**Опр.** Случайные величины $X$ и $Y$ называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая СВ.

$X$ и $Y$ независимы, если независимы события $X < x$ и $Y < y$ для любых действительных $x, y$.

**Теорема 1**

($X$ и $Y$ независимы) $\Leftrightarrow$ $(F(x,y) = F_1(x)F_2(y))$

**Теорема 1**

($X$ и $Y$ независимы) $\Leftrightarrow$ $(F(x,y) = F_1(x)F_2(y))$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

($X, Y$ –независимы)$\Leftrightarrow$
(события $X < x$, $Y < y$ независимы)$\Leftrightarrow$
$(P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y))$.

$f: X \to Y$ $\lim\limits_{\mathcal{B}(a)} f(x) =$

$\mathcal{B}^X(a) = \{ B(a),$

$T_1 = \{a, x_1, b\}$

$= \{a, x_2, b\}$

Опр $T_1$

1) $\Delta$;

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$P(AB) = P(A)P(B)$,

$A, B$ - незав

**Теорема 1**

(X и Y независимы) $\Leftrightarrow$ $(F(x,y) = F_1(x)F_2(y))$

*Доказательство.*

($X, Y$ -независимы)$\Leftrightarrow$
(события $X < x$, $Y < y$ независимы)$\Leftrightarrow$
$(P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y))$,

**Теорема 1**

($X$ и $Y$ независимы) $\Leftrightarrow$ $(F(x, y) = F_1(x)F_2(y))$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

($X, Y$–независимы)$\Leftrightarrow$
(события $X < x$, $Y < y$ независимы)$\Leftrightarrow$
$(P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y))$,

т.е. $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$. $\square$

**Замечание.**

Для независимых случайных величин $X$ и $Y$
$F_1(x) = F_1(x/y);\ F_2(y) = F_2(y/x).$

**Теорема 2**

$(X$ и $Y$ непрерывные, независимые$) \Leftrightarrow (f(x,y) = f_1(x) f_2(y))$.

**Замечание.**

Иными словами, $f_1(x) = f_1(x/y);\ f_2(y) = f_2(y/x).$

**Теорема 3**

$(X$ и $Y$ дискретные, независимые$)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j))$ или $p_{ij} = p_i p_j$.

**Замечание.**
Для независимых случайных величин $X$ и $Y$
$F_1(x) = F_1(x/y)$; $F_2(y) = F_2(y/x)$.

**Теорема 2**

($X$ и $Y$ непрерывные, независимые) $\Leftrightarrow (f(x,y) = f_1(x)f_2(y))$.

**Замечание.**
Иными словами, $f_1(x) = f_1(x/y)$; $f_2(y) = f_2(y/x)$.

**Теорема 3**

($X$ и $Y$ дискретные, независимые)$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j))$ или $p_{ij} = p_i p_j$.

**Опр. Математическим ожиданием** двумерной СВ $(X, Y)$ называется совокупность математических ожиданий

$$M[X] = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = m_X; \; M[Y] = \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = m_Y,$$

если $(X, Y)$ – дискретный случайный вектор.

**Опр. Математическим ожиданием** двумерной СВ $(X, Y)$ называется совокупность математических ожиданий

$$M[X] = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = m_X; \; M[Y] = \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = m_Y,$$

если $(X, Y)$ – дискретный случайный вектор.

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y)\, dx\, dy, \;\; M[Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y)\, dx\, dy,$$

если $(X, Y)$ – непрерывный случайный вектор.

**Опр. Дисперсией** двумерной СВ $(X,Y)$ называется совокупность дисперсий

$$D[X]=\sum_i\sum_j (x_i-m_X)^2 p_{ij};\quad D[Y]=\sum_i\sum_j (y_j-m_Y)^2 p_{ij},$$

если $(X,Y)$ – дискретный случайный вектор.

**Опр.** **Дисперсией** двумерной СВ $(X,Y)$ называется совокупность дисперсий

$$D[X] = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)^2 p_{ij}; \quad D[Y] = \sum_i \sum_j (y_j - m_Y)^2 p_{ij},$$

если $(X,Y)$ – дискретный случайный вектор.

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 \cdot f(x,y)\, dx\, dy;$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_Y)^2 \cdot f(x,y)\, dx\, dy,$$

если $(X,Y)$ – н... случайный век...

**Опр. Дисперсией** двумерной СВ $(X, Y)$ называется совокупность дисперсий

$$D[X] = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)^2 p_{ij}; \; D[Y] = \sum_i \sum_j (y_j - m_Y)^2 p_{ij},$$

если $(X, Y)$ — дискретный случайный вектор.

$$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 \cdot f(x, y)\, dx\, dy;$$

$$D[Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - m_Y)^2 \cdot f(x, y)\, dx\, dy,$$

если $(X, Y)$ — непрерывный случайный вект

Дисперсии $D[X], D[Y]$ характеризуют рассеяние (разброс) случайных точек $(X, Y)$ в направлении осей $Ox, Oy$ вокруг центра рассеяния – точки $(m_X; m_Y)$.

вектора $\varphi(X,Y)$.

$$M[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij},$$

$$M[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) \cdot f(x,y)\, dx\, dy,$$

$$D[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \left(\varphi(x_i, y_j) - M[\varphi(X,Y)]\right)^2 p_{ij},$$

[illegible] вектора $\varphi(X, Y)$.

$$M[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij},$$

$$M[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) \cdot f(x,y)\, dx\, dy.$$

$$D[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \left(\varphi(x_i, y_j) - M[\varphi(X,Y)]\right)^2 p_{ij},$$

$$D[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(x,y) - M[\varphi(X,Y)]\right)^2 \cdot f(x,y)\, dx\, dy.$$

вектора $\varphi(X, Y)$.

$$M[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij},$$

$$M[\varphi(X,Y)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) \cdot f(x,y)\, dx\, dy.$$

$$D[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \left(\varphi(x_i, y_j) - M[\varphi(X,Y)]\right)^2 p_{ij},$$

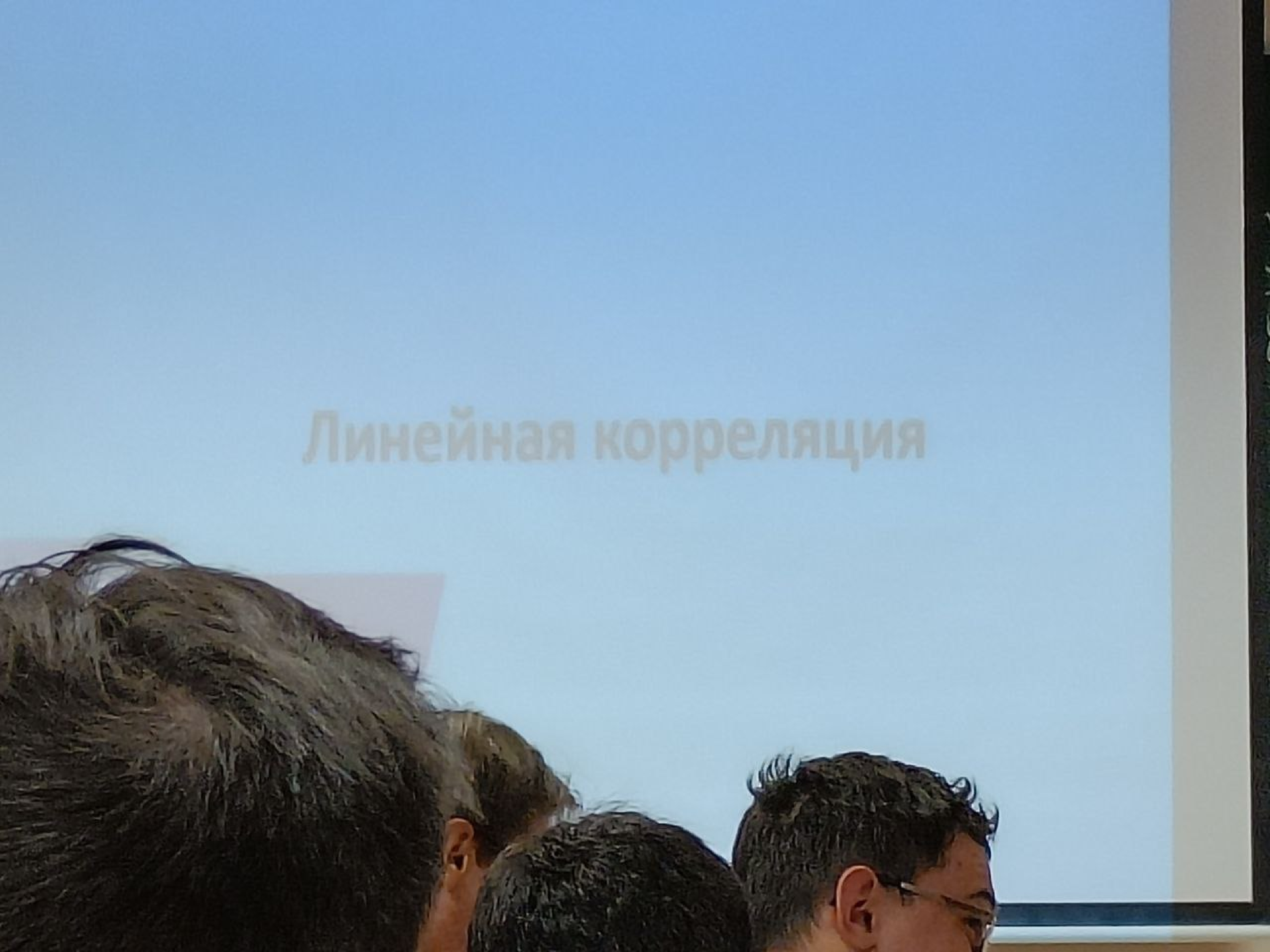
$$D[\varphi(X,Y)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(x,y) - M[\varphi(X,Y)]\right)^2 \cdot f(x,y)\, dx\, dy.$$

1. Математические ожидания $m_X$ и $m_Y$ являются частными случаями начального момента $\alpha_{k,s}$ порядка $k+s$ системы $(X,Y)$ :

$$\alpha_{k,s} = M[X^k \cdot Y^s]; \quad m_X = \alpha_{1,0}, \quad m_Y = \alpha_{0,1}.$$

2. Дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$ являются частными случаями центрального момента $\mu_{k,s}$ порядка $k+s$ системы $(X,Y)$ :

$$\mu_{k,s} = M[(X-m_X)^k (Y-m_Y)^s]; \quad D[X] = \mu_{2,0}, \quad D[Y] = \mu_{0,2}$$


Линейная корреляция

# Линейная корреляция

## Функциональная зависимость между СВ

$\exists$ зависимость, которая проявляется в том, что закон распределения ~~изменения~~ одной СВ изменяется при изменении другой СВ.

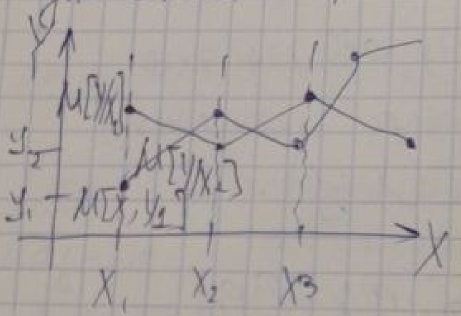
Эта зависимость называется статистической (стохастической, вероятностной).

Если $X, Y$ – ДСВ, то при каждом фиксированном значении $X = x$ $\rightsquigarrow$ имеется набор $y_1, y_2, \ldots, y_n$

Для НСВ $(X, Y)$ $f(y/x)$ $F(y/x)$

Подвид зависимости: корреляционная

$Y$ от $X$ называется функциональная ~~ф-ная~~ зависимость условного среднего значения $Y$ от $X$.




Потребность: ~~Кривая~~ Числовая х-ка, описывающая степень наличия стохастической зависимости.

$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$, если $X, Y$ – независимы,

$K_{XY} = cov(X, Y) = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y]$

ковариация

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y],$$ если X, Y – независимы;

$$K_{XY} = COV(X,Y) = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y];$$

$f: X \longrightarrow Y$ $\lim_{B(a)} f(x) =$

$B^X(a) = \{B(a),$

$T_1 = \{a_1$

$= \{a_1$

Ow

H/з.

$M[XY] - M[X]M[Y] \neq 0$

$Y_1$ $K_{XY}$

$x_1$ $x_2$ $x_3$

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y],$$ если X, Y – независимы;

$$K_{XY} = COV(X,Y) = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y];$$

$$K_{XY} \neq 0,$$ если X, Y – зависимы;

$f : X \to Y \quad \lim_{B(a)} f(x) =$

$B^X(a) = \{ B(a),$

$T_1 = \{a, x_1, b\}$

$= \{a, x_2, b\}$

Опр $T_1$ –

Н/з.

$M[XY] - M[X]M[Y] \neq 0$

$K_{XY}$ Ковариация

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$, если X, Y – независимы;

$K_{XY} = COV(X,Y) = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y]$;

$K_{XY} \neq 0$, если X, Y – зависимы;

$K_{XY}$ – ковариация (корреляционный момент) X и Y.

## Утверждение

Ковариация равна математическому ожиданию произведения центрированных случайных величин:

$$K_{XY} = M\left[\left(X - m_X\right)\cdot\left(Y - m_Y\right)\right].$$

$\beta^{x}(a) = \{ \beta(a), \ldots$

$T_1 = \{a, x_1, b$

$= \{a, x_2, b$

Опр $T$

Н/з.

$\boxed{K_{xy} \triangleq M[xy] - M[x]M[y]} \neq 0$

$K_{xy}$ Ковариация

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

**Утверждение**

Ковариация равна математическому ожиданию произведения центрированных случайных величин:

$$K_{XY} = M\left[\left(X - m_X\right)\cdot\left(Y - m_Y\right)\right].$$

**Доказательство**

$$K_{XY} = M\left[\left(X - m_X\right)\cdot\left(Y - m_Y\right)\right] = M\left[X\cdot Y - X\cdot m_Y - m_X\cdot Y + m_X m_Y\right] =$$

$$= M\left[X\cdot Y\right] - m_Y\cdot M\left[X\right] - m_X\cdot M\left[Y\right] + m_X m_Y =$$

**Утверждение**

Ковариация равна математическому ожиданию произведения центрированных случайных величин:

$$K_{XY} = M\left[\left(X - m_X\right)\cdot\left(Y - m_Y\right)\right].$$

**Доказательство**

$$K_{XY} = M\left[\left(X - m_X\right)\cdot\left(Y - m_Y\right)\right] = M\left[X\cdot Y - X\cdot m_Y - m_X\cdot Y + m_X m_Y\right] =$$

$$= M\left[X\cdot Y\right] - m_Y\cdot M\left[X\right] - m_X\cdot M\left[Y\right] + m_X m_Y =$$

$$= M\left[X\cdot Y\right] - M\left[X\right]\cdot M\left[Y\right] = K_{XY}.$$

## Вычислительные формулы

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left( x_i - m_X \right) \cdot \left( y_j - m_Y \right) \cdot p_{ij}, \text{ если}$$

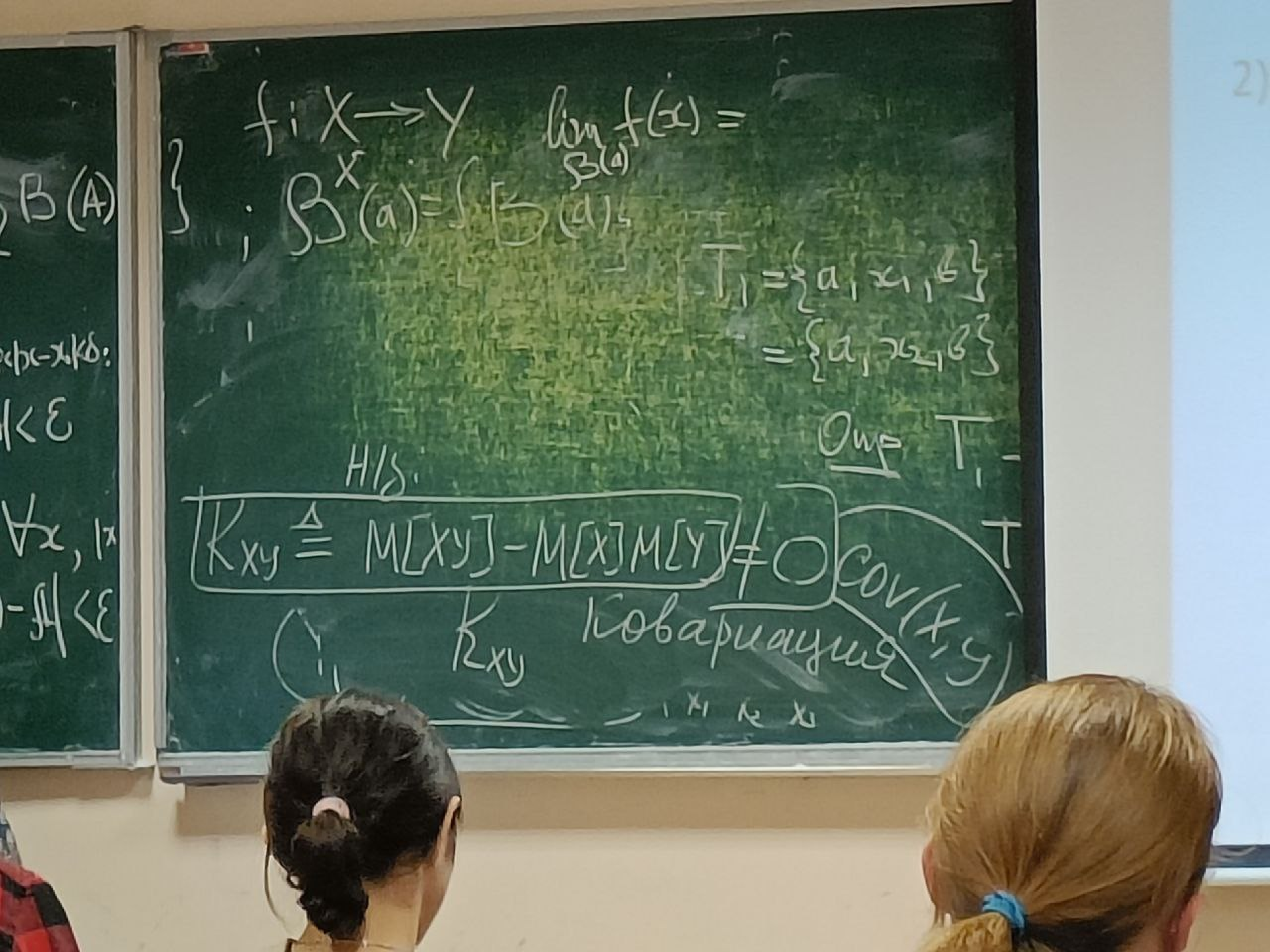
(X, Y) – дискретная двумерная СВ.

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( x - m_X \right) \cdot \left( y - m_Y \right) \cdot f\left( x, y \right) dx dy, \text{ если}$$

(X, Y) – непрерывная двумерная СВ.

## Теорема 1 (Свойства ковариации)

1) Ковариация симметрична, т.е. $K_{XY} = K_{YX}$;



f : X → Y
lim f(x) =
B(a)
B^X(a) = { B(a)
T_1 = {a, x_1, b}
= {a, x_2, b}
Опр T_1 –
Н/з.
K_XY ≜ M[XY] − M[X]M[Y] ≠ 0
cov(X, Y)
K
R_XY
Ковариация
B (A)
< ε
∀x,

## Теорема 1 (Свойства ковариации)

1) Ковариация симметрична, т.е. $K_{XY} = K_{YX}$;

2) $K_{XX} = D[X]$;

- $K_{XX} = M\left[(X - m_X)(X - m_X)\right] = M\left[(X - m_X)^2\right] = D[X]$

3) Если X,Y – независимы, то $K_{XY} = 0$;

X,Y – независимы $\Rightarrow$ СВ $X - m_X$ и $Y - m_Y$ независимы;

## Теорема 1 (Свойства ковариации)

1) Ковариация симметрична, т.е. $K_{XY} = K_{YX}$;

2) $K_{XX} = D[X]$;

- $K_{XX} = M\left[(X-m_X)(X-m_X)\right] = M\left[(X-m_X)^2\right] = D[X]$

3) Если X,Y – независимы, то $K_{XY} = 0$;

□ X,Y – независимы $\Rightarrow$ СВ $X-m_X$ и $Y-m_Y$ независимы;

$$M\left[(X-m_X)(Y-m_Y)\right] = M\left[X-m_X\right]\cdot M\left[Y-m_Y\right] =$$

$$=\left(M[X] \ldots\right)\cdot\left(M[Y]-m_Y\right)=0$$

## Свойства

4) $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2K_{XY}$;

- $D[X+Y] = M\left[(X+Y) - M[X+Y]\right]^2 =$

$= M\left[(X - m_X)^2\right] + 2M\left[(X - m_X)(Y - m_Y)\right] + M\left[(Y - m_Y)^2\right] =$

$= D[X] + D[Y] + 2K_{XY}$;

$D[X - Y] = D[X] + D[-Y] + 2M[(X - m_X)(-Y - M[-Y])] =$

$= D[X] - D[Y] - 2K_{XY}$.

5) $COV(CX,Y) = C \cdot COV(X,Y) = COV(X,CY);$

6) $COV(X+C,Y) = COV(X,Y) = COV(X+C, Y+C);$

7) $|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$

- Применяем свойство 4) к случайным величинам

$$\frac{X - m_X}{\sigma_X} \text{ и } \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}:$$