Пример (тест на заболевание, тест на беременность и т.д.)

Решение

$A = \{$человек получил положительный результат теста$\}$

$H_1 = \{$человек болен$\}$

$H_2 = \{$человек здоров$\}$

$P(H_1) = 0,02;\ P(H_2) = 0,98$

– вероятности гипотез (составляющих полную группу).

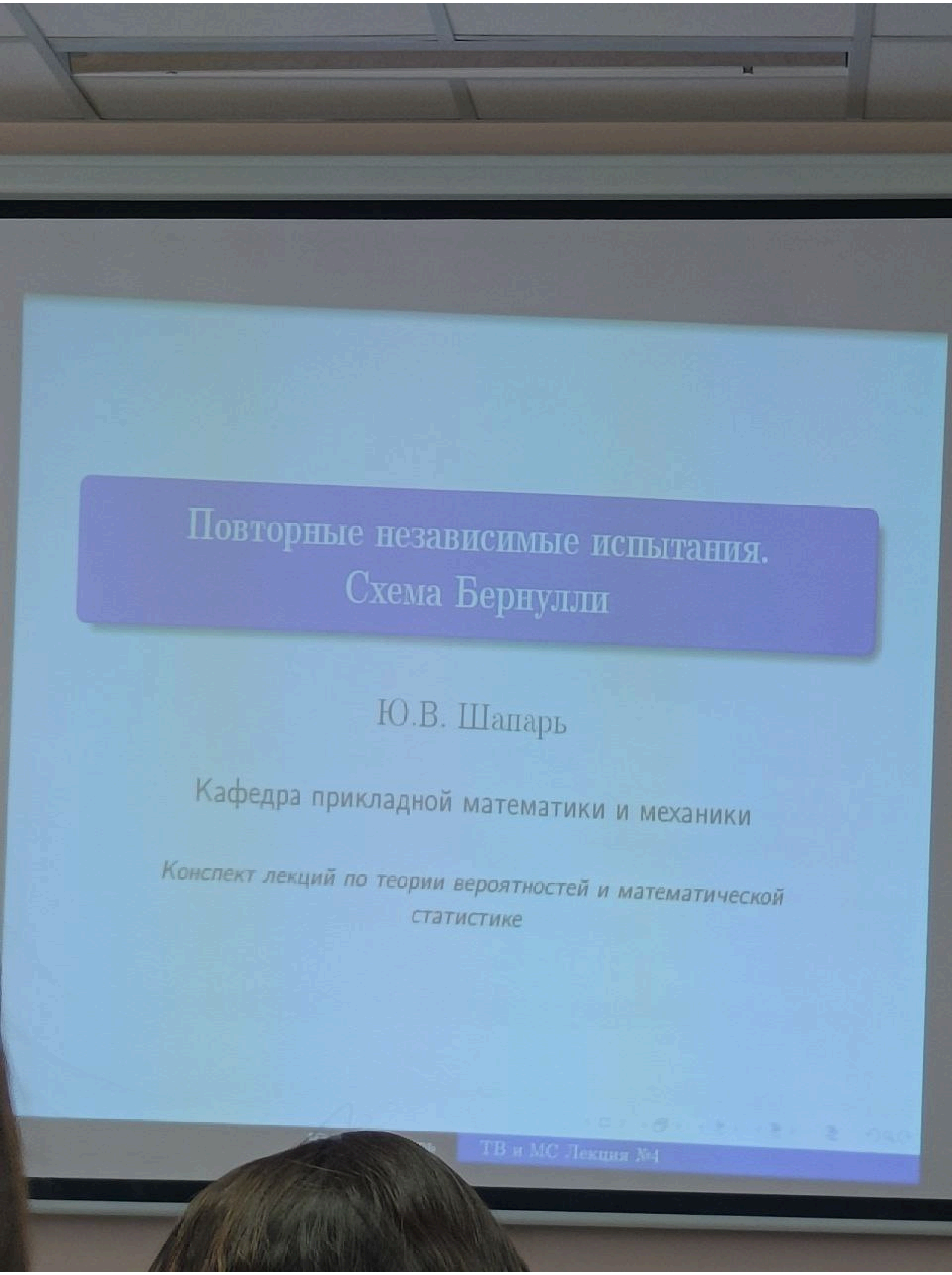
Пример (тест на заболевание, тест на беременность и т.д.)

$P(A/H_1) = 0,97$; $P(A/H_2) = 0,01$

– условные вероятности гипотез.

По формуле Байеса

$$P(H_1/A) = \frac{0,02 \cdot 0,97}{0,02 \cdot 0,97 + 0,98 \cdot 0,01} \approx 0,664.$$


Повторные независимые испытания.
Схема Бернулли
Ю.В. Шапарь
Кафедра прикладной математики и механики
Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике
ТВ и МС Лекция №4

Постановка задачи.

Проводятся n независимых испытаний, в каждом из которых может наступить или не наступить событие A.

$P(A) = p$ — вероятность успеха в одном испытании;

$P(\overline{A}) = 1 - p = q$ — вероятность неуспеха в одном испытании.

Задача 1

Вычислить $P_n(m)$ — вероятность того, что в серии из n испытаний будет ровно m успехов.

Задача 2

Вычислить $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ — вероятность того, что в серии из n испытаний число успехов не менее m_1 и не более, чем m_2.

Теорема (Формула Бернулли)

В серии независимых испытаний Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Доказательство.

Пронумеруем испытания $1, \ldots, n$;

обозначим через A_i наступление события A в i-м испытании. A_i независимы в совокупности.

$P(A_i) = p$; $P(\overline{A_i}) = q$.

Рассмотрим случай $n = 3$; $m = 1$.

- $P_3(1) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) =$
  $= pq^2 + pq^2 + pq^2 = 3pq^2 = C_3^1 p^1 q^{3-1}.$

Пусть теперь $n = 3$, $m = 2$.

- $P_3(2) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3) =$
$= 3p^2 q = C_3^2 p^2 q^{3-2}$.

Общий случай:

- $P_n(m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ слагаемых}} =$
$= C_n^m p^m q^{n-m}$.

Теорема доказана.

Пример (пирамидка Берштейна)

$\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{4}, \omega_1 = \{\text{к}\}, \omega_2 = \{\text{б}\}, \omega_3 = \{\text{с}\}, \omega_4 = \{\text{м} = \overbrace{\text{кбс}}\}$

Рассмотрим события

$A = \{\text{к,м}\}$ - пирамидка упала на грань, содержащую красный цвет

$B = \{\text{б,м}\}$ - пирамидка упала на грань, содержащую белый цвет

$C = \{\text{с,м}\}$ - пирамидка упала на грань, содержащую синий цвет

Пример (пирамидка Берштейна)

$\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{4}$, $\omega_1 = \{\text{к}\}$, $\omega_2 = \{\text{б}\}$, $\omega_3 = \{\text{с}\}$, $\omega_4 = \{\text{м} = \overbrace{\text{кбс}}\}$

Рассмотрим события

$A = \{\text{к,м}\}$ – пирамидка упала на грань, содержащую красный цвет

$B = \{\text{б,м}\}$ – пирамидка упала на грань, содержащую белый цвет

$C = \{\text{с,м}\}$ – пирамидка упала на грань, содержащую синий цвет

$P(A) = P(B) = P(C) = 2/4 = 1/2$

$P(A \cdot B) = P(\text{м}) = 1/4$

$P(A \cdot C) = P(\text{м}) = 1/4$

Т.о. A, B, C попарно независимы.

Однако $P(A \cdot B \cdot C) = P(\text{м}) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$, т.е. независимости в совокупности нет!

Свойства независимости

1^0 Если события A и B независимы, то независимы следующие пары событий: A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B.

2^0 Вероятность наступления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ есть

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n}).$$

3^0 Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы и равновероятны ($P(A_i) = p$), то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - (1 - p)^n.$$

Примеры

1. Задача про сессию.
2. Надежность цепи.

Формула полной вероятности

Теорема (ФПВ)

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полная группа событий (гипотез) в рамках данного Э. Тогда для любого события A справедлива формула

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

$$A = A \cdot \Omega =$$

$$= [H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega] =$$

$$= A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots + A \cdot H_n$$

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)$$

$\square$

Формула Байеса

Теорема (ФБ)

Для любого события A и полной группы гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ справедлива формула

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, \quad i \in \overline{1, n}.$$

$$= P(H_1)\,P(A|H_1) + P(H_2)\,P(A|H_2) + \dots + P(H_n)\,P(A|H_n)$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\,P(A|H_j)} \quad \forall i \in \overline{1,n}. \qquad \square$$

Замечания

1. ФПВ и ФБ справедливы и для счетной ПГГ $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$
2. Вероятности гипотез $P(H_i)$ называют **априорными.**
3. Вероятности гипотез $P(H_i/A)$ называют **апостериорными.**
4. ФБ служит для «переоценки» (обновления) априорных вероятностей.
5. ФБ играет большую роль в планировании процедур гарантийного контроля качества выпускаемой продукции (выборочный метод в МС такой гарантии не дает)

Пример (тест на заболевание, тест на беременность и т.д.)

Среди определенной группы людей вероятность заболевания N равна 0.02.
Тест, выявляющий заболевание, не совершенен: у 100 больных тест дает положительный результат в 97 случаях; среди здоровых людей положительный результат теста наблюдается в 1 случае из 100.

Найти вероятность того, что человек, получивший положительный результат теста, действительно болен.

Решение