17.10.

Случайные величины. (СВ)

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вер. ое Пр-во.

σалгебра

вероятностная мера

* Случайная величина — действительная ф-ия от элементарного события $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$

* Для дискретных ВП СВ — это любая ф-ия ξ

* Для произвольных ВП СВ — это действительная ф-ия $\xi(\omega)$, т.ч. $\forall x \in \mathbb{R}$ событие $\{\xi < x\} \in \mathcal{A}$

подробнее: событие $\{\xi < x\} = \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$

* Т.к операции над событиями из $\mathcal{A}$ (Замкнутость относительно $\mathcal{A}$), то определены следующие события.

① $\{\xi \geq x\} = \overline{\{\xi < x\}} \in \mathcal{A}$

② $\{x_1 \leq \xi < x_2\} = \{\xi < x_2\} \setminus \{\xi < x_1\} \in \mathcal{A}$

③ $\{\xi = x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (x \leq \xi < x + \frac{1}{n}) \in \mathcal{A}$ ← счётное пересечение

* Для вычисления вероятностей таких событий достаточно $\forall x \in \mathbb{R}: F_\xi(x) \overset{\Delta}{=} P(\xi < x)$ ← равно по опр.

* $F_\xi(x) = F(x) = P(\xi < x)$ - действительная ф-ия действительной переменной - ф-ия распределения СВ ξ

②

Так $\{\xi < x_2\} = \{x_1 \leq \xi < x_2\} + \{\xi < x_1\}$, то см. опр. по аксиоме имеем

$P(\{\xi < x_2\}) = P(\{x_1 \leq \xi < x_2\}) + P(\{\xi < x_1\})$

откуда $F_\xi(x_2) = P(\{x_1 \leq \xi < x_2\}) + F(x_1)$

* $P(\{x_1 \leq \xi < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$

* $P(\xi \geq x) = 1 - P(\xi < x) = 1 - F(x)$

* $P(\xi = x) = \lim\limits_{n \to \infty} (F(x + \frac{1}{n}) - F(x)) = F(x+0) - F(x)$

Теорема (св-ва ф-ии распределения)

Пусть $F(x) = P(\xi < x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ — ф-ия распределения СВ ξ.

Тогда справедливы св-ва:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$ (по опр)

2) $F(x)$ — не убывает на $\mathbb{R}$

если $x_2 > x_1$: $F(x_2) \geq F(x_1)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4) $P(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = F(\beta + 0) - F(\alpha)$

$P(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta + 0) - F(\alpha + 0)$

$F(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha + 0)$

5) $F(x)$ - непрерывна слева, т.е

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

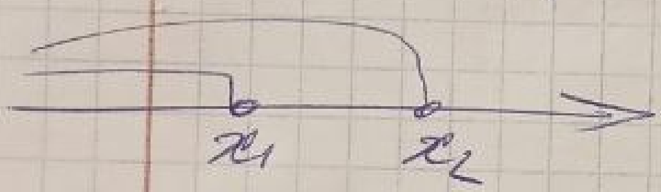
Д-во

1) Следует из огр ф-ии $F(x)$ и св-в вероятности

2)

Пусть $A = \{\xi < x_1\}$; $B = \{\xi < x_2\}$

Если $x_1 < x_2$, то $A \subseteq B$ (A влёчёт B)



По св-ву, $P(A) \le P(B)$, т.е. $P(\xi < x_1) \le P(\xi < x_2)$ или $F(x_1) \le F(x_2)$

3) $\{\xi < -\infty\} = \varnothing \Rightarrow P(\varnothing) = 0$ или $F(-\infty) = 0$

Аналогично ~~P(~~

$\{\xi < +\infty\} = \Omega \Rightarrow P(\Omega) = 1$ или $F(+\infty) = 1$

4) Упр сделай дома через мн-ва

5) пусть $\{x_n\} \searrow x$ так (см фото 16:45)

Классификация СВ

Дискретные СВ (ДСВ)

мн-во значений конечно или счётно

Абсолютно Непрерывные СВ (НСВ)

мн-во значений луч, отрезок, $\mathbb{R}$

Сингулярные СВ

Канторовское совершенное мн-во — несчётное мн-во значений с мерой Лебега 0

Смешанные СВ

ДСВ + НСВ + Синг. СВ

Основные Определения

Опр 1

СВ ξ имеет дискретное распределение, если существует конечный или счётный набор чисел (значений СВ) $\{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$ т.ч.

$$\sum_i P(\xi = x_i) = 1$$

* ξ - принимает не более чем счётное число значений.

* Если ξ имеет дискретное распределение

то $\forall B \in \mathbb{R}: P(\xi \in B) = \sum_{x_i \in B} P(\xi = x_i)$

B - мн-во

__Опр 2__

СВ ξ имеет абсолютно-непрерывное рас-пределение, если $\exists$ неотриц-ая ф-ия $f_\xi(x)$, т.ч $\forall$ B - борелевского мн-ва: верно

$$P(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)dx = \int_B f(x)dx \quad (*)$$

* Ф-ию $f_\xi(x)$ - (можно обозначить $f(x)$) - ~~это~~ плотность вероятностей СВ ξ.

* Интеграл в формуле (*) это интеграл Лебега

__Опр 3__

СВ ξ имеет сингулярное распределение, если $\exists$ B - борелевское мн-во с мерой Лебега $\lambda(B) = 0$ т.ч.

$P(\xi \in B) = 1$

но при этом

$P(\xi = x) = 0 \ \forall x \in B$

Т.о любое сингулярное распределение сосредоточено на несчётном мн-ве с мерой Лебега 0.

Опр 4

СВ ξ имеет смешанное распределение если найдутся такие СВ

ξ_1 - дискрет СВ

ξ_2 - непрерыв-ая СВ

ξ_3 - сингулярная

и числа $p_1, p_2, p_3 \in [0,1)$, $p_1+p_2+p_3=1$, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеет место р-во

$$P(\xi \in B) = p_1 \cdot P(\xi_1 \in B) + p_2 \cdot P(\xi_2 \in B) + p_3 P(\xi_3 \in B)$$

При этом:

$$F_\xi(x) = p_1 \cdot F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$$

где $F_i(x) = F_{\xi_i}(x) = P(\xi_i < x)$ $i \in \overline{1,3}$

* Других видов распределения ∄ (Лебег доказал).

Дискретные СВ

(мн-во значений можно пронумеровать)

Формы закона распределения СВ

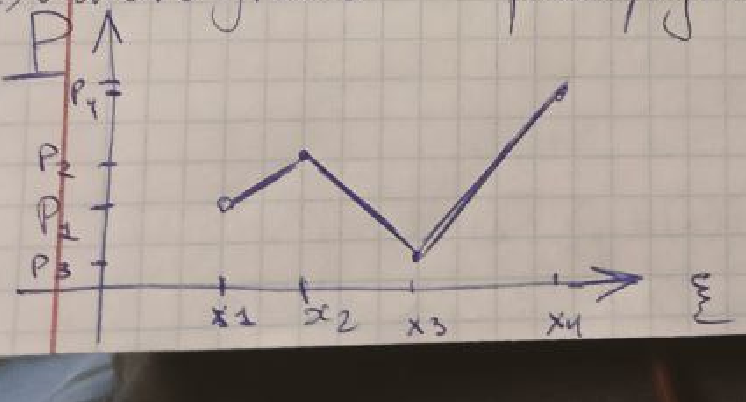
* Закон распределения СВ – ∀ правило, указывающее вероятности значений СВ или мн-в этих значений.

1) Ряд распределения (только для ДСВ)

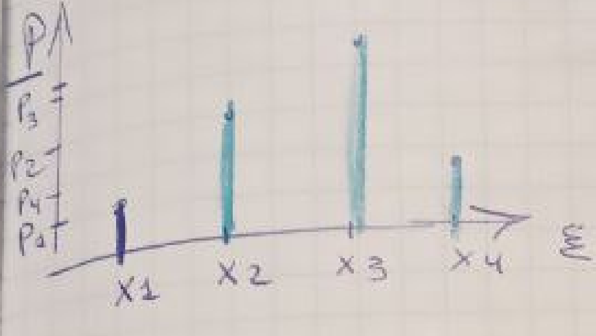
ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2		p_n	...

p_i – вероятность $P(\xi = x_1)$; $\sum_i p_i = 1$ (условие нормированности)

2) многоугольник распределения



3) Столбиковая диаграмма



4) Ф-ия распределения: $F(x) = P(\xi < x)$

Для ДСВ

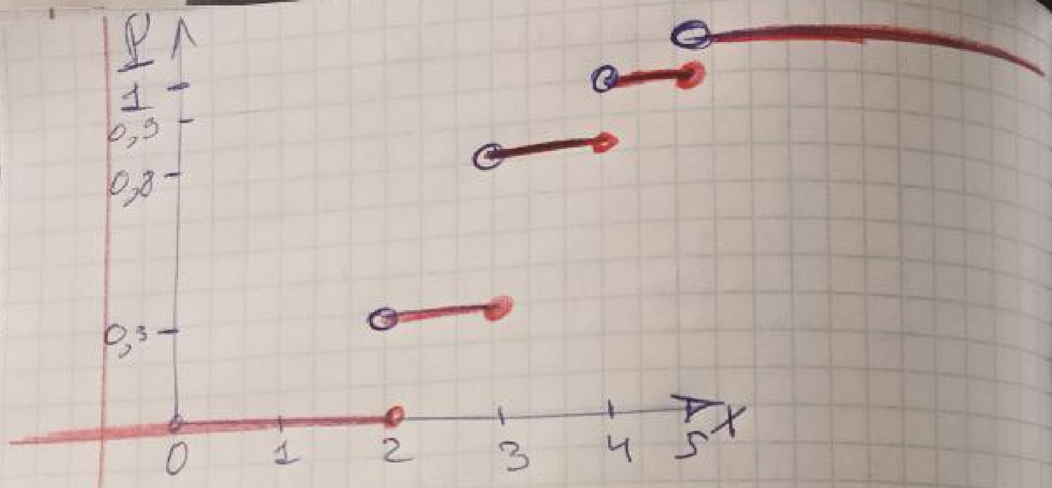
ф-ия разрыва на в x_i, величина разрыва

p_i

Пример

ξ	2	3	4	5
p	0,3	0,5	0,1	0,1

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0,3 & 2 < x \le 3 \\ 0,8 & 3 < x \le 4 \\ 0,9 & 4 < x < 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$



P
1
0,9
0,8
0,3
0
1
2
3
4
5
x