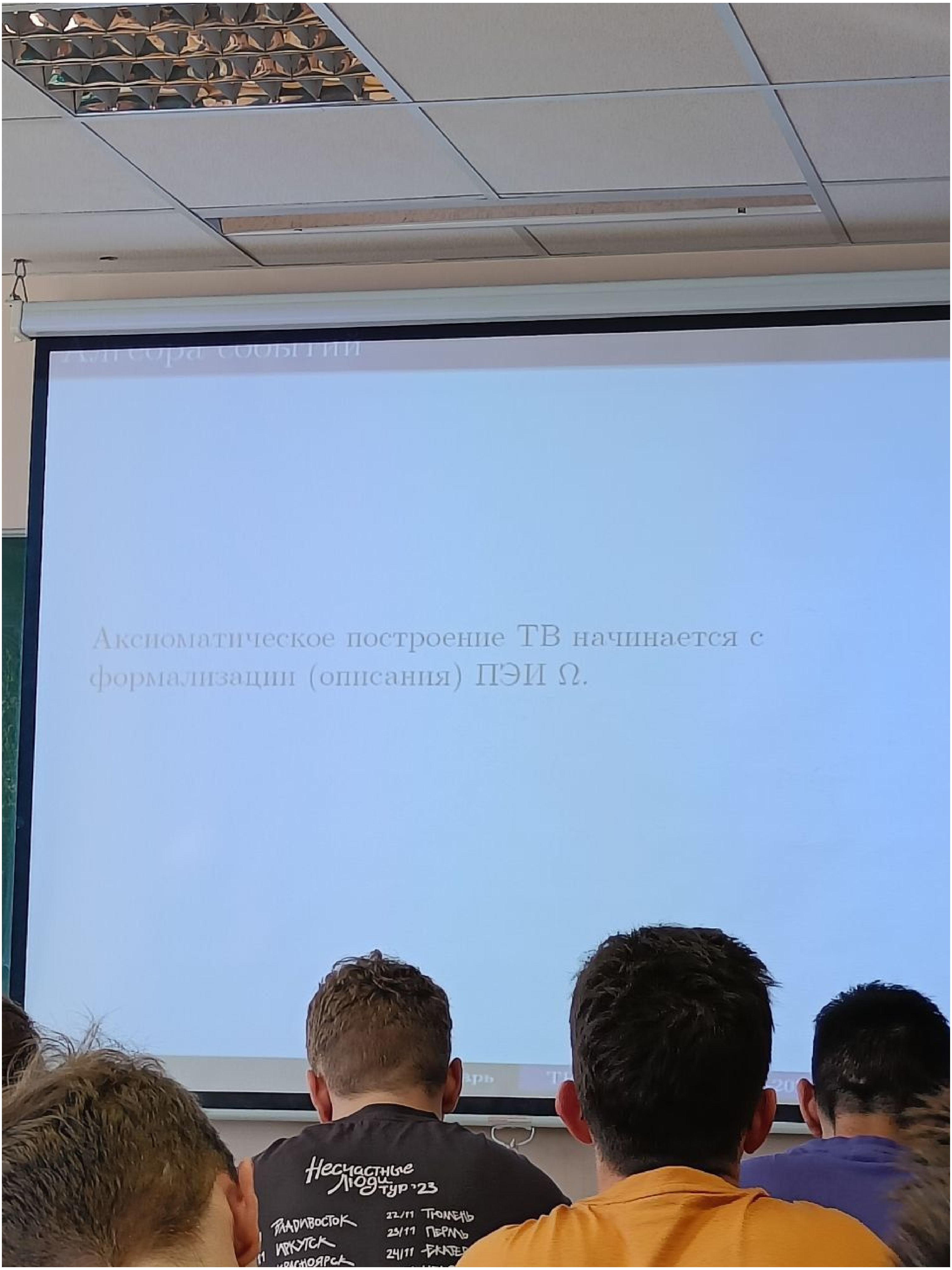
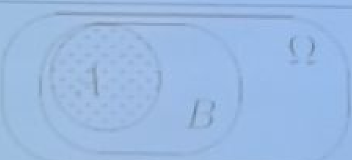

Аксиоматическое построение ТВ начинается с формализации (описания) ПЭИ Ω.
Несчастные люди тур '23

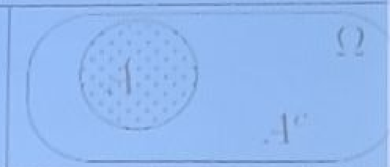
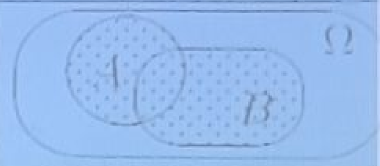
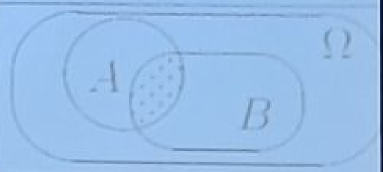
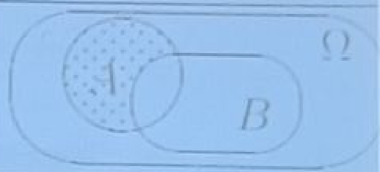
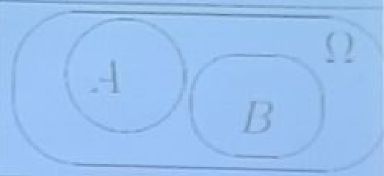
Алгебра событий

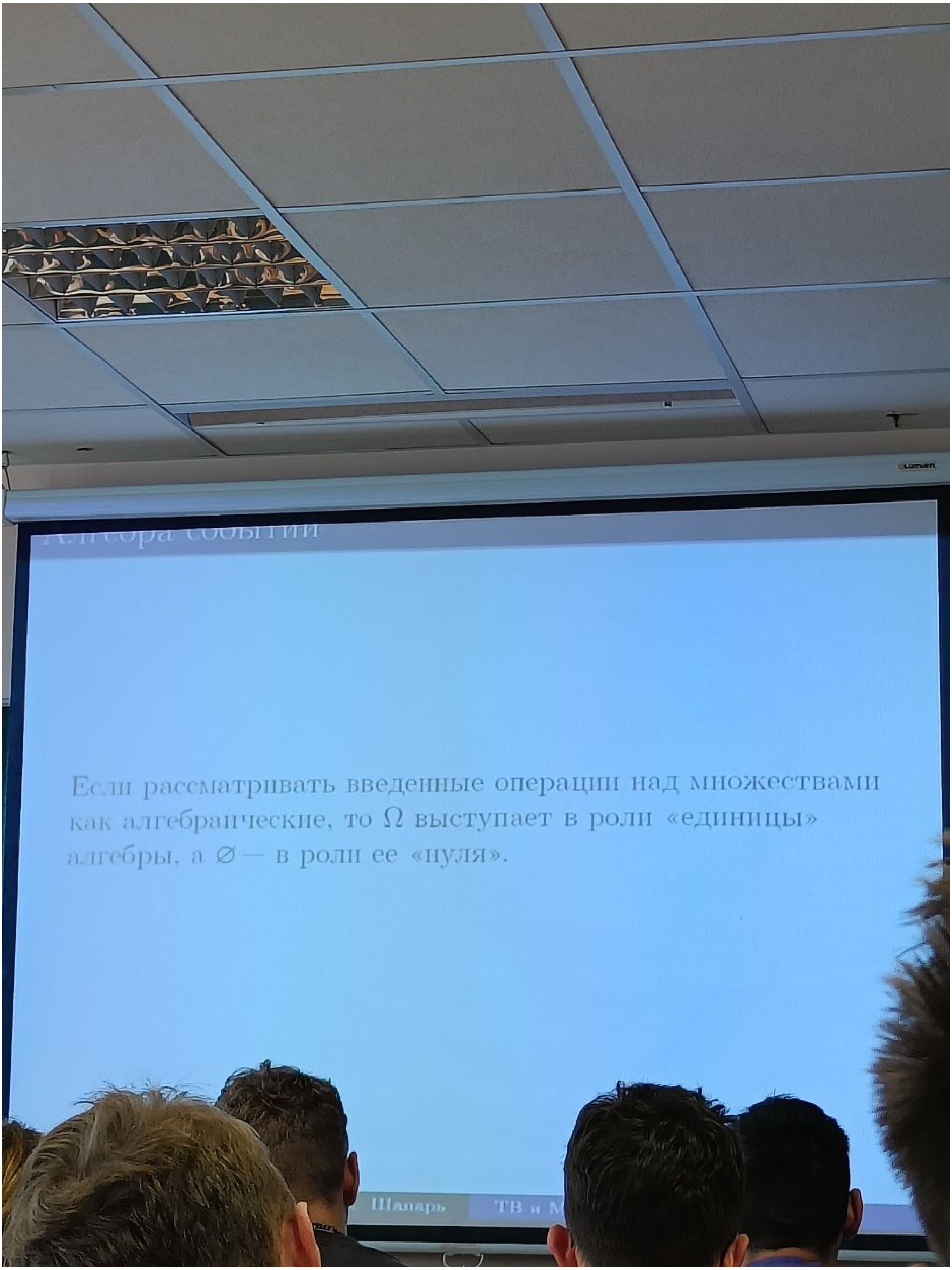
Аксиоматическое построение ТВ начинается с формализации (описания) ПЭИ Ω.

События $A, B, C, \ldots$ – подмножества Ω.

Над событиями, как подмножествами, вводятся теоретико-множественные операции, «вероятностная» трактовка которых приводится в таблице.

Теоретико-множественные объекты и операции	Вероятностная трактовка	Геометрическая интерпретация
Ω – множество	пространство элементарных исходов, *достоверное событие*	
ω – элемент Ω	элементарный исход эксперимента, элементарное событие	
A – подмножество множества Ω	событие	
$\emptyset$ – пустое множество	*невозможное событие*	
$A \subset B$ – подмножество A есть часть (принадлежит) B	событие A *влечет* событие B	

A^c – дополнение подмножества A до Ω	событие A не произошло	
$A \cup B$ – объединение подмножеств A и B	Произошло по крайней мере одно из событий A или B	
$A \cap B$ – пересечение подмножеств A и B	Произошли одновременно оба события A и B	
$A \backslash B$ – разность: из подмножества A вычитается подмножество B	Произошло событие A, в то время как событие B не произошло	
$A \cap B = \emptyset$ – множества A и B не имеют общих точек (не пересекаются)	события A и B *несовместны*	


Если рассматривать введенные операции над множествами как алгебраические, то Ω выступает в роли «единицы» алгебры, а $\varnothing$ — в роли ее «нуля».
Шапарь

Алгебра событий

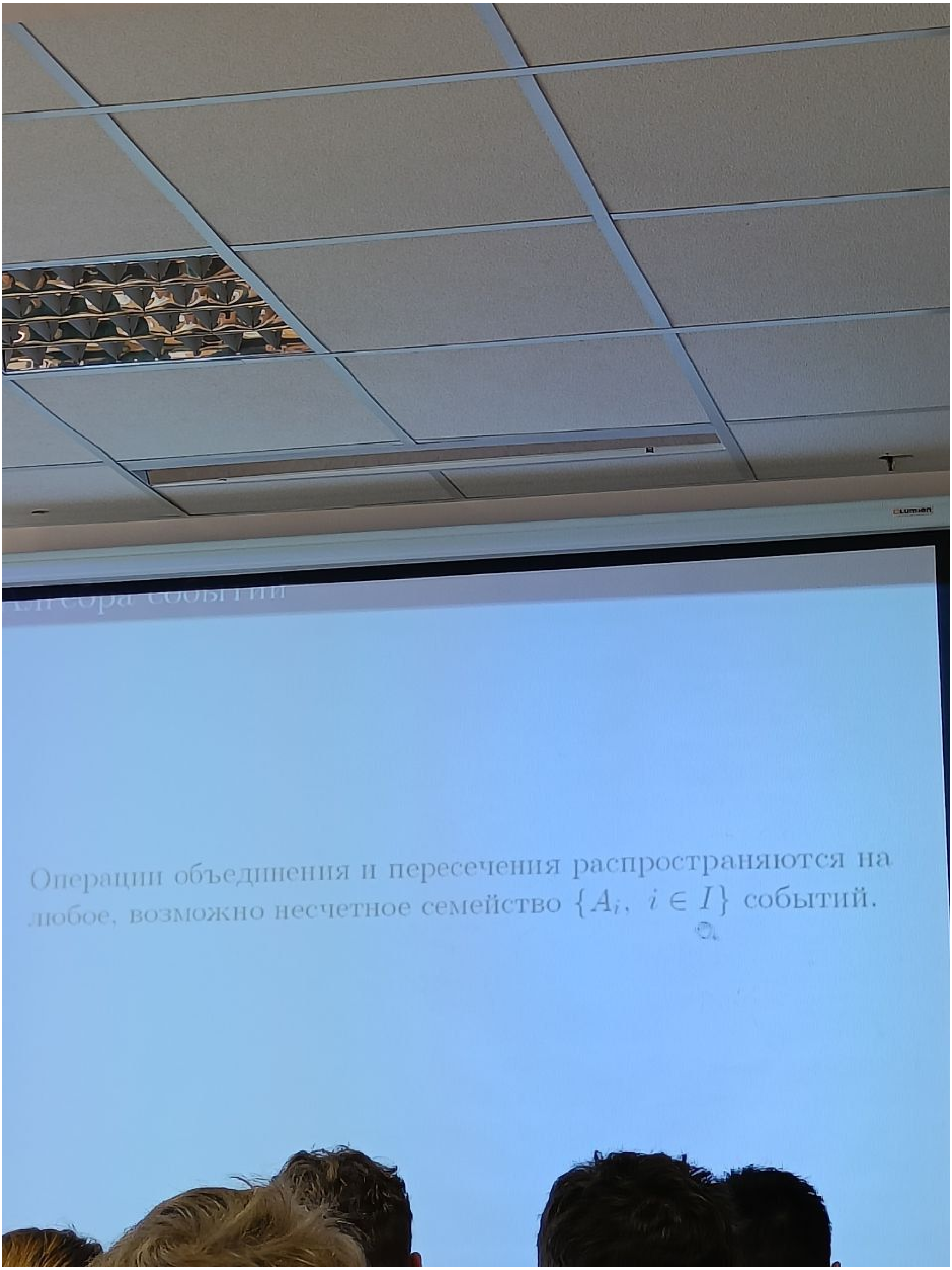
Если рассматривать введенные операции над множествами как алгебраические, то Ω выступает в роли «единицы» алгебры, а $\varnothing$ — в роли ее «нуля».

Справедливы свойства:

$$\overline{\Omega} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = \Omega, \quad \overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad \overline{A} \cup A = \Omega$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \Omega = A, \quad \overline{A} \cap A = \varnothing$$

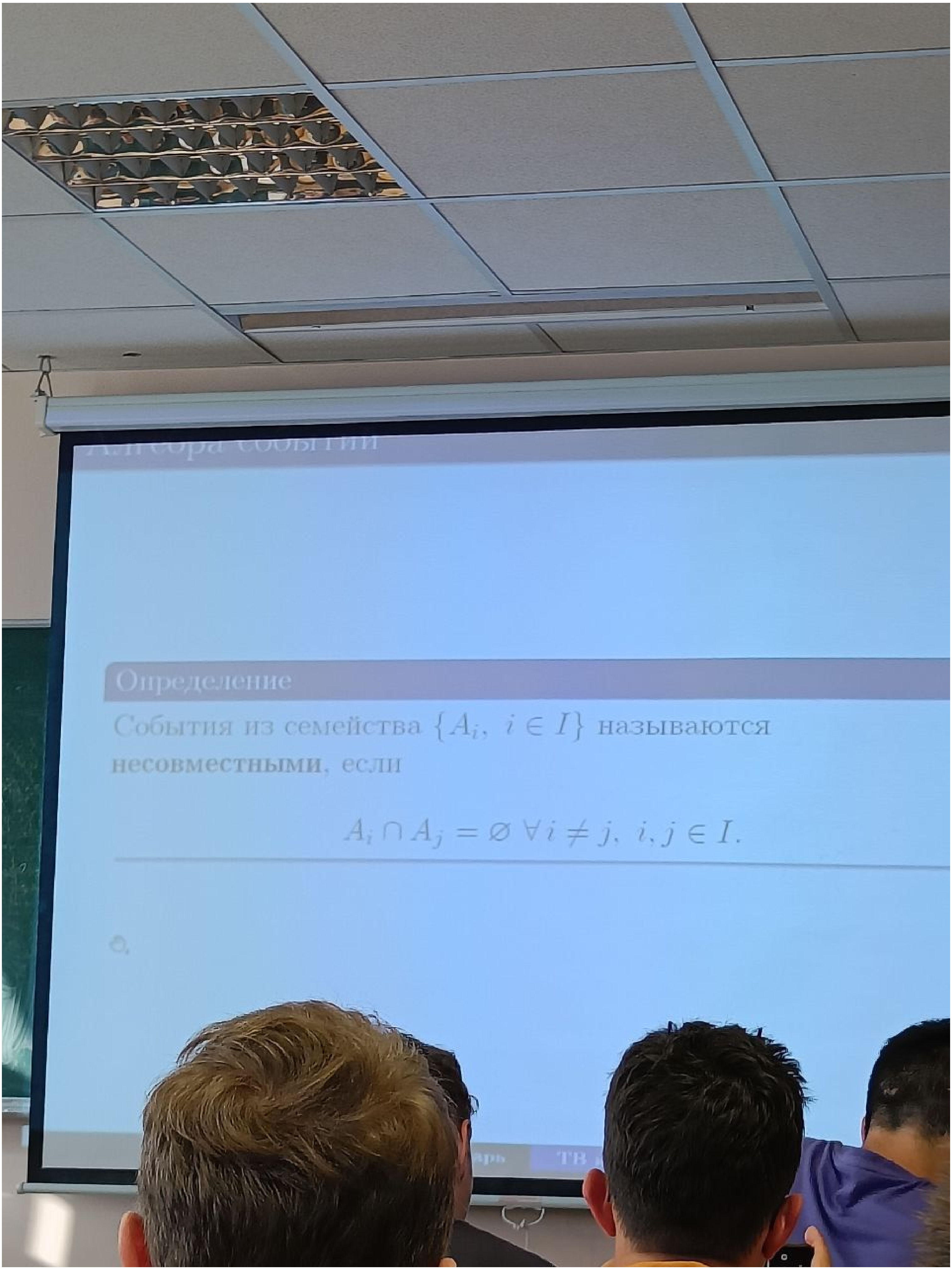

Операции объединения и пересечения распространяются на
любое, возможно несчетное семейство $\{A_i,\ i \in I\}$ событий.

Алгебра событий

Операции объединения и пересечения распространяются на любое, возможно несчетное семейство $\{A_i,\ i \in I\}$ событий.

$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ – произошло по крайней мере одно из событий семейства $\{A_i,\ i \in I\}$;

$\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ – произошли все события семейства $\{A_i,\ i \in I\}$.


Определение
События из семейства $\{A_i,\ i \in I\}$ называются **несовместными**, если
$A_i \cap A_j = \varnothing\ \forall i \neq j,\ i,j \in I.$

Алгебра событий

Определение

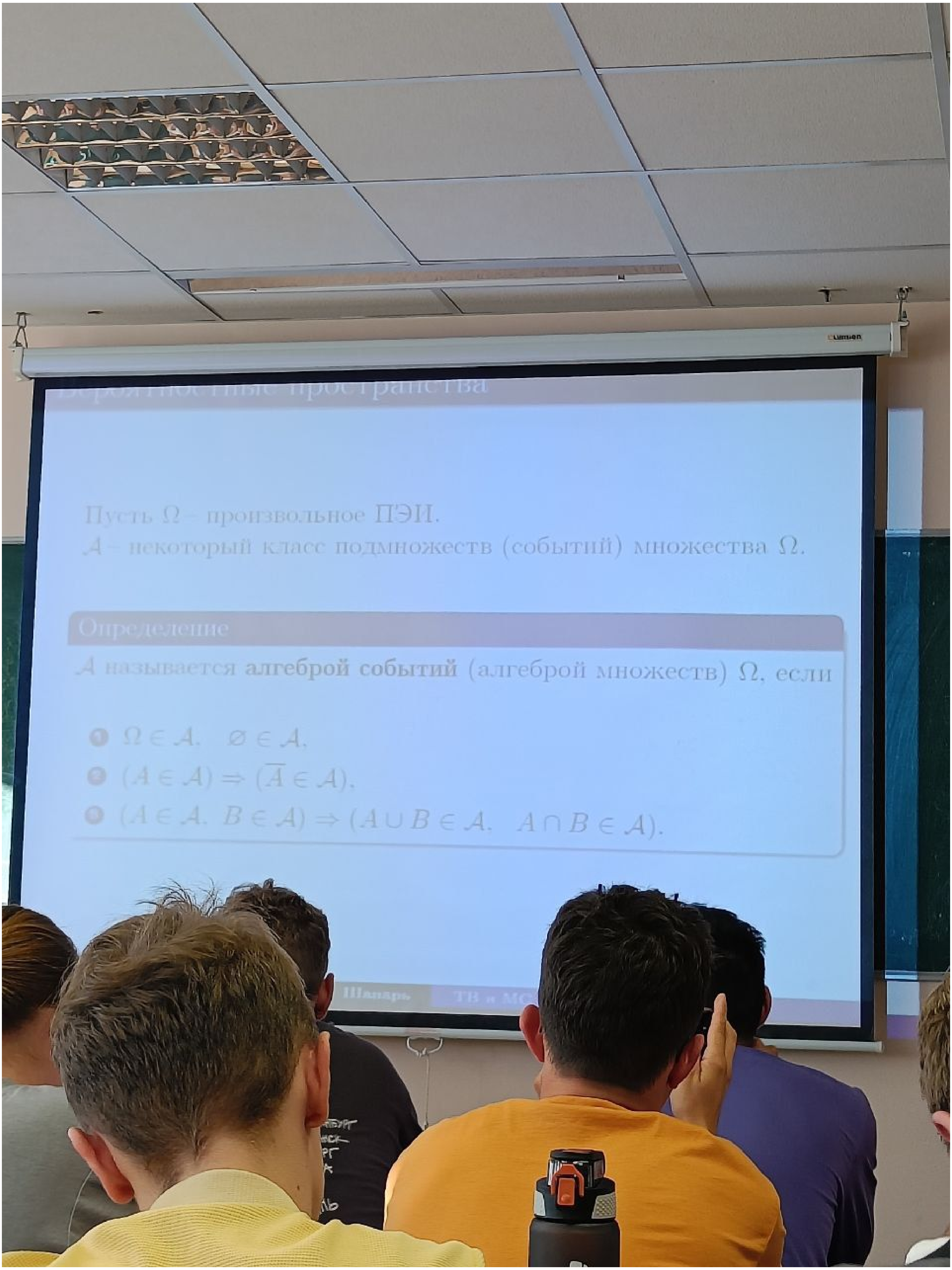
События из семейства $\{A_i,\ i \in I\}$ называются **несовместными**, если

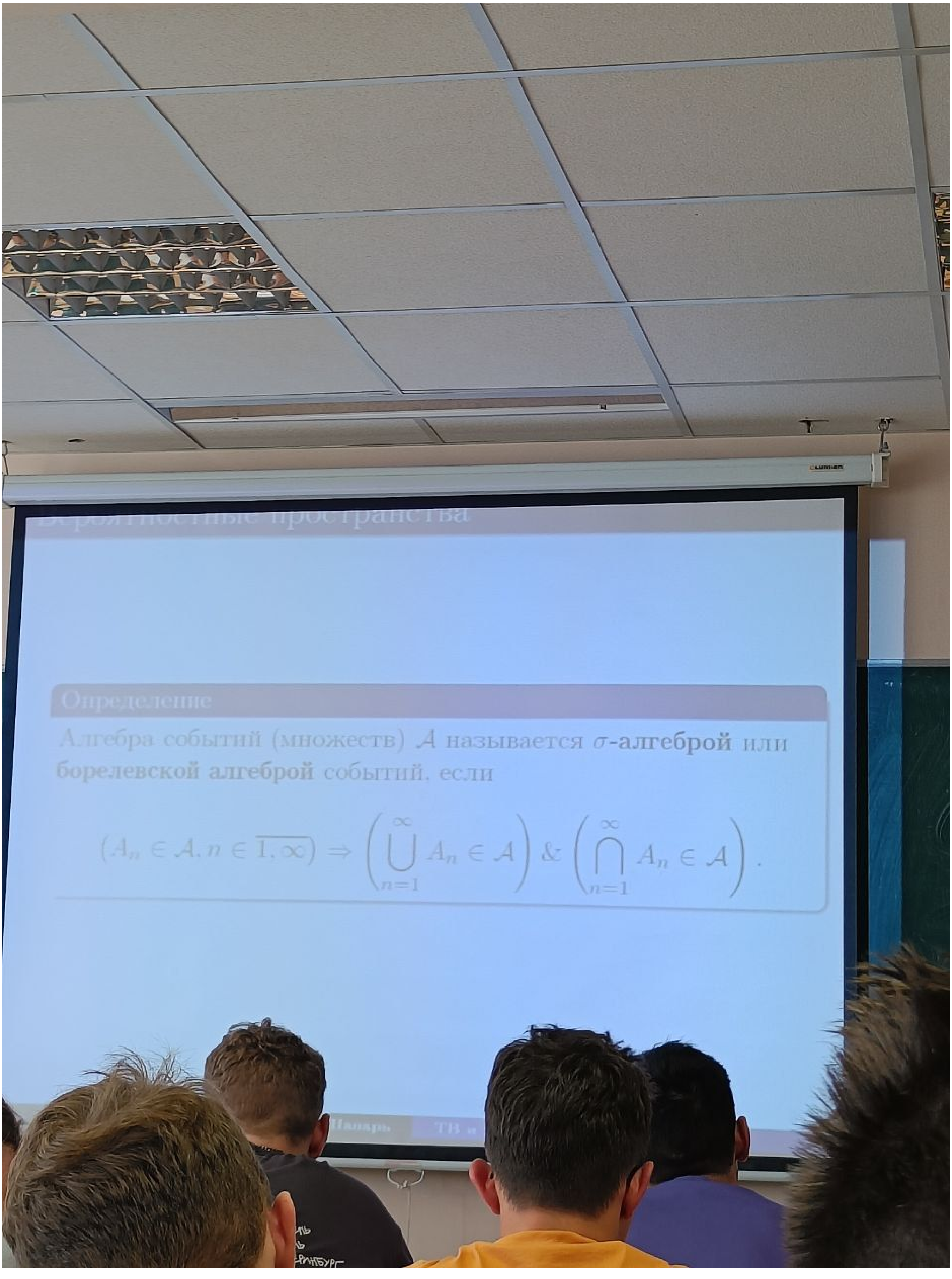
$$A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j,\ i, j \in I.$$

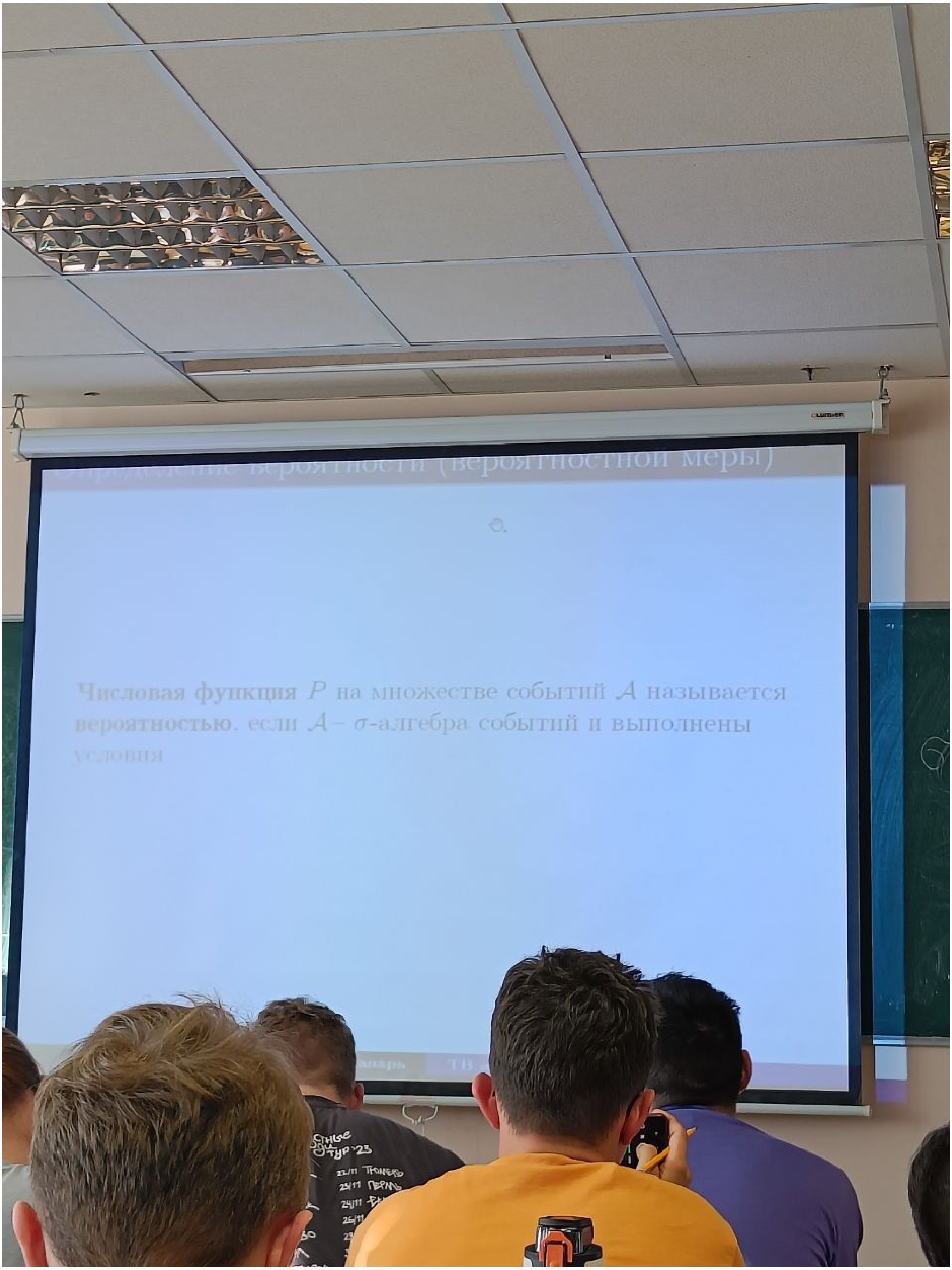
Замечание

Если $A_i,\ i \in I$ несовместны, то вместо знаков $\cup$, $\bigcup$ используются знаки $+$, $\sum$:

$$A \cup B = A + B,\quad \bigcup_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I} A_i.$$


Пусть Ω – произвольное ПЭИ.
$\mathcal{A}$ – некоторый класс подмножеств (событий) множества Ω.
Определение
$\mathcal{A}$ называется **алгеброй событий** (алгеброй множеств) Ω, если
1. $\Omega \in \mathcal{A}$, $\varnothing \in \mathcal{A}$,
2. $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\overline{A} \in \mathcal{A})$,
3. $(A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{A})$.
Шапарь


Определение
Алгебра событий (множеств) $\mathcal{A}$ называется **σ-алгеброй** или **борелевской алгеброй** событий, если
$$\left(A_n \in \mathcal{A}, n \in \overline{1,\infty}\right) \Rightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}\right) \& \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}\right).$$


вероятности (вероятностной меры)
Числовая функция P на множестве событий $\mathcal{A}$ называется
вероятностью, если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра событий и выполнены
условия

Определение вероятности (вероятностной меры)

Числовая функция P на множестве событий $\mathcal{A}$ называется **вероятностью**, если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра событий и выполнены условия

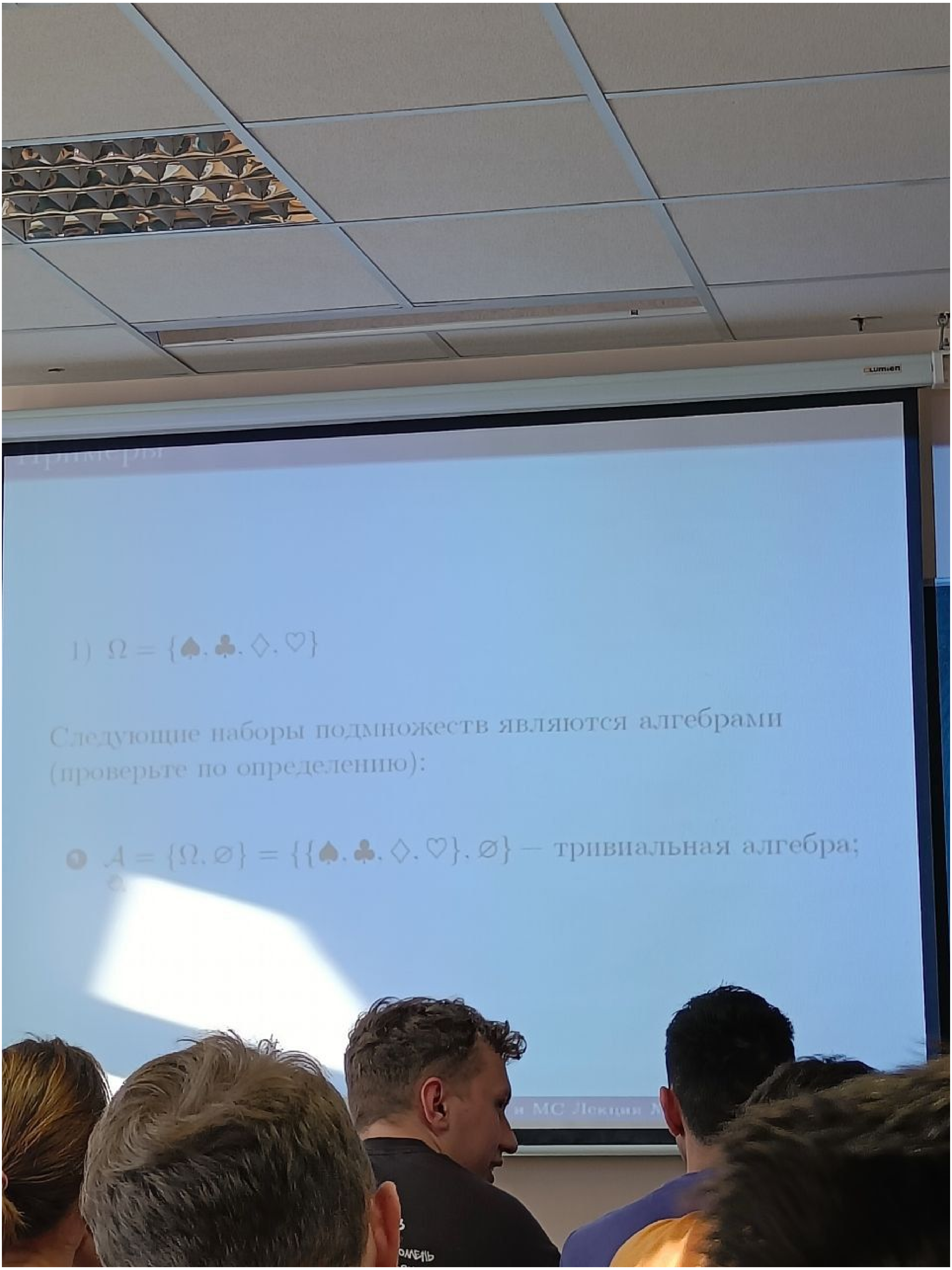
1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geqslant 0$ (Аксиома неотрицательности)
2. $P(\Omega) = 1$ (Аксиома нормированности)
3. (Аксиома счетной аддитивности) $P\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ для любого набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$.

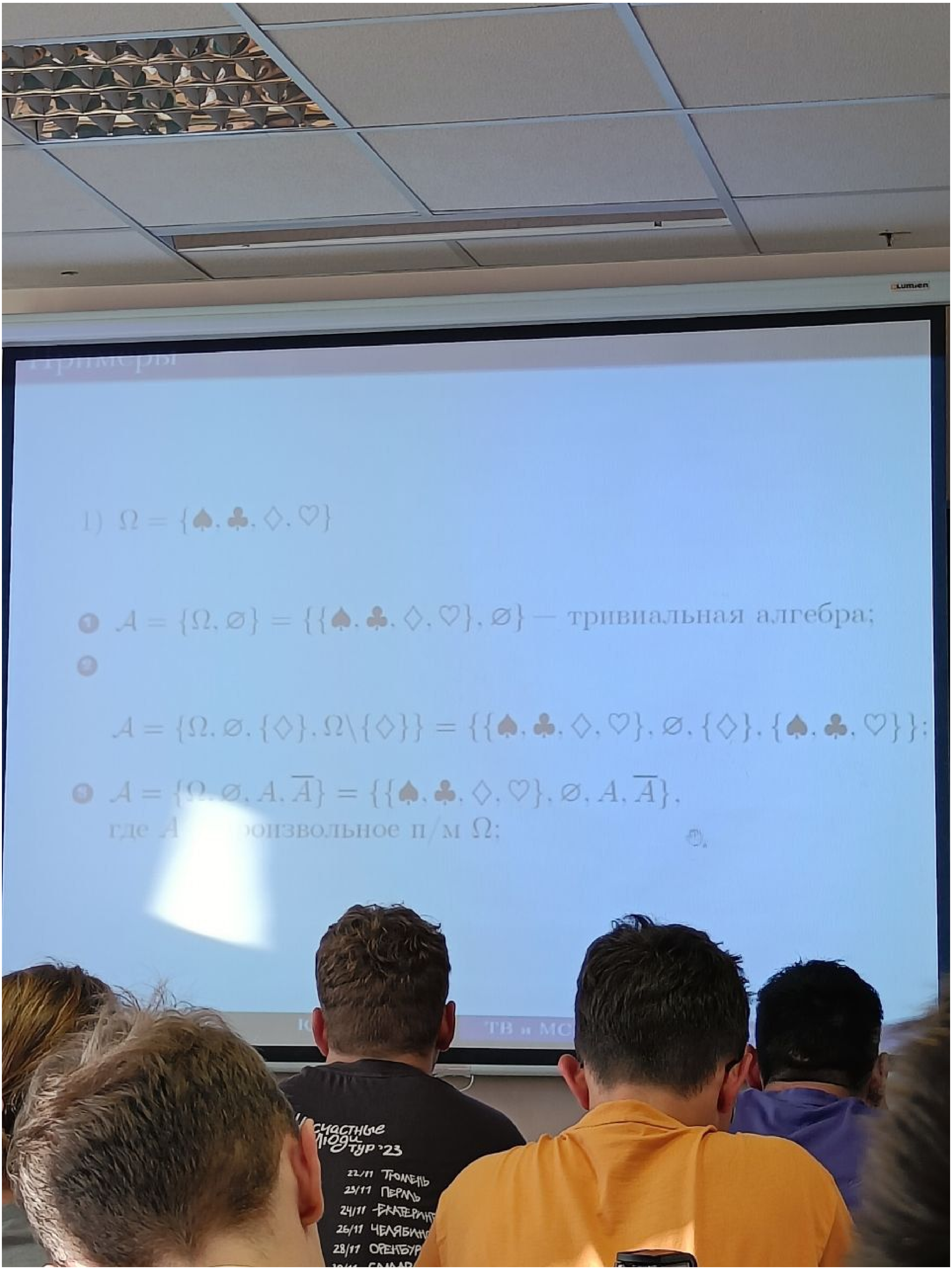
Определение вероятности (вероятностной меры)

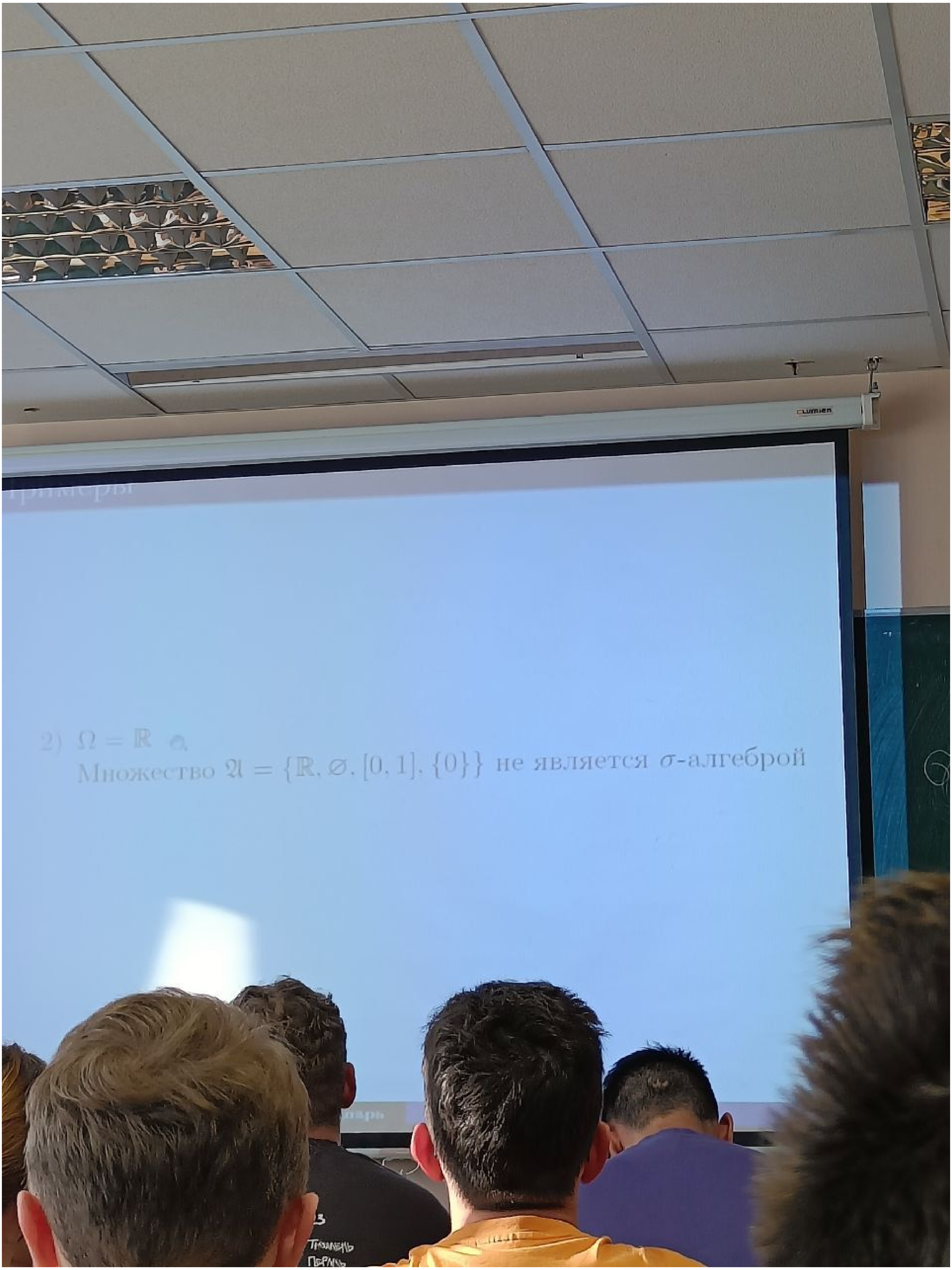
Числовая функция P на множестве событий $\mathcal{A}$ называется **вероятностью**, если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра событий и выполнены условия

1. $\forall A \in \mathcal{A}\ P(A) \geqslant 0$ (Аксиома неотрицательности)
2. $P(\Omega) = 1$ (Аксиома нормированности)
3. (Аксиома счетной аддитивности) $P\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ для любого набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$.

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется **вероятностным пространством**.


Примеры
1) $\Omega = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$
Следующие наборы подмножеств являются алгебрами (проверьте по определению):
$\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing\} = \{\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}, \varnothing\}$ – тривиальная алгебра;


Примеры
1) Ω = {♠, ♣, ◇, ♡}
1 $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing\} = \{\{♠, ♣, ◇, ♡\}, \varnothing\}$ — тривиальная алгебра;
2
$\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing, \{◇\}, \Omega \setminus \{◇\}\} = \{\{♠, ♣, ◇, ♡\}, \varnothing, \{◇\}, \{♠, ♣, ♡\}\};$
3 $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\} = \{\{♠, ♣, ◇, ♡\}, \varnothing, A, \overline{A}\},$
где
п/м Ω;
ТВ и МС


2) $\Omega = \mathbb{R}$
Множество $\mathfrak{A} = \{\mathbb{R}, \varnothing, [0,1], \{0\}\}$ не является σ-алгеброй

Примеры

2) $\Omega = \mathbb{R}$

Множество $\mathfrak{A} = \{\mathbb{R}, \varnothing, [0,1], \{0\}\}$ не является σ-алгеброй.

Дополняем до минимальной σ-алгебры:

$$\mathfrak{F} = \{\mathbb{R}, \varnothing, [0,1], \{0\}, (-\infty, 0) \cup (1, \infty), \\ (0,1], (-\infty, 0] \cup (1, \infty), (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\}$$

Примеры

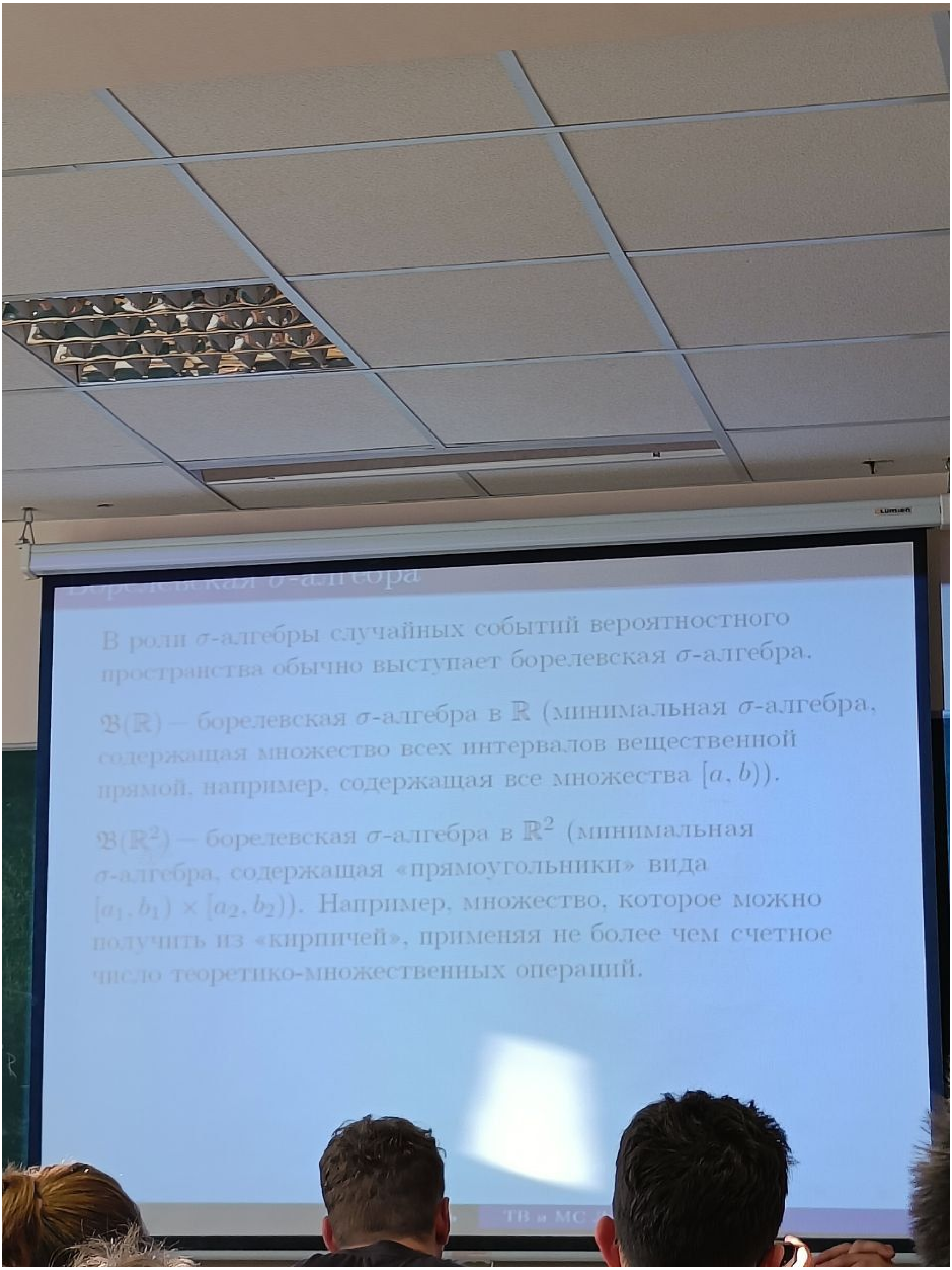
2) $\Omega = \mathbb{R}$

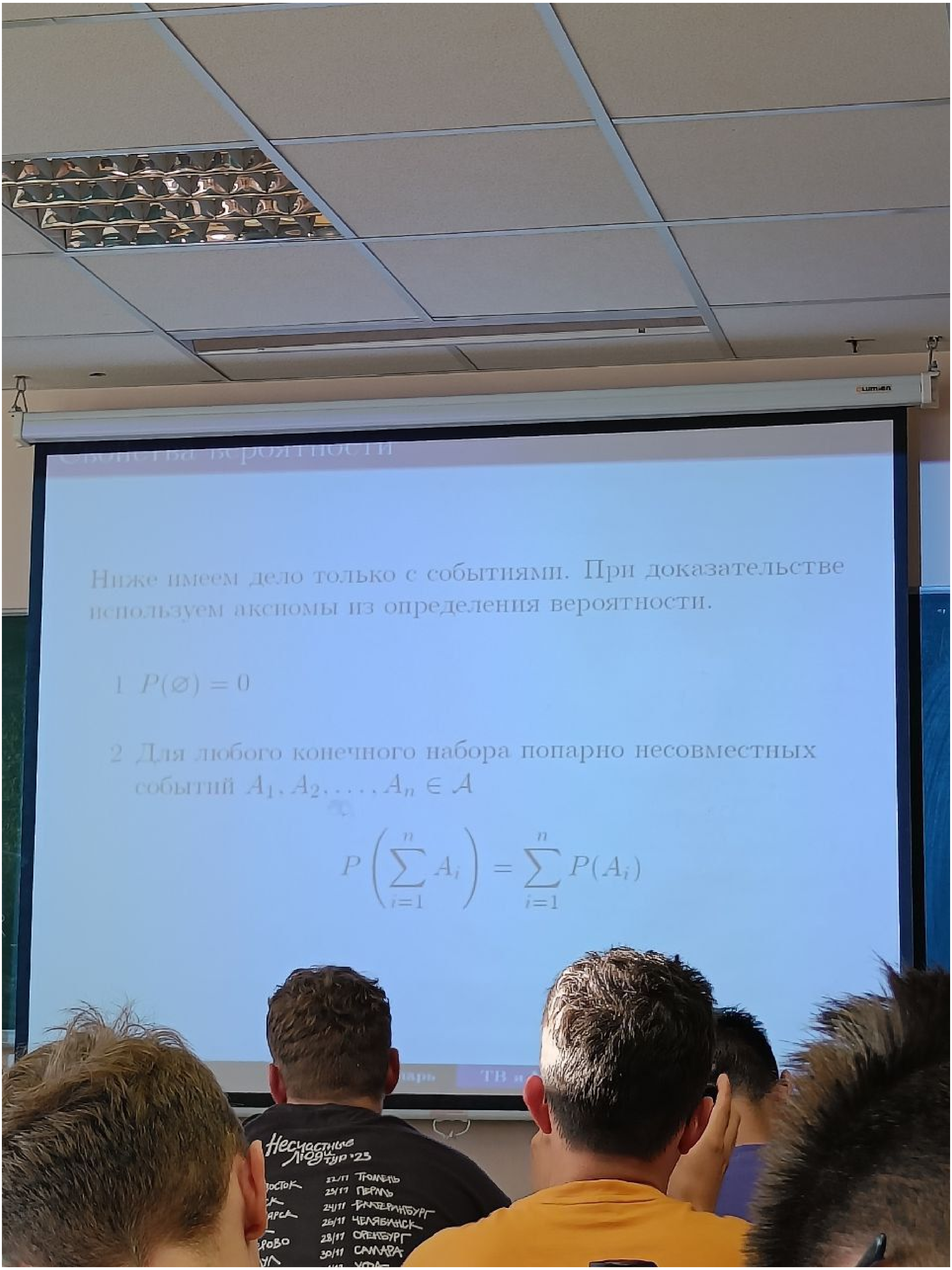
Множество $\mathfrak{A} = \{\mathbb{R}, \varnothing, [0,1], \{0\}\}$ не является σ-алгеброй.

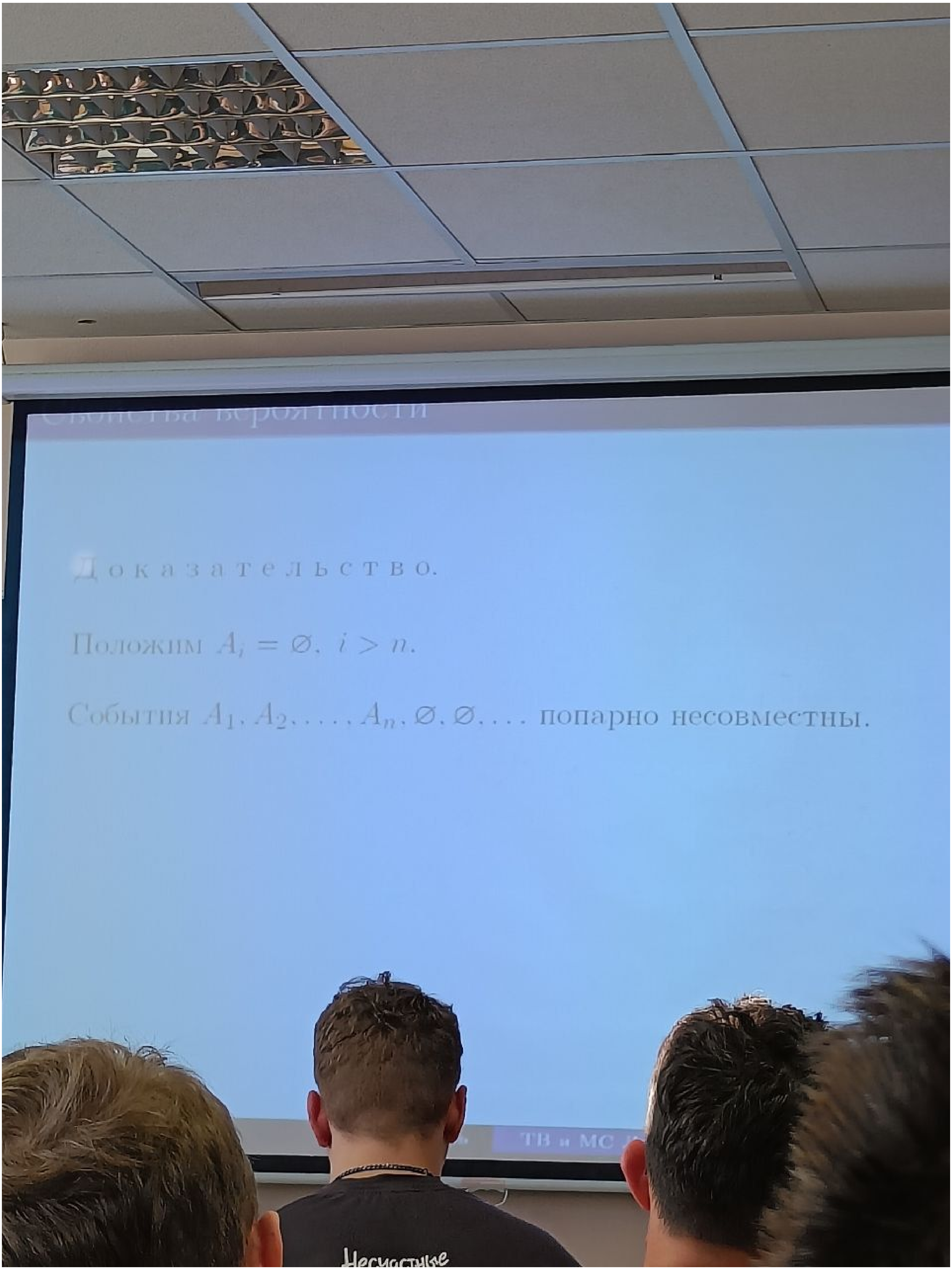
Дополняем до минимальной σ-алгебры:

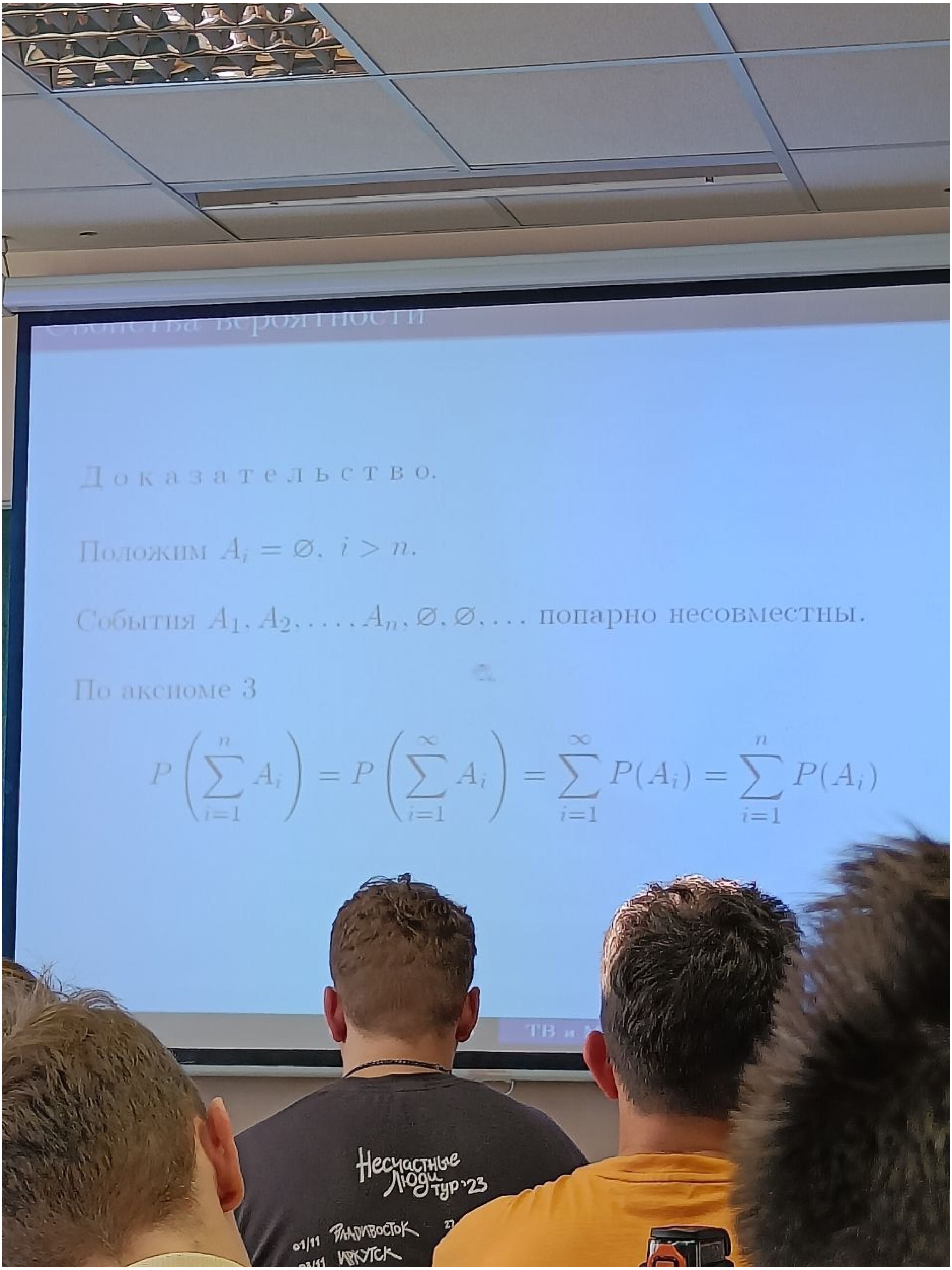
$$\mathfrak{F} = \{\mathbb{R}, \varnothing, [0,1], \{0\}, (-\infty, 0) \cup (1, \infty), \\ (0,1], (-\infty, 0] \cup (1, \infty), (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\}$$

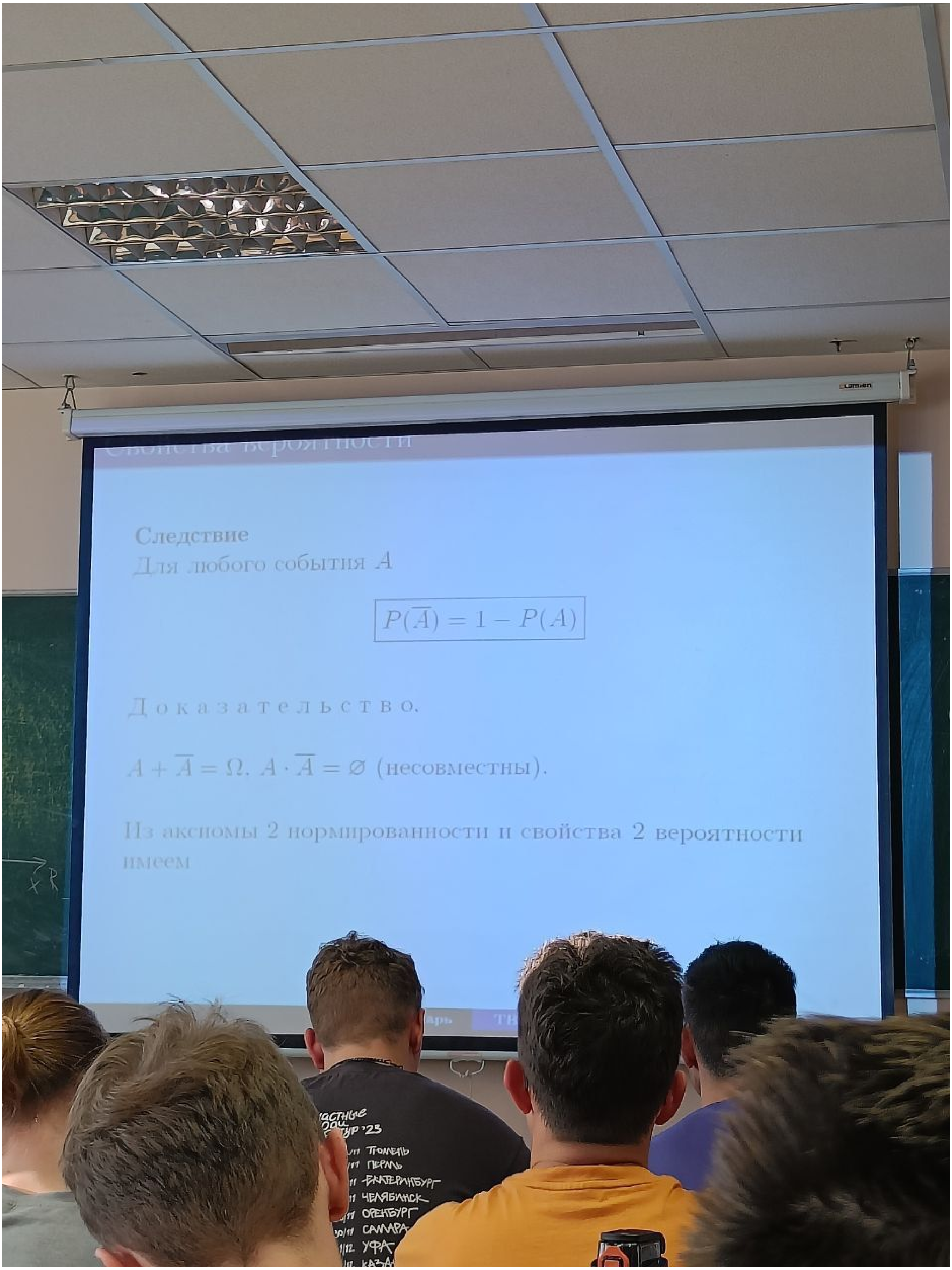
Минимальной σ-алгеброй, содержащей набор множеств $\mathfrak{A}$, называется пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathfrak{A}$.

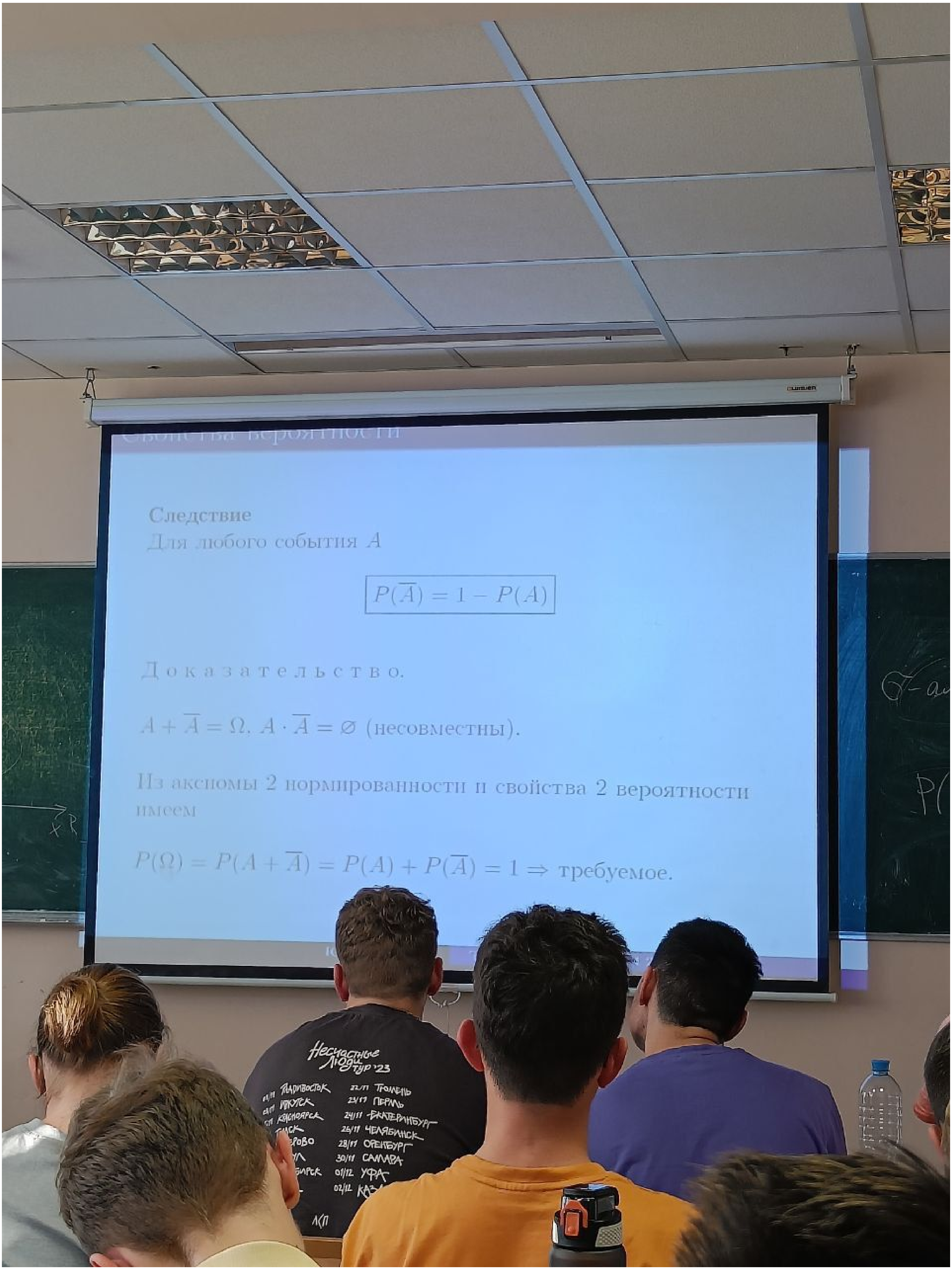

Борелевская σ-алгебра
В роли σ-алгебры случайных событий вероятностного пространства обычно выступает борелевская σ-алгебра.
𝔅(ℝ) – борелевская σ-алгебра в ℝ (минимальная σ-алгебра, содержащая множество всех интервалов вещественной прямой, например, содержащая все множества [a, b)).
𝔅(ℝ²) – борелевская σ-алгебра в ℝ² (минимальная σ-алгебра, содержащая «прямоугольники» вида [a₁, b₁) × [a₂, b₂)). Например, множество, которое можно получить из «кирпичей», применяя не более чем счетное число теоретико-множественных операций.
ТВ и МС


Свойства вероятности
Ниже имеем дело только с событиями. При доказательстве используем аксиомы из определения вероятности.
1 $P(\varnothing) = 0$
2 Для любого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
Несчастные люди тур '23
22/11 Тюмень
23/11 Пермь
24/11 Екатеринбург
26/11 Челябинск
28/11 Оренбург
30/11 Самара


Доказательство.
Положим $A_i = \varnothing$, $i > n$.
События $A_1, A_2, \ldots, A_n, \varnothing, \varnothing, \ldots$ попарно несовместны.
ТВ и МС
Несчастные


Свойства вероятности
Доказательство.
Положим $A_i = \varnothing$, $i > n$.
События $A_1, A_2, \ldots, A_n, \varnothing, \varnothing, \ldots$ попарно несовместны.
По аксиоме 3
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
ТВ и М
Несчастные Люди тур '23
01/11 Владивосток
Иркутск


Свойства вероятности
Следствие
Для любого события A
$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
Доказательство.
$A + \overline{A} = \Omega$. $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ (несовместны).
Из аксиомы 2 нормированности и свойства 2 вероятности имеем
ТЮМЕНЬ
ПЕРМЬ
ЕКАТЕРИНБУРГ
ЧЕЛЯБИНСК
ОРЕНБУРГ
САМАРА
УФА

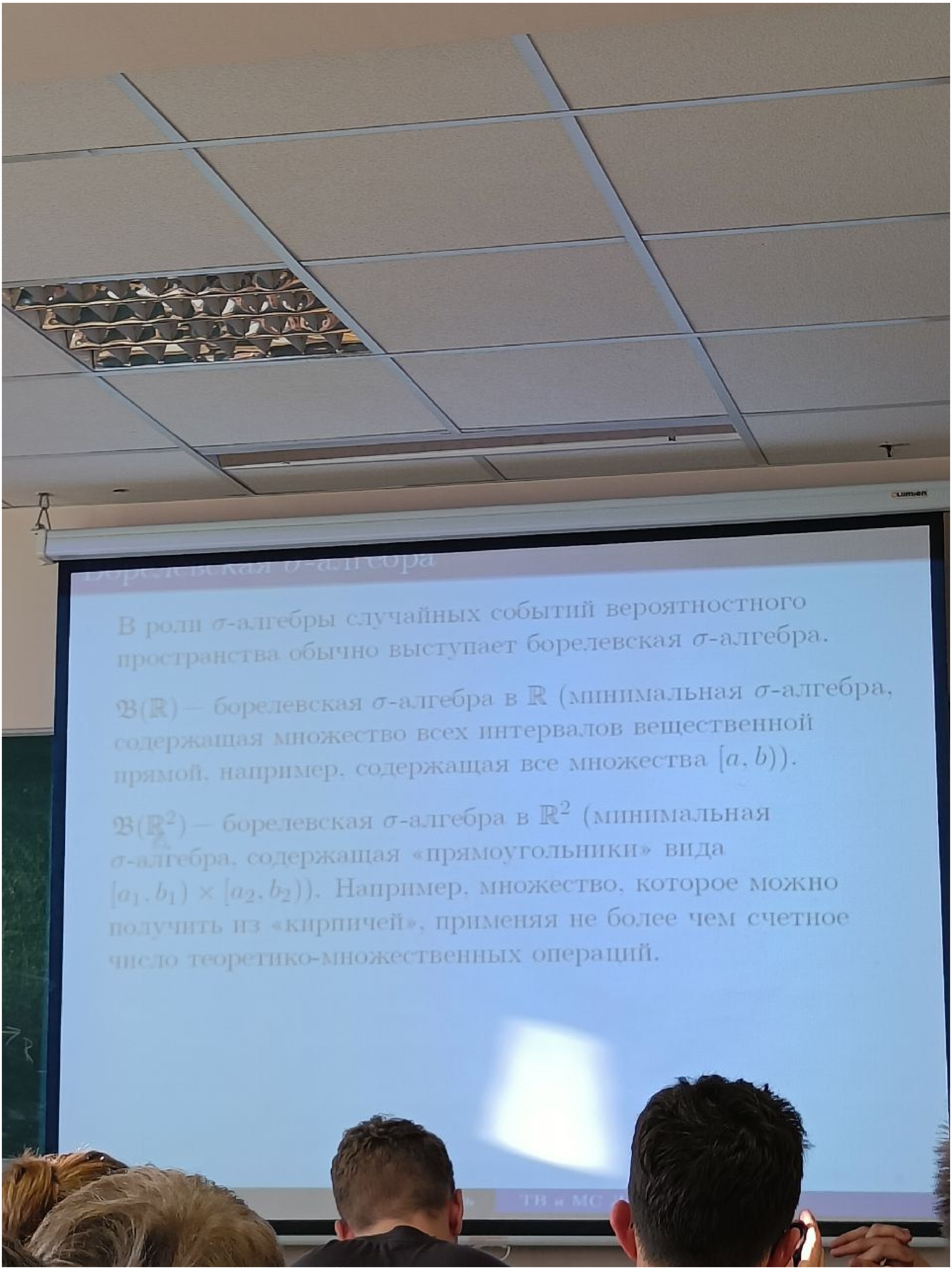

Следствие
Для любого события A
$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$
Доказательство.
$A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ (несовместны).
Из аксиомы 2 нормированности и свойства 2 вероятности имеем
$P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow$ требуемое.

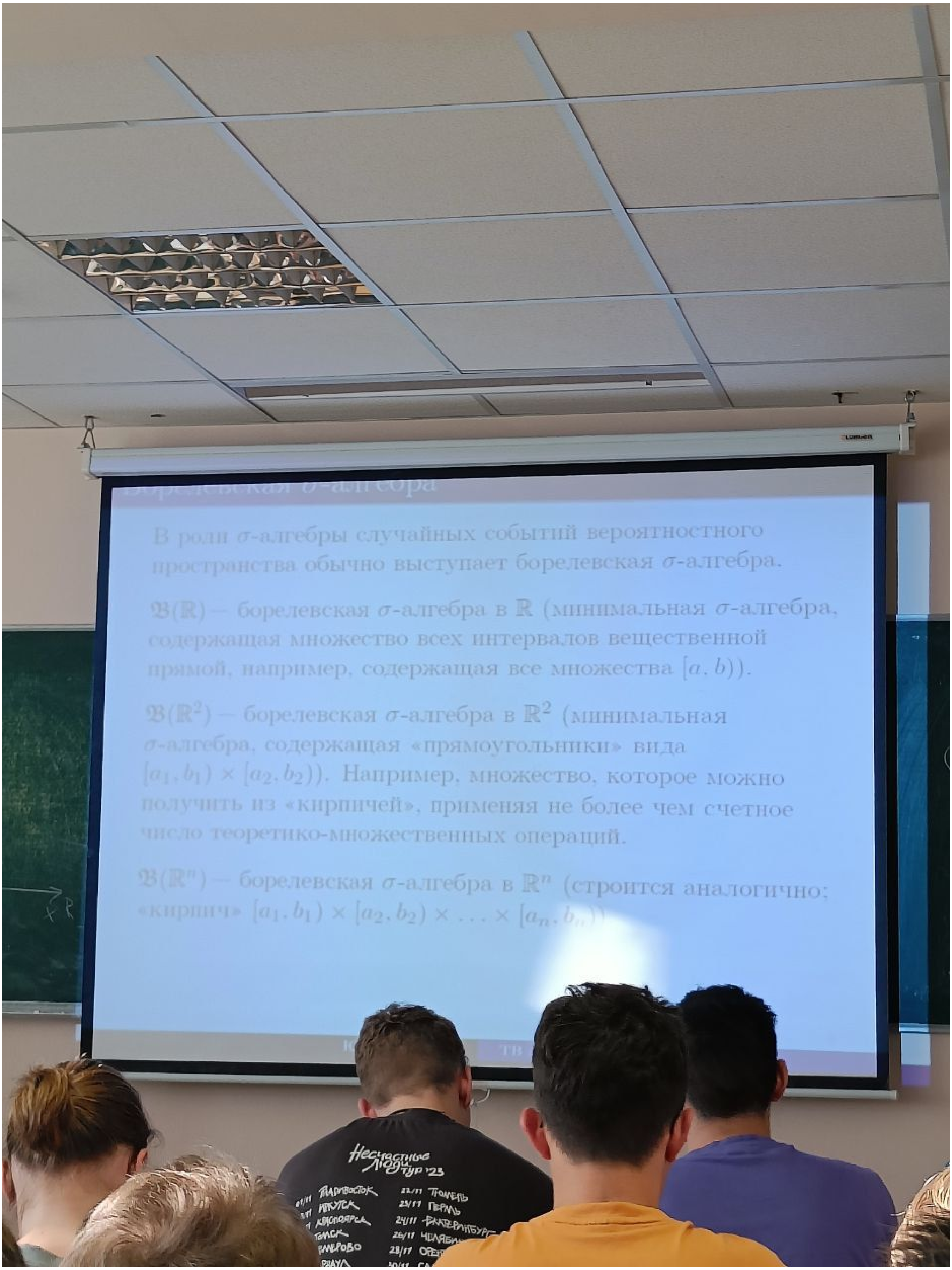
Свойства вероятности

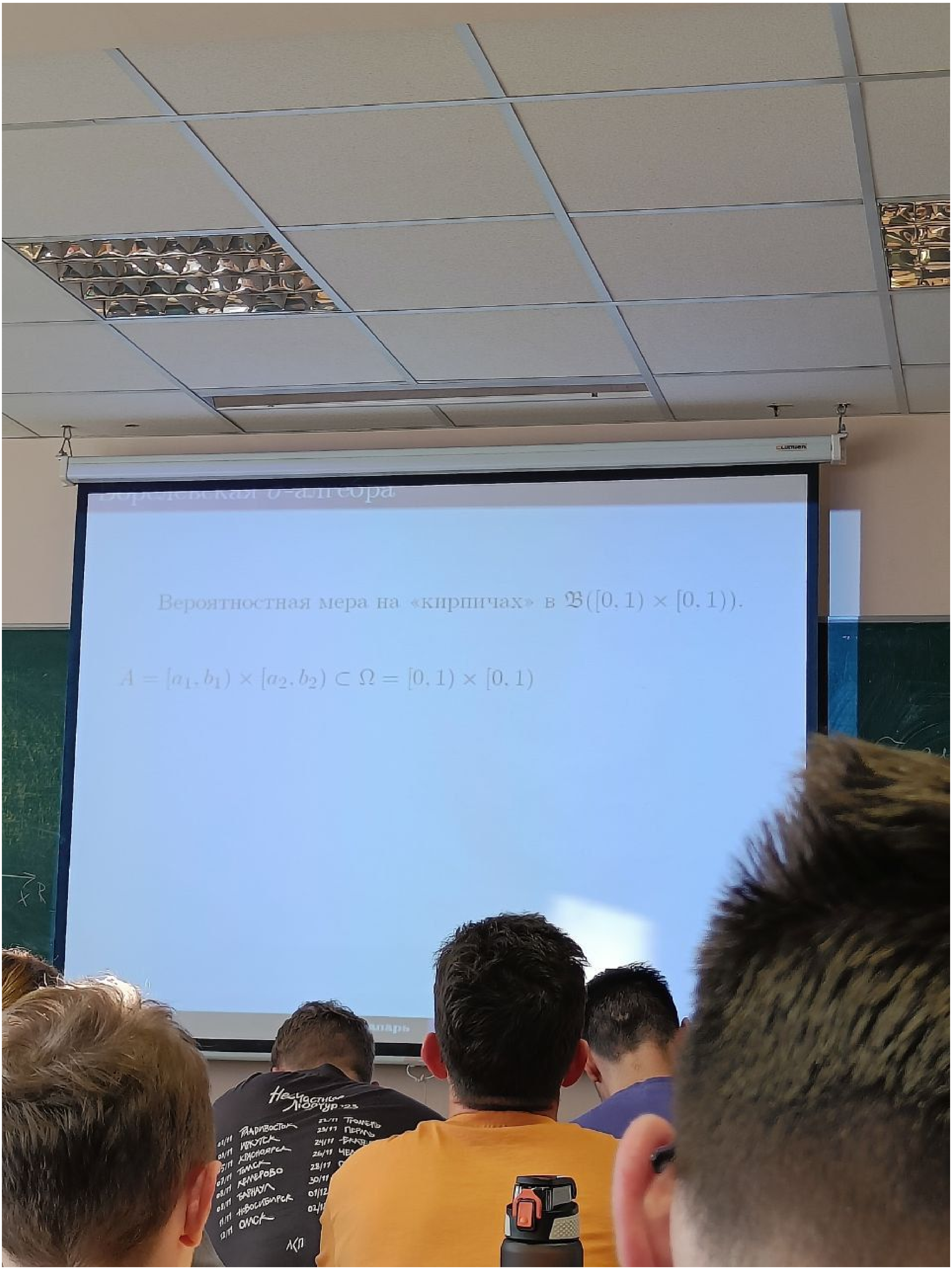
3 (Упр.) Если $A \subseteq B$, то

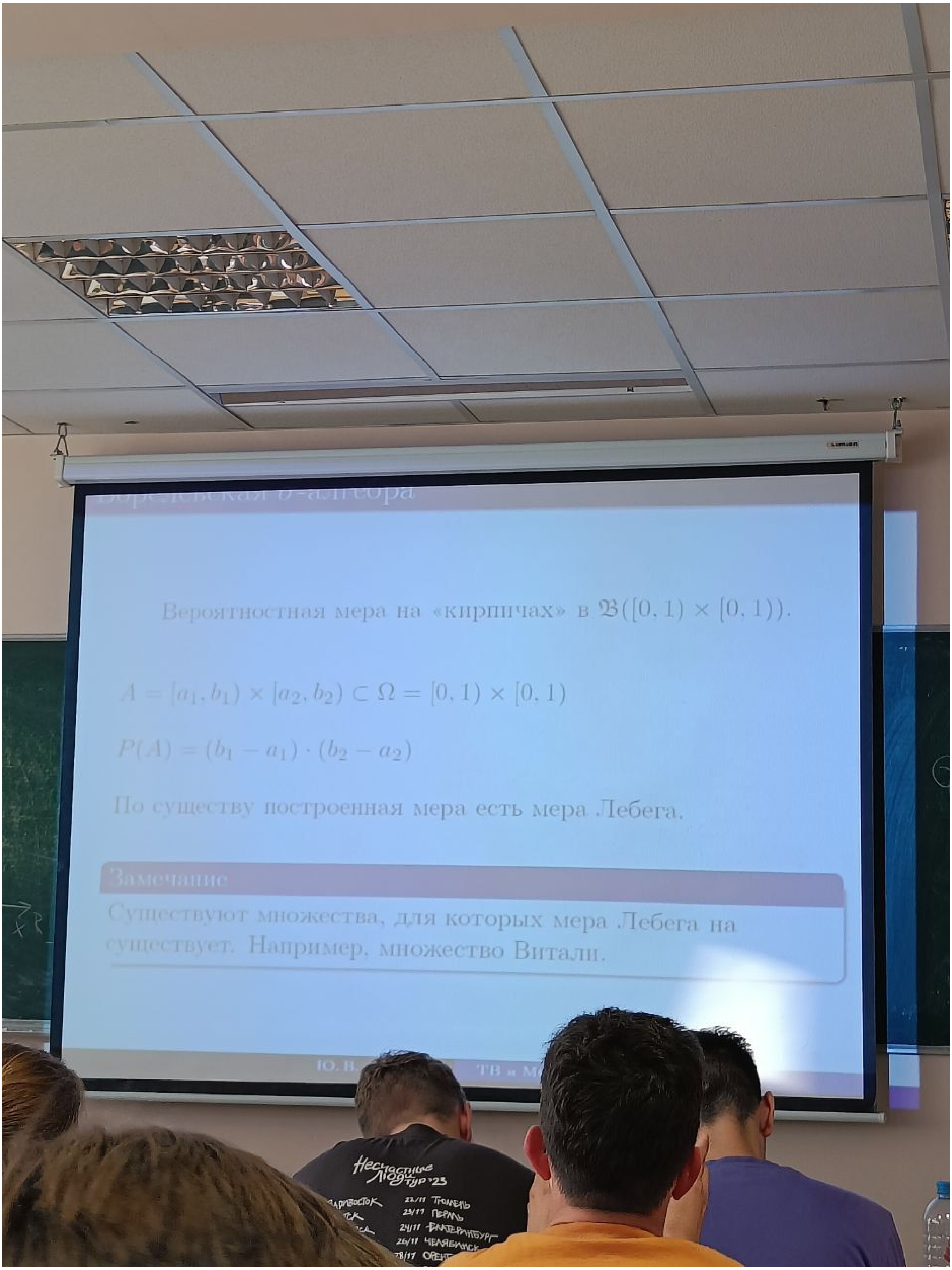
$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

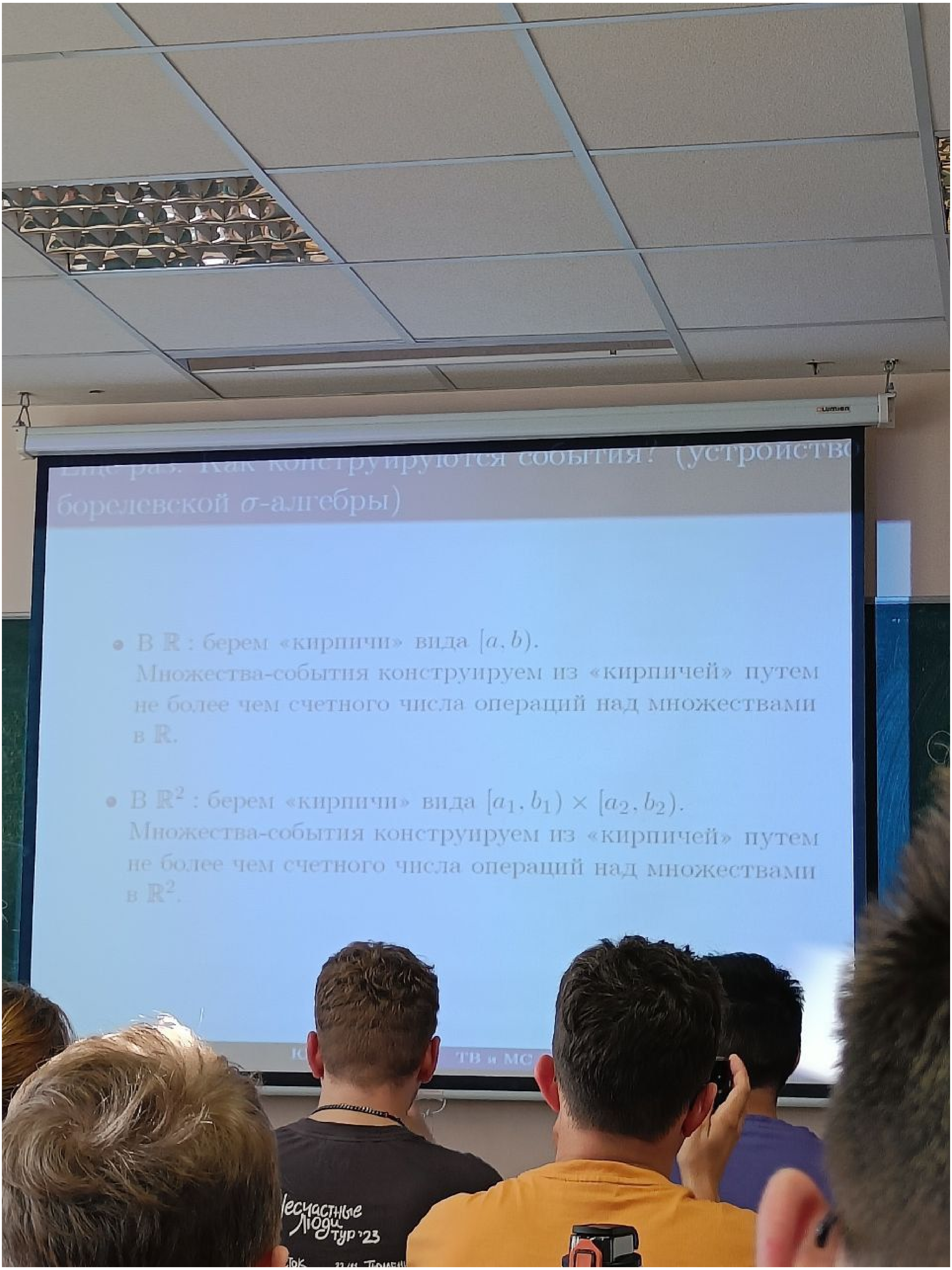
При этом $P(B \setminus A) \geqslant 0$ — свойство монотонности вероятности.


Борелевская σ-алгебра
В роли σ-алгебры случайных событий вероятностного пространства обычно выступает борелевская σ-алгебра.
$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}$ (минимальная σ-алгебра, содержащая множество всех интервалов вещественной прямой, например, содержащая все множества $[a, b)$).
$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^2$ (минимальная σ-алгебра, содержащая «прямоугольники» вида $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$). Например, множество, которое можно получить из «кирпичей», применяя не более чем счетное число теоретико-множественных операций.
ТВ и МС


Борелевская σ-алгебра
В роли σ-алгебры случайных событий вероятностного
пространства обычно выступает борелевская σ-алгебра.
$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}$ (минимальная σ-алгебра,
содержащая множество всех интервалов вещественной
прямой, например, содержащая все множества $[a, b)$).
$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^2$ (минимальная
σ-алгебра, содержащая «прямоугольники» вида
$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$). Например, множество, которое можно
получить из «кирпичей», применяя не более чем счетное
число теоретико-множественных операций.
$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$ (строится аналогично;
«кирпич» $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_n, b_n)$)
Несчастные Люди тур '23


Вероятностная мера на «кирпичах» в $\mathfrak{B}([0,1)\times[0,1))$.
$A=[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\subset\Omega=[0,1)\times[0,1)$


Вероятностная мера на «кирпичах» в $\mathfrak{B}([0,1)\times[0,1))$.
$A = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \subset \Omega = [0,1) \times [0,1)$
$P(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$
По существу построенная мера есть мера Лебега.
Замечание
Существуют множества, для которых мера Лебега на существует. Например, множество Витали.


Как конструируются события? (устройство
борелевской σ-алгебры)
В $\mathbb{R}$: берем «кирпичи» вида $[a, b)$.
Множества-события конструируем из «кирпичей» путем не более чем счетного числа операций над множествами в $\mathbb{R}$.
В $\mathbb{R}^2$: берем «кирпичи» вида $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$.
Множества-события конструируем из «кирпичей» путем не более чем счетного числа операций над множествами в $\mathbb{R}^2$.
ТВ и МС