Условные распределения вероятности

Кафедра прикладной математики и механики

Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике

Постановка задачи

Одной из типичных задач ТВ является прогноз возможного значения СВ Y по результату наблюдения другой СВ X.

- Прогноз метеорологических показателей
- Прогноз [illegible]

Постановка задачи

Одной из типичных задач ТВ является прогноз возможного значения СВ Y по результату наблюдения другой СВ X.

- Прогноз метеорологических показателей.
- Прогноз стоимости ценных бумаг, обменного курса валюты, ...
- L, H – длина и вес осколка снаряда. Найти распределение массы осколков при фиксированной длине (например, распределение $\{L|H = 10g\}$)или осуществить прогноз длины осколка при фиксированной массе.

Постановка задачи

Прогноз, разумеется, носит вероятностный характер и должен отвечать на вопросы:

- если $X = x$ (наблюдение), то какова вероятность $P(\alpha \leq Y < \beta)$?
- если $X = x$ (наблюдение), то какова максимальная вероятность $P_{max}(Y = y)$?
- если $X = x$ (наблюдение), то чему равно $M(Y|X = x)$?

Условные законы распределения

Опр. Условным законом распределения одной из компонент случайного вектора (X, Y) называется ее закон распределения, найденный при условии, что другая СВ (компонента) приняла фиксированное значение.

1) Пусть (X, Y) — дискретный случайный вектор, $p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$.

В соответствии с определением условной вероятности событий $\left(P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \right)$ определим

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)}$$

Условные законы распределения

В соответствии с определением условной вероятности событий $\left(P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}\right)$ определим

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)}$$

или коротко: $p(y_j/x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{x_i}}$. (*)

Условные законы распределения

Совокупность вероятностей (*)

$$p(y_1/x_i), p(y_2/x_i), p(y_3/x_i), \ldots, p(y_m/x_i)$$

представляет собой **условный закон распределения СВ** Y **при условии, что** $X = x_i$.

При этом

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1$$

Условные законы распределения

Совокупность вероятностей (*)

$$p(y_1/x_i), p(y_2/x_i), p(y_3/x_i), \ldots, p(y_m/x_i)$$

представляет собой **условный закон распределения СВ Y при условии, что $X = x_i$.**

При этом

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1$$

Аналогично определяется условный закон распределения СВ X при условии, что $Y = y_j$.

Условные законы распределения

При этом

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1$$

Аналогично определяется условный закон распределения СВ X при условии, что $Y = y_j$.

$$P(X = x_i/Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

или $\quad p(x_i/y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}$.

2) Пусть (X, Y) – непрерывная двумерная СВ с плотностью вероятности $f(x, y)$.

$f_1(x), f_2(y)$ – плотности вероятности компонент случайного вектора X и Y соответственно.

Найдем функции условных распределений.

Предположим дополнительно, что $f(x, y)$ непрерывна по обеим переменным и изучим асимптотическое поведение вероятности $P(Y < y| \ \ x \leq X < x + \Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ в тех точках x, что $f_1(x) > 0$.

$$P(Y < y| \;\; x \le X < x + \Delta\, x) = \frac{P(Y < y, \;\; x \le X < x + \Delta\, x)}{P(x \le X < x + \Delta\, x)} =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(u, v)\, du\, dv}{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f_1(t)\, dt} =$$

[применяем теорему о среднем для интегралов]

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x + \lambda_1 \Delta\, x, v)\, dv \cdot \Delta\, x}{f_1(x + \lambda_2 \Delta\, x) \cdot \Delta\, x},$$

где $0 < \lambda_i < 1, \;\; i \in \overline{0, 1}$.

Используя непрерывность функций $f(x,y)$ и $f_1(x)$, определим условную вероятность распределения Y относительно события $X = x$.

Устремим $\Delta\, x \to 0$.

$$F(y/x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(Y < y|\ \ x \le X < x + \Delta\, x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,v)\, dv}{f_1(x)}$$

– функция распределения Y при условии, что X фиксировапо.

Условная плотность вероятности

$$f(y/x) = \frac{d}{dy} \ldots = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots}$$

Используя непрерывность функций $f(x, y)$ и $f_1(x)$, определим условную вероятность распределения Y относительно события $X = x$.

Устремим $\Delta x \to 0$.

$$F(y/x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(Y < y| \; x \leq X < x + \Delta x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dv}{f_1(x)}$$

– функция распределения Y при условии, что X фиксировано.

Условная плотность вероятности

$$f(y/x) = \frac{d}{dy}(F(y/x)) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\text{[illegible]}}$$

Используя непрерывность функций $f(x, y)$ и $f_1(x)$, определим условную вероятность распределения Y относительно события $X = x$.

Устремим $\Delta\, x \to 0$.

$$F(y/x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(Y < y|\ \ x \le X < x + \Delta\, x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dv}{f_1(x)}$$

– функция распределения Y при условии, что X фиксировано.

Условная плотность вероятности

$$f(y/x) = \frac{d}{dy}(F(y/x)) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy}.$$

Аналогично получаем

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx}.$$

Замечание.
Значения x, в которых $f_1(x) = 0$ (значения y, в которых $f_2(y) = 0$) можно исключить из области значений СВ X (СВ Y), т.к. они в совокупности образуют множество нулевой вероятности.

Зависимость и независимость двух СВ

Опр. Случайные величины X и Y называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая СВ.