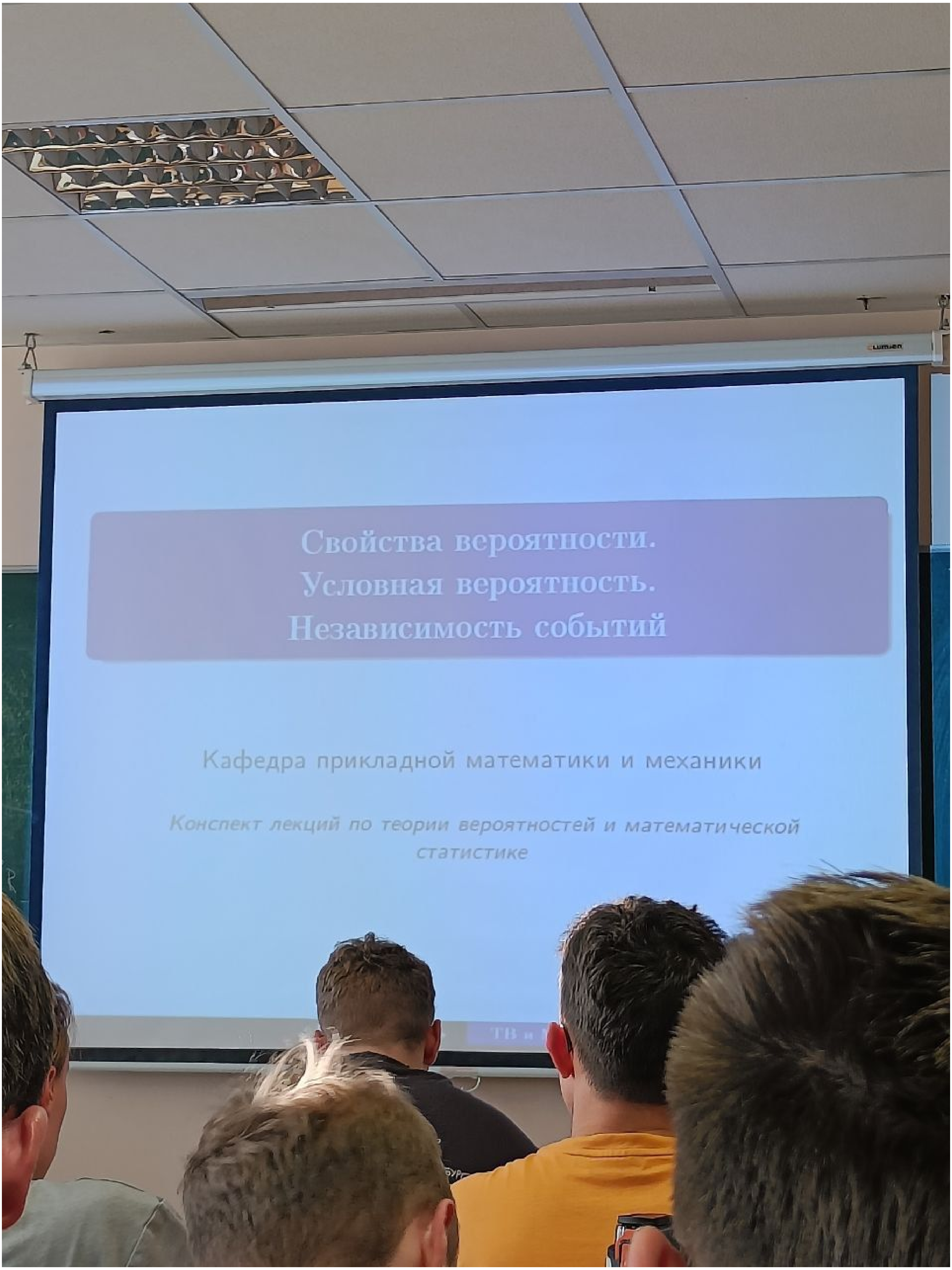
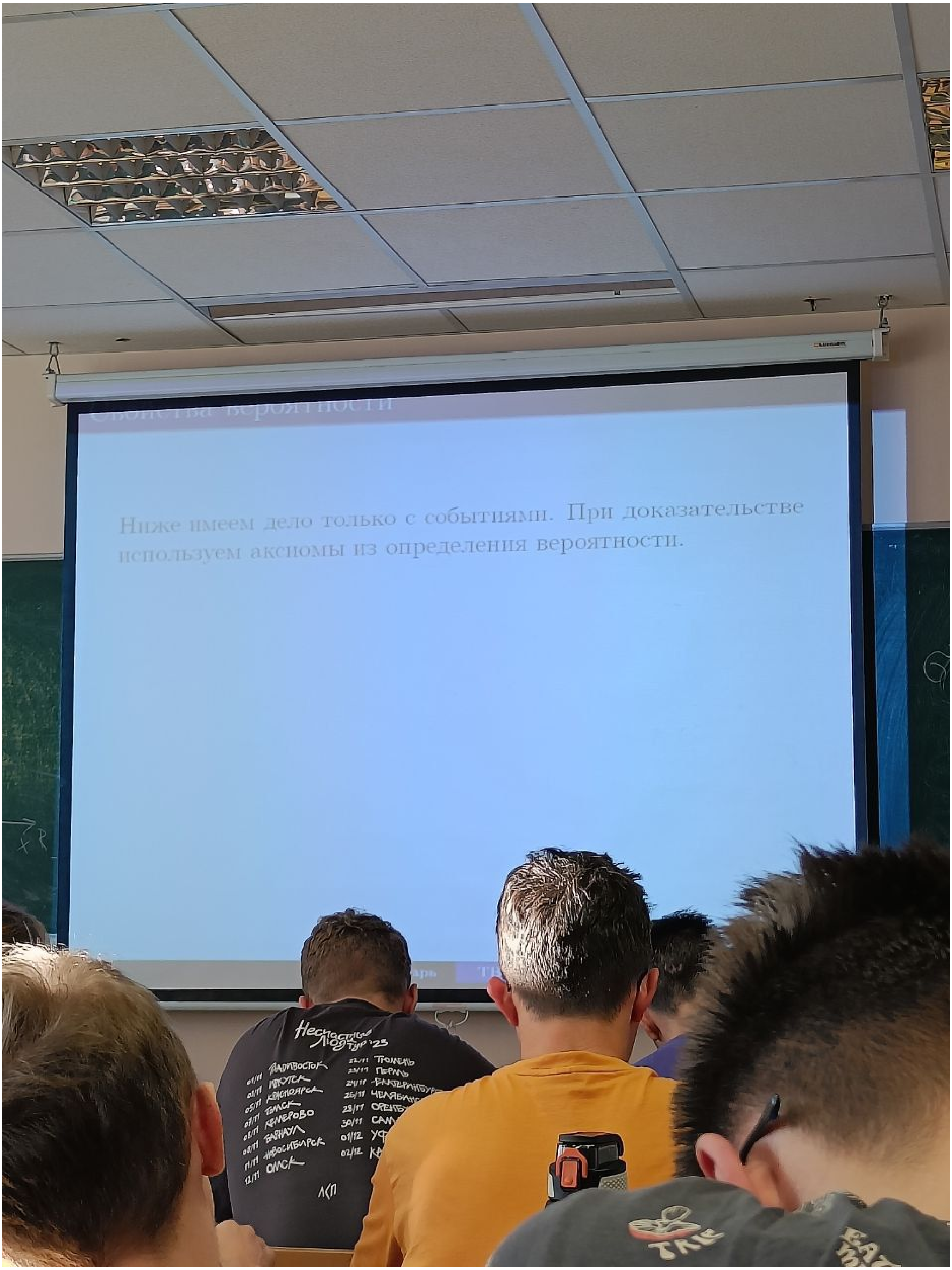
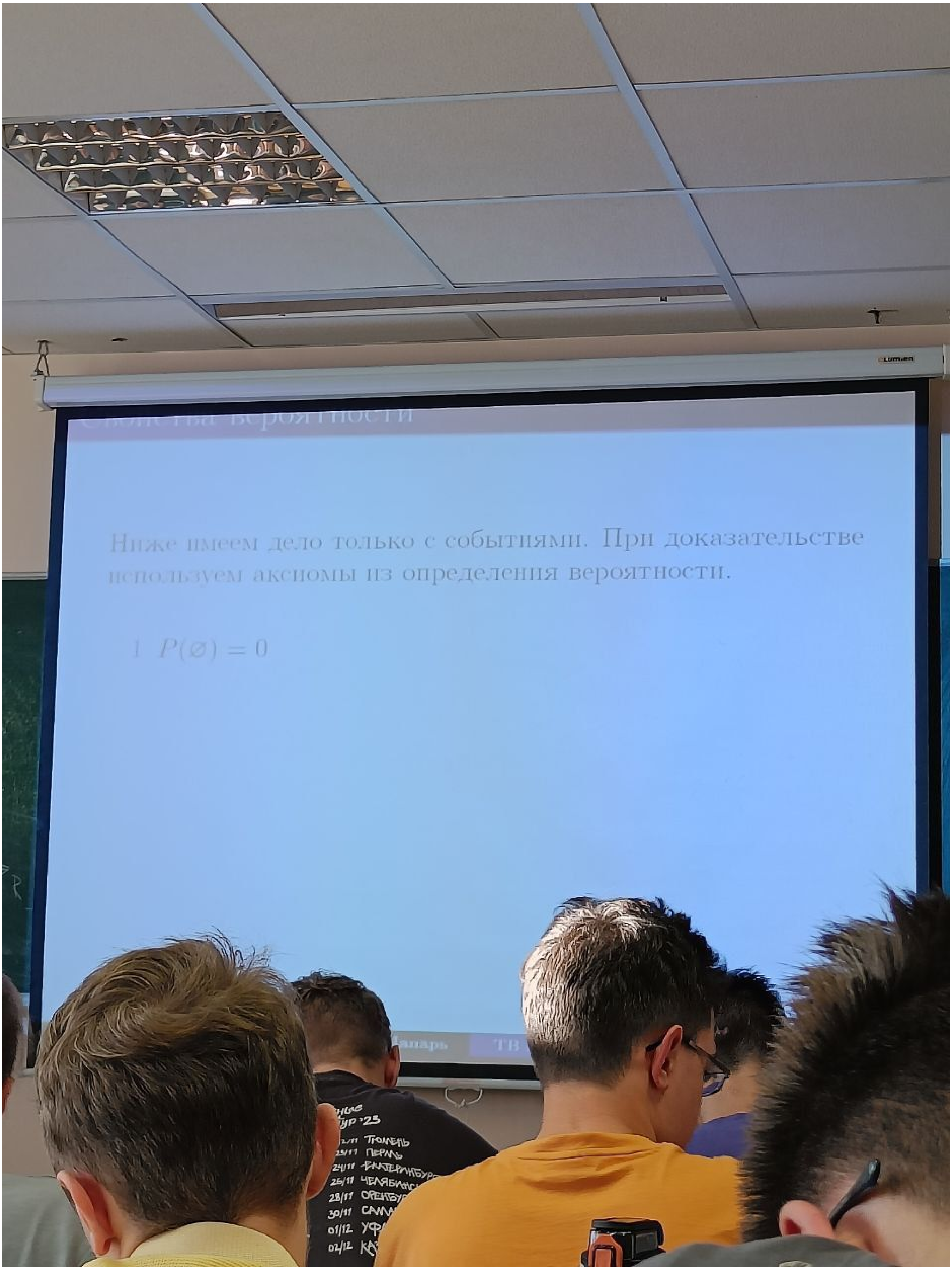

Свойства вероятности.
Условная вероятность.
Независимость событий
Кафедра прикладной математики и механики
Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике


Свойства вероятности
Ниже имеем дело только с событиями. При доказательстве используем аксиомы из определения вероятности.


Свойства вероятности
Ниже имеем дело только с событиями. При доказательстве используем аксиомы из определения вероятности.
1. $P(\varnothing) = 0$

Свойства вероятности

3 (Упр.) Если $A \subseteq B$, то

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

При этом $P(B \setminus A) \geqslant 0$ — свойство монотонности вероятности.

Свойства вероятности

3 (Упр.) Если $A \subseteq B$, то

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

При этом $P(B \setminus A) \geqslant 0$ — свойство монотонности вероятности.

4 Для любого события A

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

Доказательство.

$P(A) \geqslant 0$ по аксиоме 1.

Т.к. $A \subseteq \Omega$, то $P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$.

Теорема сложения

Теорема 1

Для любых событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство.

$A \cup B = A + B \cdot \overline{A}$,

$B = AB + B \cdot \overline{A}$,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cdot \overline{A})$,

$P(B) = P(AB) + P(B \cdot \overline{A})$.

Из последних двух формул следует тр

Следствия

- (1) Если $A \cdot B = \varnothing$ (т.е. A и B несовместны), то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

- (2) Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствия

Доказательство.

БИ: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ (по следствию 1 из теоремы);

ШИ: Пусть верно предположение индукции:
$P\left(\sum\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(A_i)$. Тогда

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) + P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i).$$

Следствия

- (3) Для трёх совместных событий A, B и C справедлива формула

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$-P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

Доказательство.

$$P(\underbrace{A \cup B} \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cdot C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC \cup BC) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(\underbrace{ACBC}_{\text{ABC}}).$$

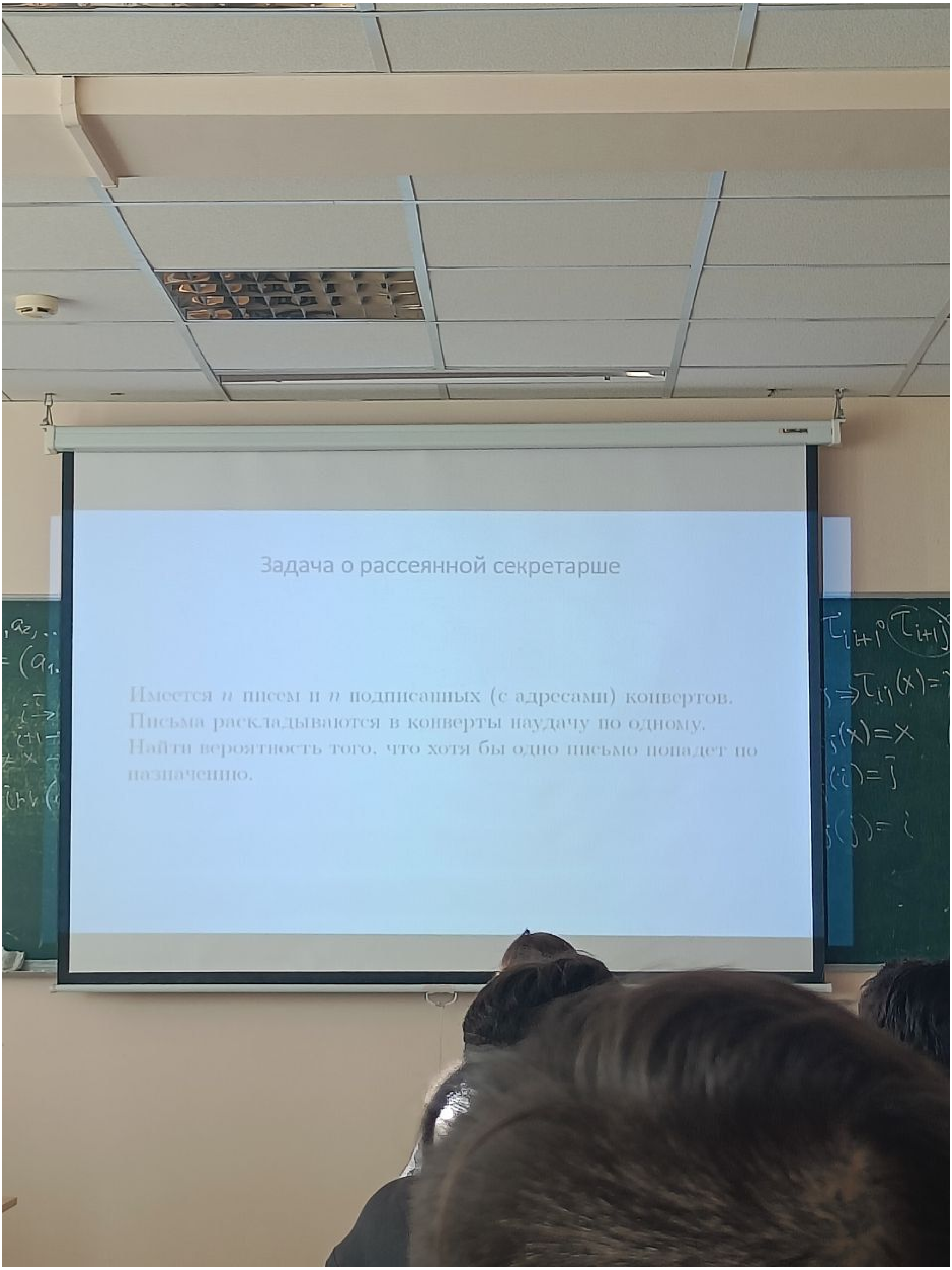
$\square$

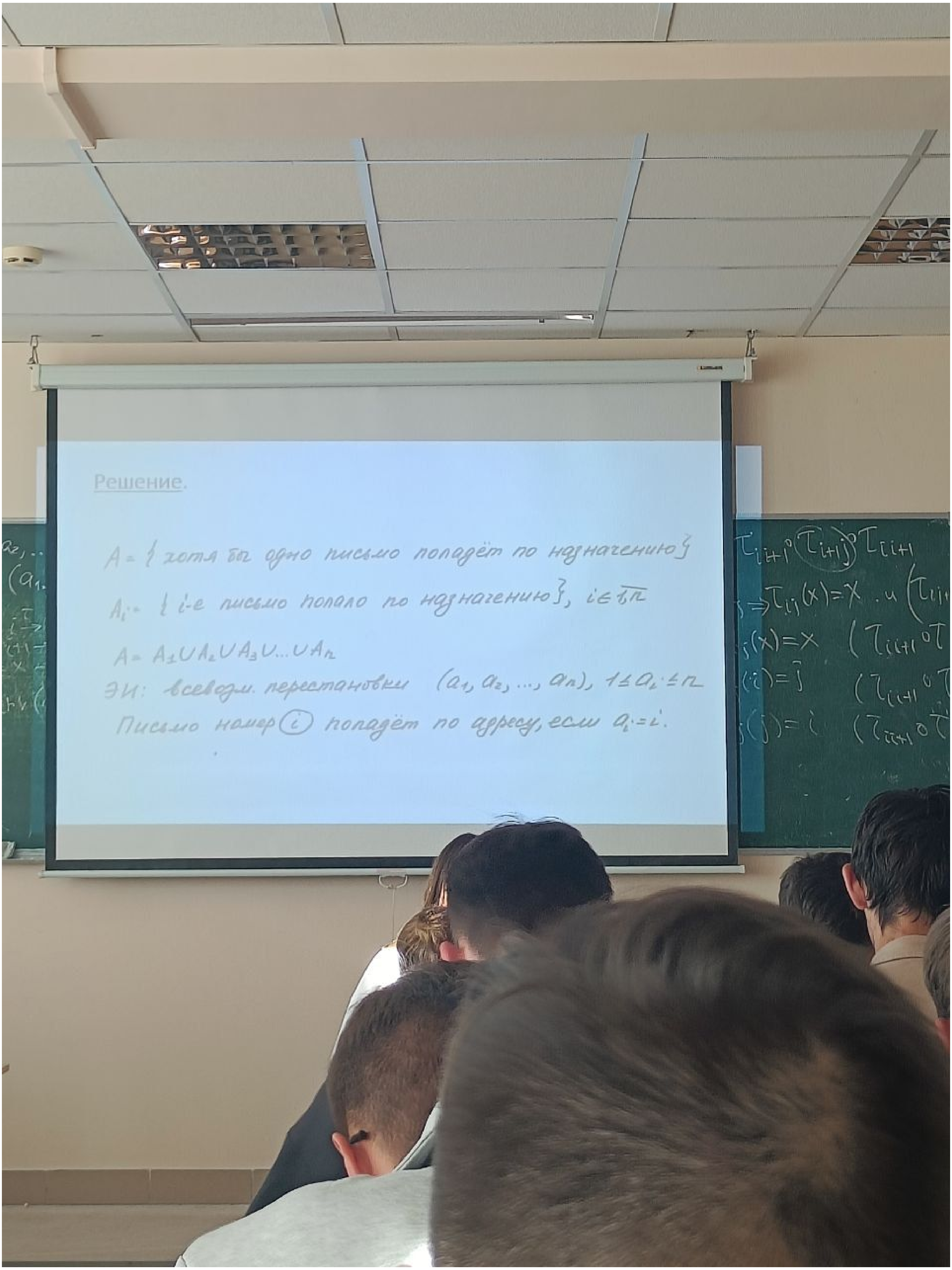
Следствия

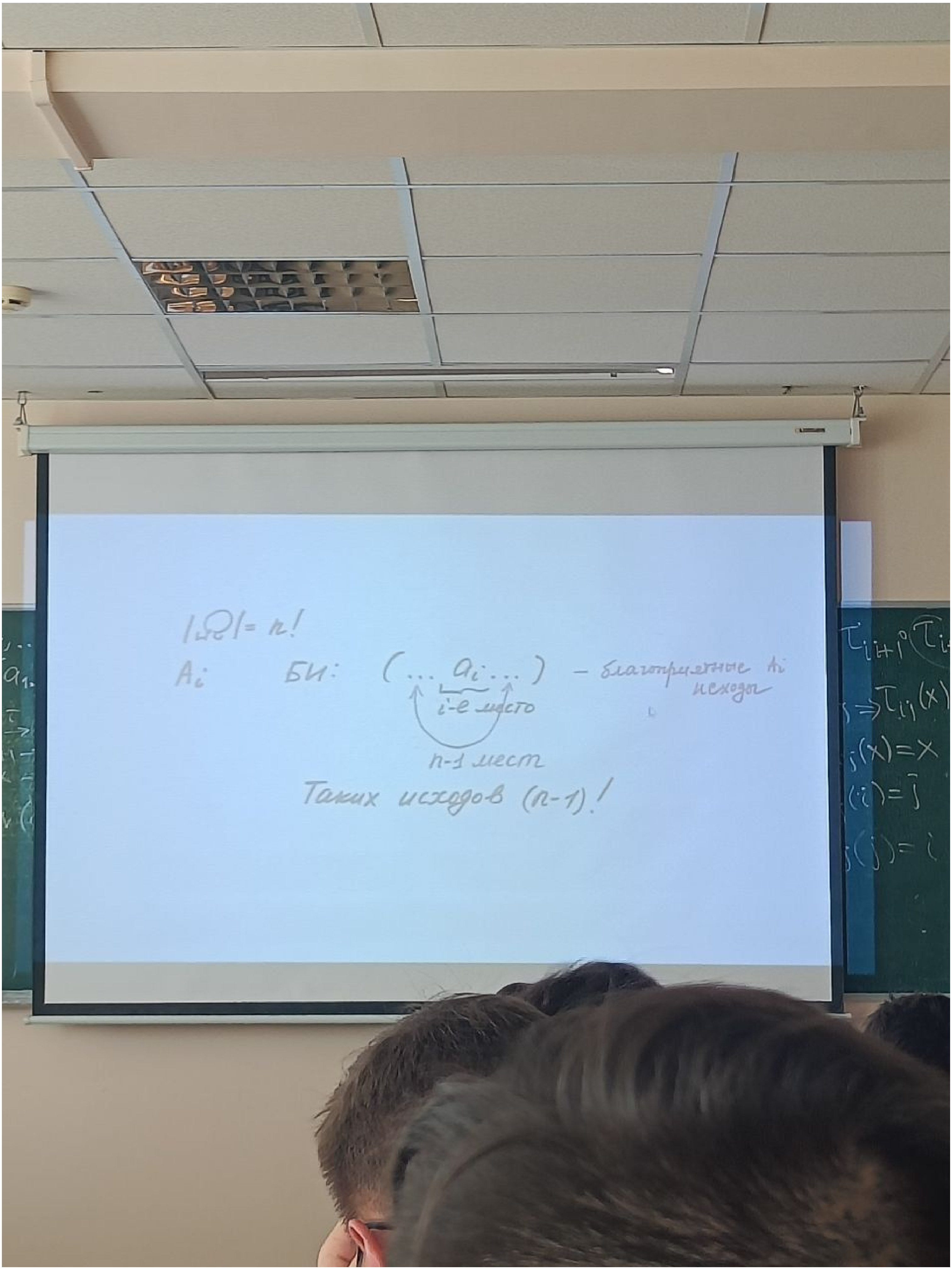
- (4) Общий случай: для любого конечного набора событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедлива формула

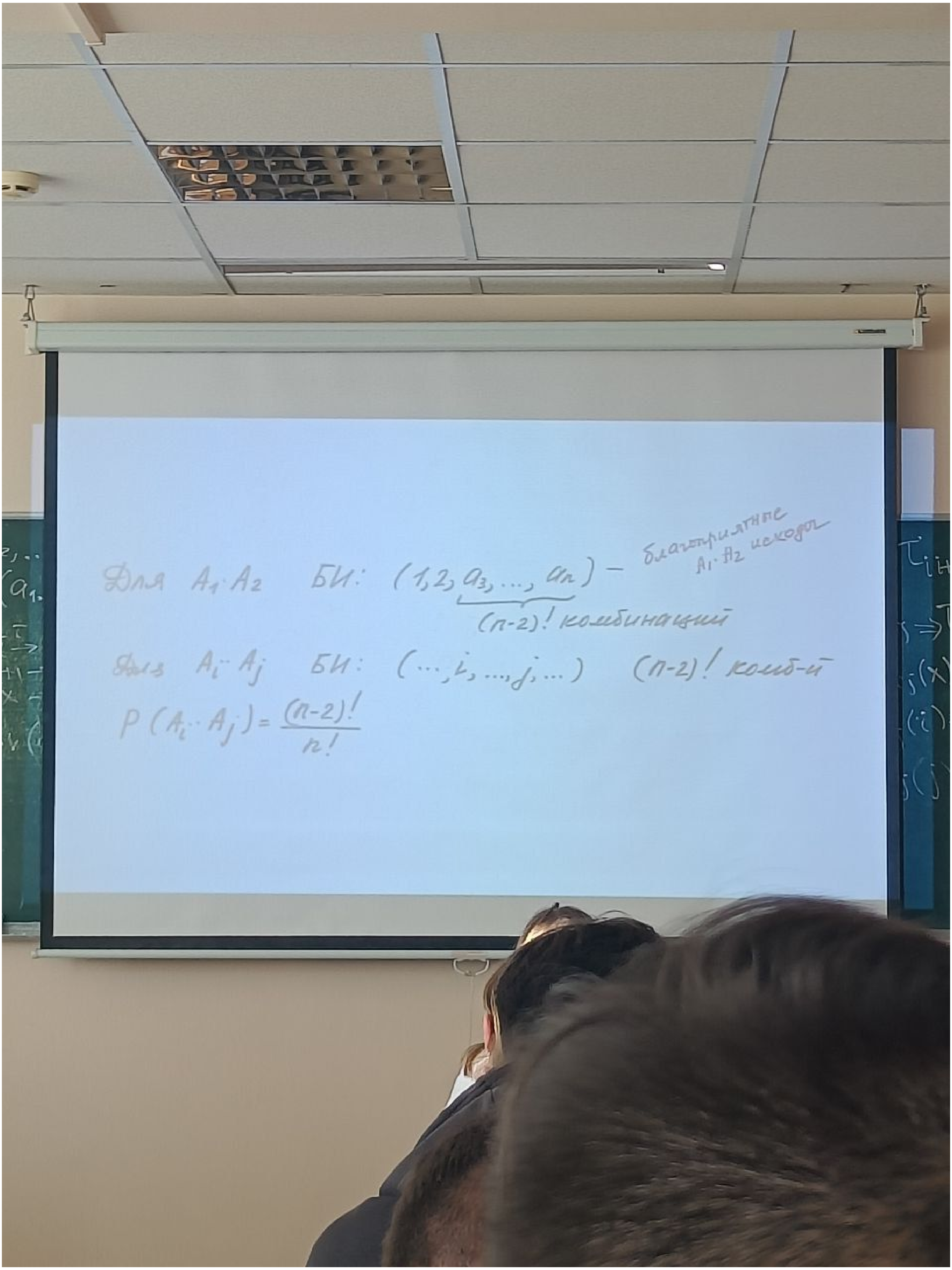
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cdot A_j) +$$

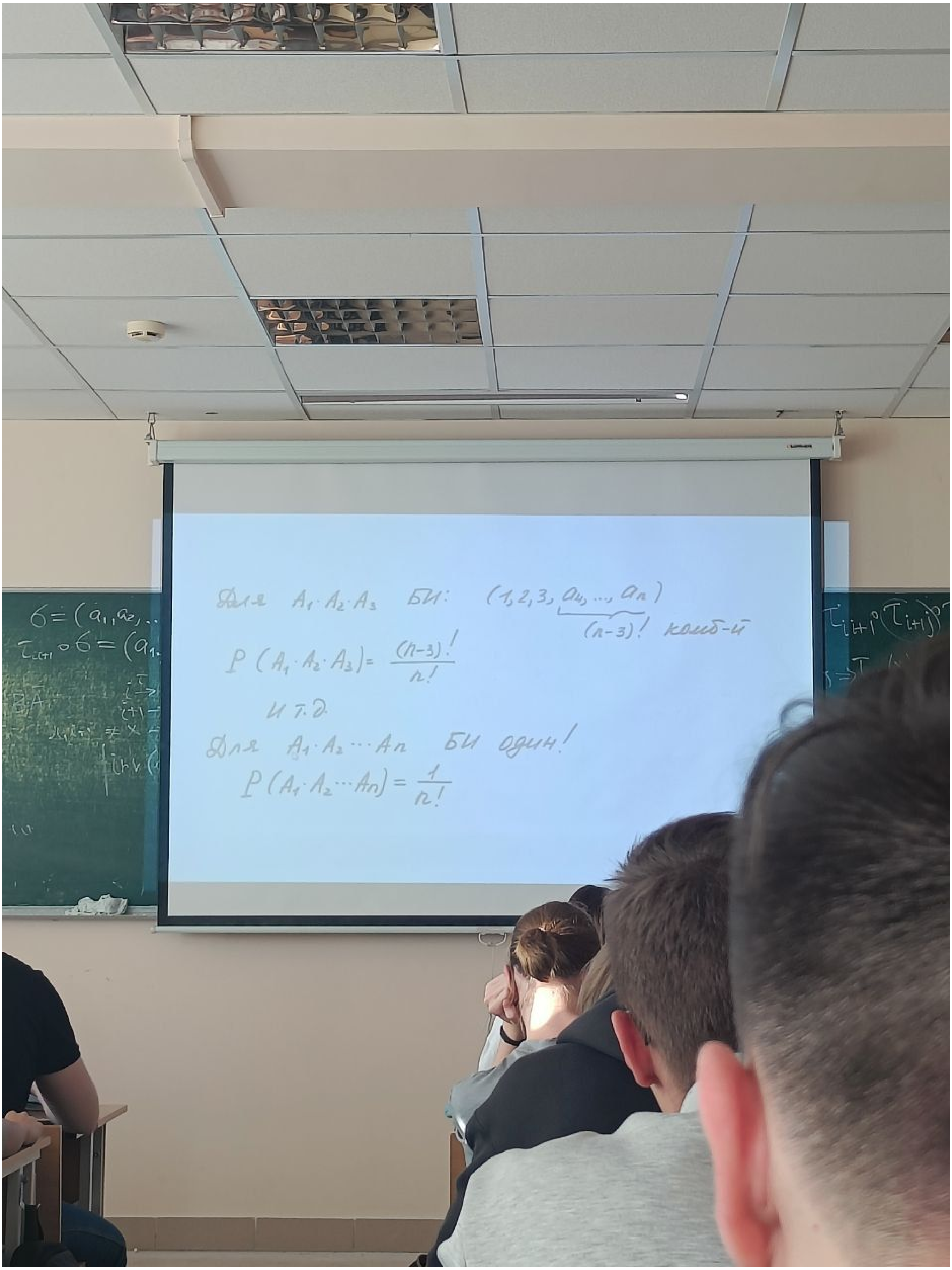
$$+ \sum_{i<j<m} P(A_i \cdot A_j \cdot A_m) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)$$


Задача о рассеянной секретарше
Имеется n писем и n подписанных (с адресами) конвертов. Письма раскладываются в конверты наудачу по одному. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет по назначению.


Решение.
$A = \{$ хотя бы одно письмо попадёт по назначению $\}$
$A_i = \{$ i-е письмо попало по назначению $\}$, $i \in \overline{1,n}$
$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$
ЭИ: всевозм. перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $1 \le a_i \le n$
Письмо номер i попадёт по адресу, если $a_i = i$.


|Ω| = n!
Aᵢ БИ: (… aᵢ …) – благоприятные Aᵢ исходы
i-е место
n-1 мест
Таких исходов (n-1)!


Для $A_1 \cdot A_2$ БИ: $(1, 2, \underbrace{a_3, \ldots, a_n}_{(n-2)!\ \text{комбинаций}})$ – благоприятные $A_1 \cdot A_2$ исходы
Для $A_i \cdot A_j$ БИ: $(\ldots, i, \ldots, j, \ldots)$ $(n-2)!$ комб-й
$P(A_i \cdot A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$



Для $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ БИ: $(1, 2, 3, \underbrace{a_4, \dots, a_n}_{(n-3)!})$ комб-й
$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{(n-3)!}{n!}$
и т.д.
Для $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ БИ один!
$P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{n!}$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \Big[\; \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = C_n^1 \cdot \frac{1}{n} = 1;$$

$$\sum_{i<j} P(A_i \cdot A_j) = C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{2!}$$

число способов выбрать места для i и j

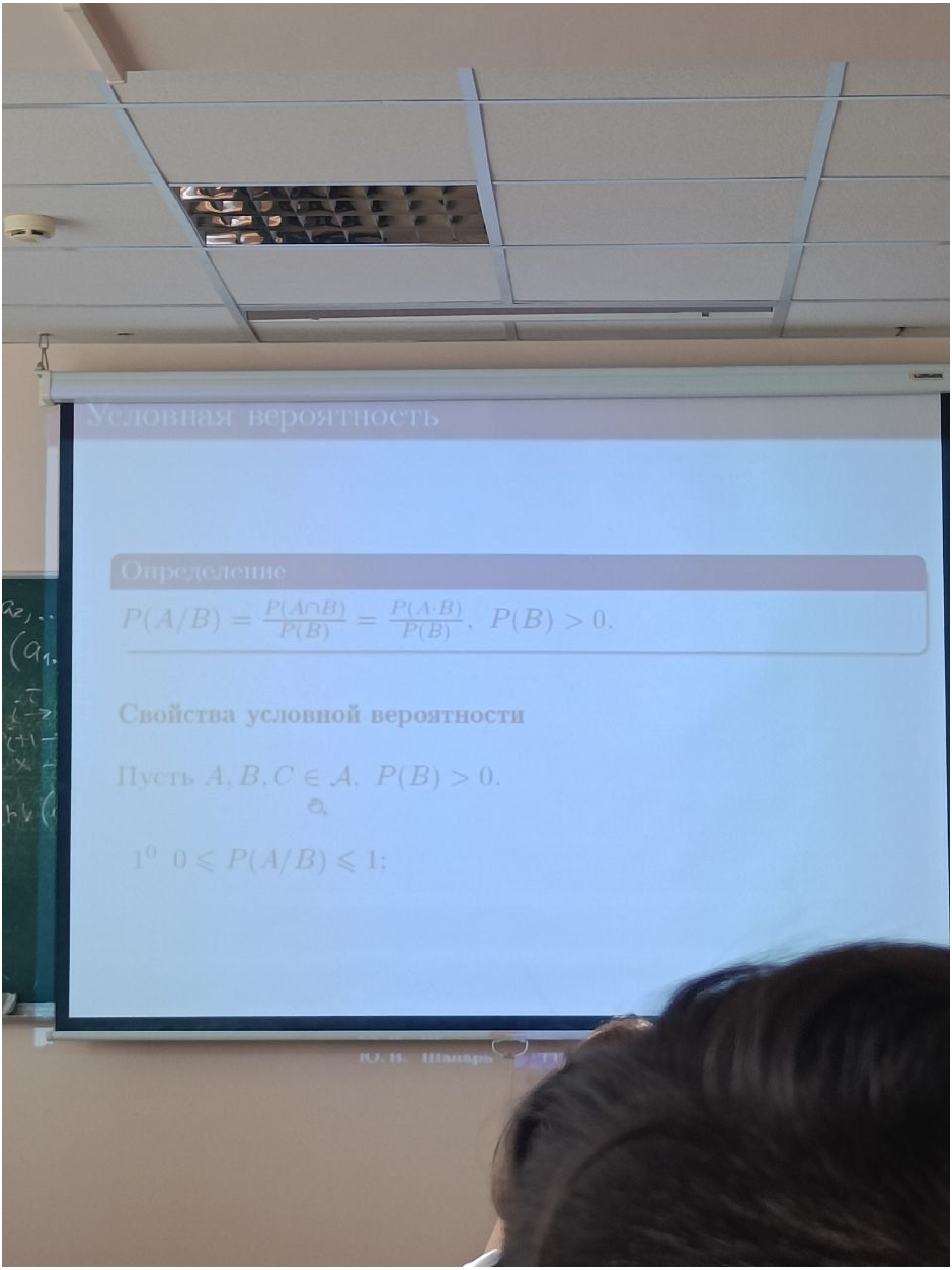
Полная группа событий

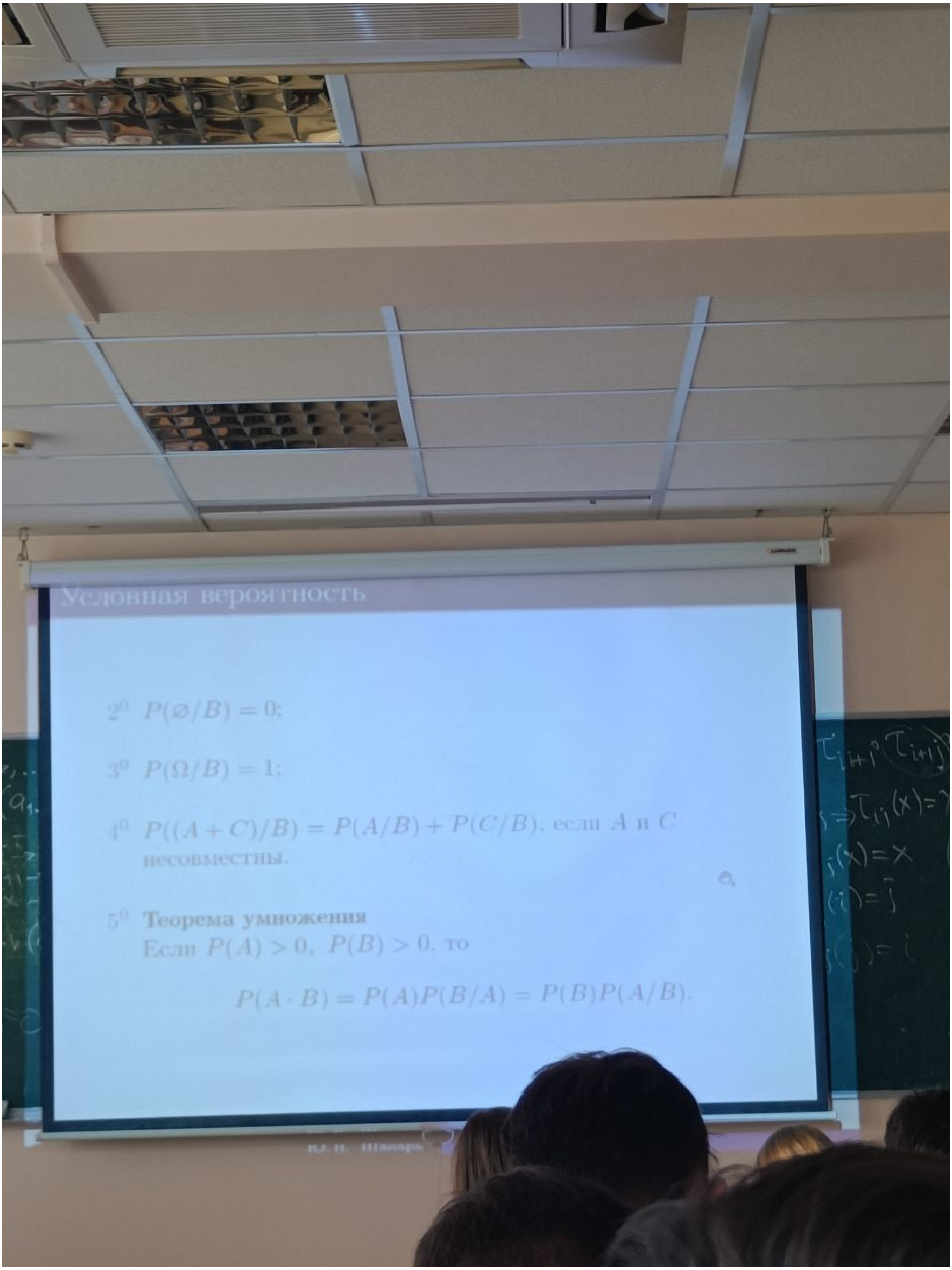
Определение

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу событий в данном эксперименте, если они

- они попарно несовместны, т.е. $A_i A_j = \varnothing$, $i \neq j$
- их сумма равна достоверному событию $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$
- $P(A_i) > 0$, $i \in \overline{1, n}$

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.


Условная вероятность
Определение
$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \ P(B) > 0.$
Свойства условной вероятности
Пусть $A, B, C \in \mathcal{A}, \ P(B) > 0.$
$1^0 \ 0 \leqslant P(A/B) \leqslant 1;$
Ю.В. Шапарь


Условная вероятность
2^0 $P(\varnothing/B) = 0$;
3^0 $P(\Omega/B) = 1$;
4^0 $P((A+C)/B) = P(A/B) + P(C/B)$, если A и C несовместны.
5^0 **Теорема умножения**
Если $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, то
$$P(A \cdot B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$
Ю.В. Шапарь

Теорема умножения вероятностей

Общий случай

Для любых событий $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ верно равенство:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_n) = \\ = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \cdots P(A_n/A_1A_2 \cdots A_{n-1}),$$

если все участвующие в формуле условные вероятности определены.

Доказательство можно провести ММИ (Упр).

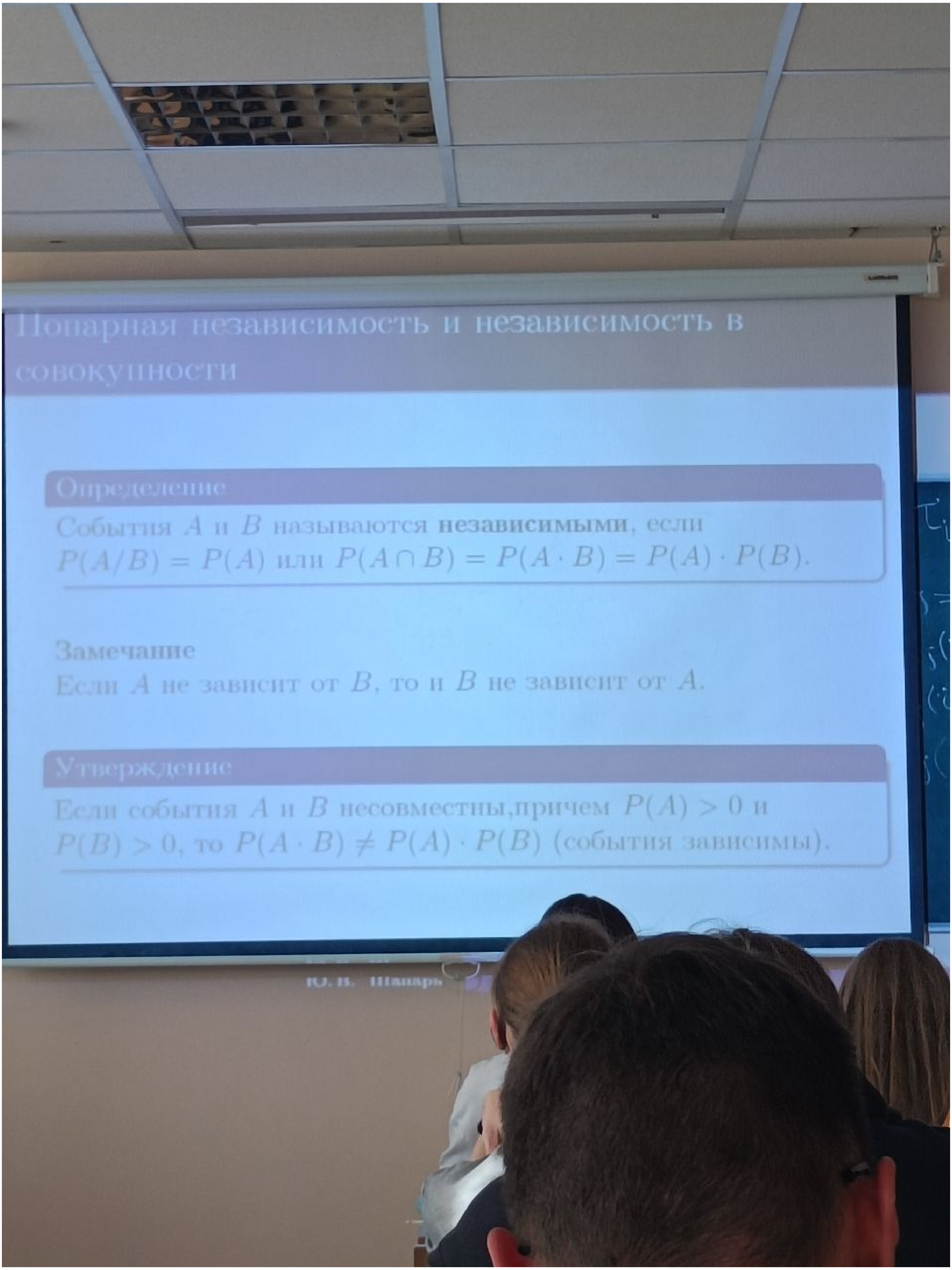
Независимость событий

Определение

События A и B называются **независимыми**, если наступление (ненаступление) одного из них не меняет вероятности наступления (ненаступления) другого.

В противном случае события называются **зависимыми**.

На практике не всегда ясно, выполняется ли условие из определения $\Rightarrow$ требуется определить независимость событий более формально.


Попарная независимость и независимость в совокупности
Определение
События A и B называются **независимыми**, если $P(A/B) = P(A)$ или $P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.
Замечание
Если A не зависит от B, то и B не зависит от A.
Утверждение
Если события A и B несовместны, причем $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то $P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B)$ (события зависимы).
Ю.В. Шапарь

Пример независимых событий

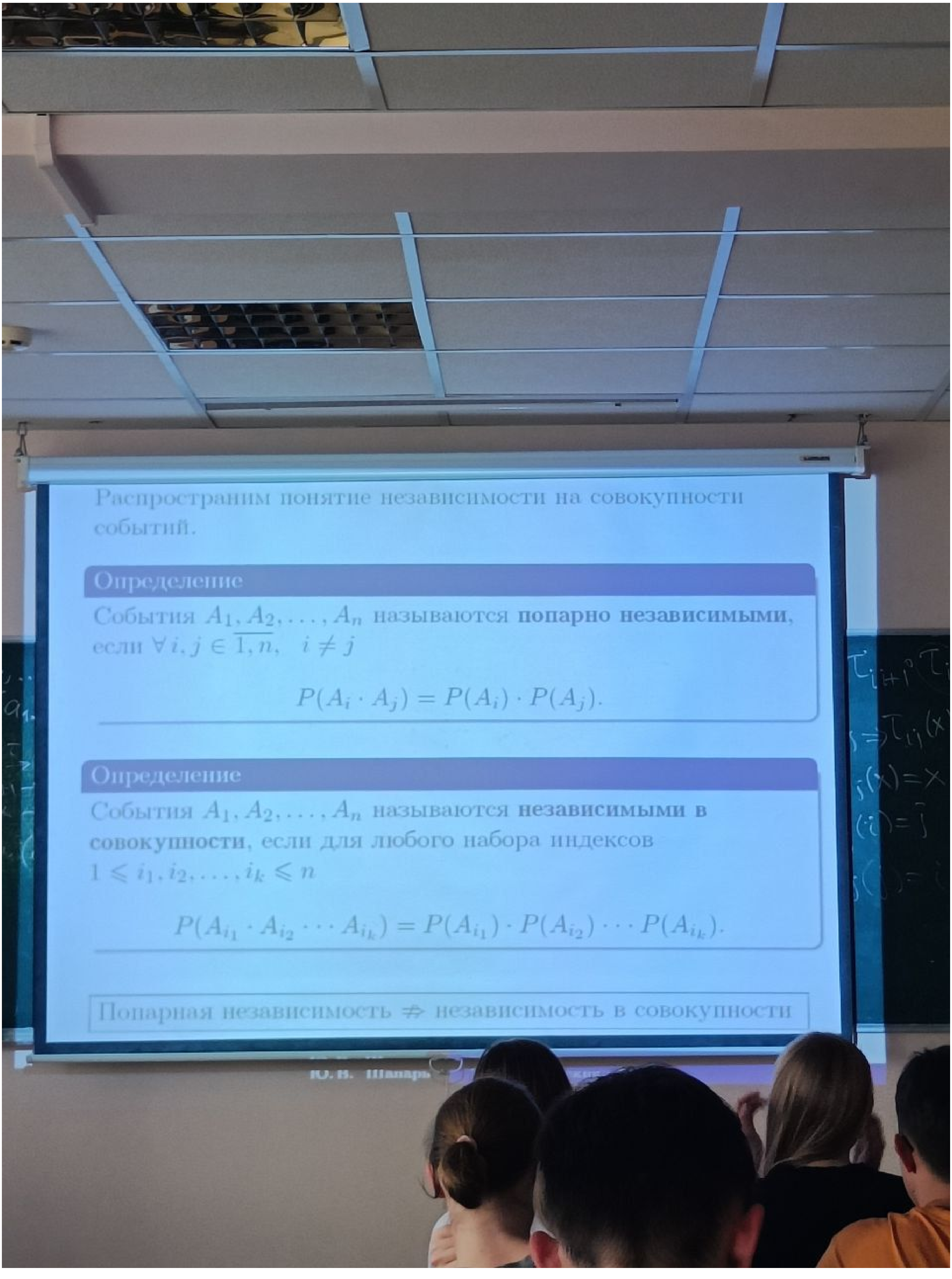
Э: двукратное подбрасывание монеты

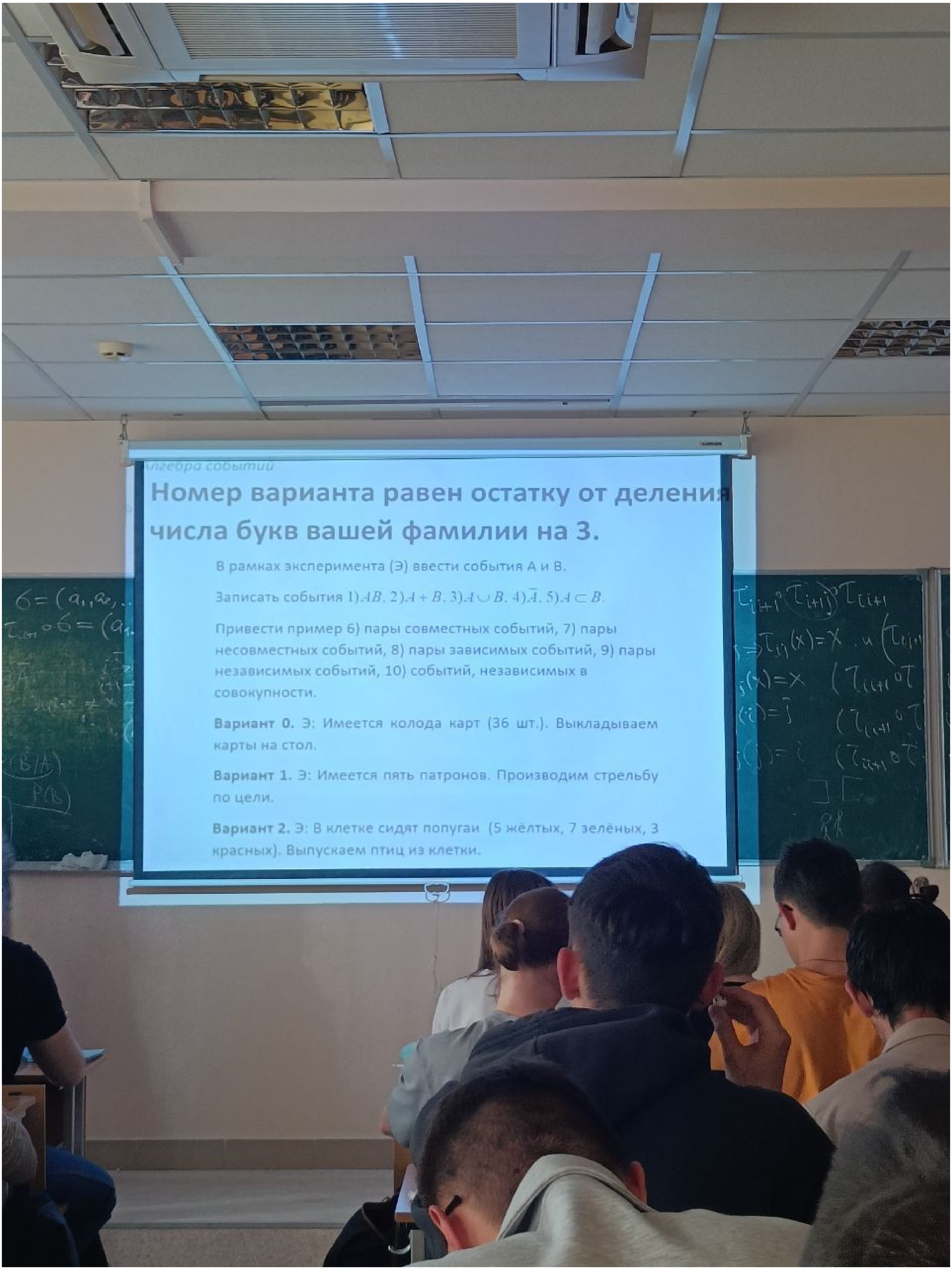
$\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$, $P(\omega_i) = \frac{1}{4}$, $i \in \overline{1,4}$

Событие
$A = \{$выпадение герба при втором подбрасывании$\} =$
$= \{ГГ, РГ\}$ не зависит от события
$B = \{$выпадение герба при первом подбрасывании$\} =$
$= \{ГГ, ГР\}$.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cdot B) = P(\{ГГ\}) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$.


Распространим понятие независимости на совокупности событий.
Определение
События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **попарно независимыми**, если $\forall\, i, j \in \overline{1, n}, \quad i \neq j$
$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j).$$
Определение
События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора индексов $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_k \leqslant n$
$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$
Попарная независимость $\nRightarrow$ независимость в совокупности



Алгебра событий
Номер варианта равен остатку от деления числа букв вашей фамилии на 3.
В рамках эксперимента (Э) ввести события А и В.
Записать события 1) AB. 2) $A+B$. 3) $A \cup B$. 4) $\bar{A}$. 5) $A \subset B$.
Привести пример 6) пары совместных событий, 7) пары несовместных событий, 8) пары зависимых событий, 9) пары независимых событий, 10) событий, независимых в совокупности.
Вариант 0. Э: Имеется колода карт (36 шт.). Выкладываем карты на стол.
Вариант 1. Э: Имеется пять патронов. Производим стрельбу по цели.
Вариант 2. Э: В клетке сидят попугаи (5 жёлтых, 7 зелёных, 3 красных). Выпускаем птиц из клетки.