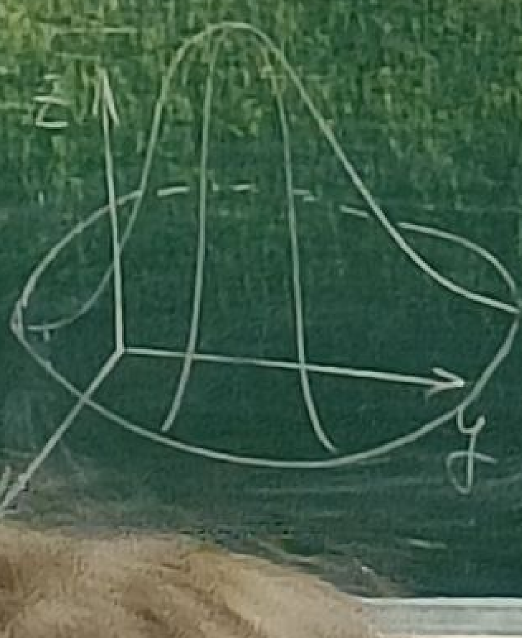
$= p_{21} = P(2,1) =$

$X \in \{1, 2, 3\}$

$Y \in \{\cancel{1}, 2, 3, 5,$

$y \geq x$

$P(2;2) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} =$



Доказательство

3)

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = P(-\infty < X < x, -\infty < Y < y) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du dv$$

3)

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = P(-\infty < X < x,\ -\infty < Y < y) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du dv$$

4) Следует из свойства 3) и того, что $F(+\infty, +\infty) = 1$

Доказательство

5) Функции распределения компонент случайного вектора

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, du dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, dy \right) du \quad (1)$$

Доказательство

5) Функции распределения компонент случайного вектора

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, du dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, dy \right) du \quad (1)$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dx dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v)\, dx \right) dv \quad (2)$$

Доказательство

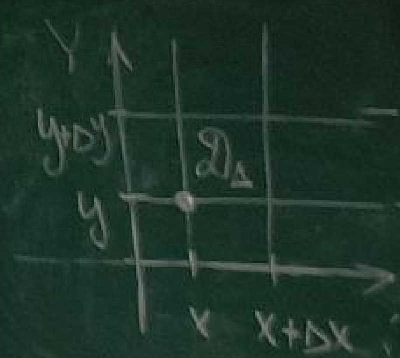
5) Функции распределения компонент случайного вектора

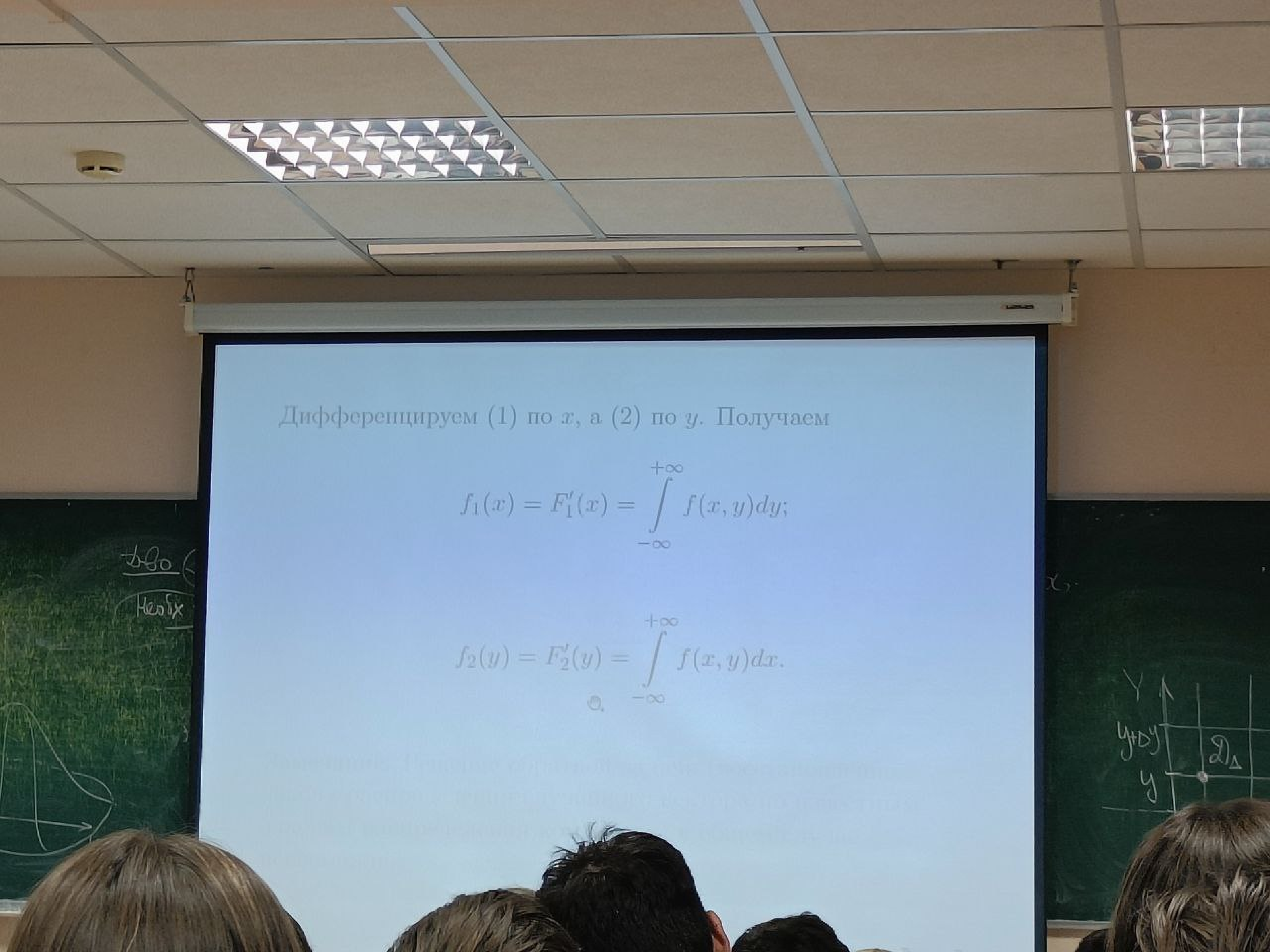
$$F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,du dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,dy\right) du \quad (1)$$

$$F_2(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,v)\,dx dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dx\right) dv \quad (2)$$




Дифференцируем (1) по x, а (2) по y. Получаем
$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy;$
$f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$

Дифференцируем (1) по x, а (2) по y. Получаем

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy;$$

$$f_2(y) = F_2'(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Замечание. Решение обратной задачи (восстановление закона распределения случайного вектора по известным законам распределения компонент) в общем случае невозможно.