Пусть теперь $n = 3,\ m = 2$.

- $P_3(2) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3) =$
$= 3p^2 q = C_3^2 p^2 q^{3-2}$.

Общий случай:

- $P_n(m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ слагаемых}} =$
$= C_n^m p^m q^{n-m}$.

Теорема доказана.

Формула Бернулли

Следствие

Пусть m_1, m_2 — целые числа, т.ч. $0 \le m_1 \le m_2 \le n$. Тогда

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{m_1-1} C_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=m_2+1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Пусть m_0 — наивероятнейшее число наступлений события A в серии n независимых испытаний.

Теорема

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Доказательство

По формуле Бернулли при $m \in \overline{1, n}$

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} =$$

$$= \frac{n!(m-1)!(n-m+1)!}{m!(n-m)!n!} \cdot \frac{p}{q} =$$

$$= \frac{(n-m+1)p}{m(1-p)}.$$

Доказательство

Далее рассмотрим три возможных случая:

(1)

$$\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)} > 1 \Rightarrow np - mp + p > m - mp$$

$$\Rightarrow np + p > m \Rightarrow m < (n+1)p;$$

Доказательство

Далее рассмотрим три возможных случая:

(1)

$$\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)} > 1 \Rightarrow np - mp + p > m - mp$$

$$\Rightarrow np + p > m \Rightarrow m < (n+1)p;$$

(2) $\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)} = 1 \Rightarrow m = (n+1)p;$

(3) $\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)} < 1 \Rightarrow m > (n+1)p.$

Доказательство

Таким образом

(1') $P_n(m) > P_n(m-1)$ при $m < (n+1)p$;

Доказательство

Таким образом

(1') $P_n(m) > P_n(m-1)$ при $m < (n+1)p$;

(2') $P_n(m) = P_n(m-1)$ при $m = (n+1)p$;

(3') $P_n(m) < P_n(m-1)$ при $m > (n+1)p$.

Доказательство

Следовательно для m_0 выполняются соотношения:

$$\begin{cases} P_n(m_0+1) < P_n(m_0) \\ P_n(m_0-1) < P_n(m_0) \end{cases}$$

С учетом (1') и (3') получаем:

$$\begin{cases} m_0+1 > (n+1)p \\ m_0 < (n+1)p \end{cases}$$

Доказательство

Тогда

$$\begin{cases} m_0 > np + p - 1 \\ m_0 < np + p \end{cases};$$

$$\begin{cases} m_0 > np - q \\ m_0 < np + p \end{cases}$$

Вывод:

$$np - q < m_0 < np + p.$$

Независимые испытания с несколькими исходами

Пусть в одном испытании возможны m исходов: $1, 2, \ldots, m$ с вероятностями p_i, $i \in \overline{1, m}$.

При этом $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$.

Обозначим через $P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ вероятность того, что в $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ независимых испытаниях исход 1 появился n_1 раз, исход 2 — n_2 раз, … исход m — n_m раз.

Утверждение

Для любого n и любых целых $n_1 \geqslant 0, n_2 \geqslant 0, \ldots, n_m \geqslant 0$, т.ч. $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$

$$\boxed{P(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}}$$

(полиномиальная формула).

Предельные теоремы

Теорема Пуассона

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, n велико и при этом $\lambda = np < 10$, то

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}.}$$

Предельные теоремы

Теорема Пуассона

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, n велико и при этом $\lambda = np < 10$, то

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой Бернулли.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

Доказательство

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)\lambda^m}{m!n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

Доказательство

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)\lambda^m}{m!n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Доказательство

Переходим к пределу при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

(отсюда следует требуемое равенство).

Теорема доказана.

Предельные теоремы

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, n велико и при этом $np > 10$, то

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_0),}$$

где $q = 1 - p$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x_0 = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Свойства $\varphi(x)$.

- $\varphi(x)$ четная ($\varphi(-x) = \varphi(x)$);
- $\varphi(x) \downarrow$ для $x > 0$;
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$;
- $\varphi(x) \approx 0$ для $x > 5$
- значения функции $\varphi(x)$ приводятся в математико-статистических таблицах.

Предельные теоремы

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, n велико, то

$$\boxed{P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

Свойства $\Phi(x)$.

- $\Phi(x)$ нечетная ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$);
- $\Phi(0) = 0$;
- $\Phi(x) \uparrow$ для $x \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0,5$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = -0,5$;
- $\Phi(x) \approx 0,5$ для $x > 5$;
- значения функции $\Phi(x)$ приводятся в математико-статистических таблицах.

Предельные теоремы

Следствие (ЗБЧ в схеме Бернулли)

Формула отклонения частоты от вероятности

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Доказательство

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon+p<\frac{m}{n}<\varepsilon+p \Rightarrow -\varepsilon n+np<m<\varepsilon n+np.$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx \Phi\left(\frac{\varepsilon n+pn-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon n+pn-np}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right)+\Phi\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=2\Phi\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right).$$

Предельные теоремы

Замечание

$$P\left(|m - np| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

МК-2. Номер варианта=остаток от деления числа букв в фамилии на 4.

Задача. Указать полную группу гипотез в заданном эксперименте (Э). Доказать полноту группы.

Вариант 0. Э: Из урны, содержащей 5 белых и 4 черных шара, одновременно извлекают два шара.

Вариант 1. Э: Три стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности попаданий при одном выстреле для этих стрелков равны 0,7, 0,8 и 0,9 соответственно.

Вариант 2. Э: Из урны, содержащей 5 белых и 4 черных шара, по одному выкладывают на стол три шара.

Вариант 3. Э: В неисправный автомат бросают жетоны до тех пор, пока автомат не сработает или пока не закончатся жетоны. В наличии имеется четыре жетона. Вероятность срабатывания автомата при внесении жетона равна 0,6.