Индикатор события (бернуллиева СВ)

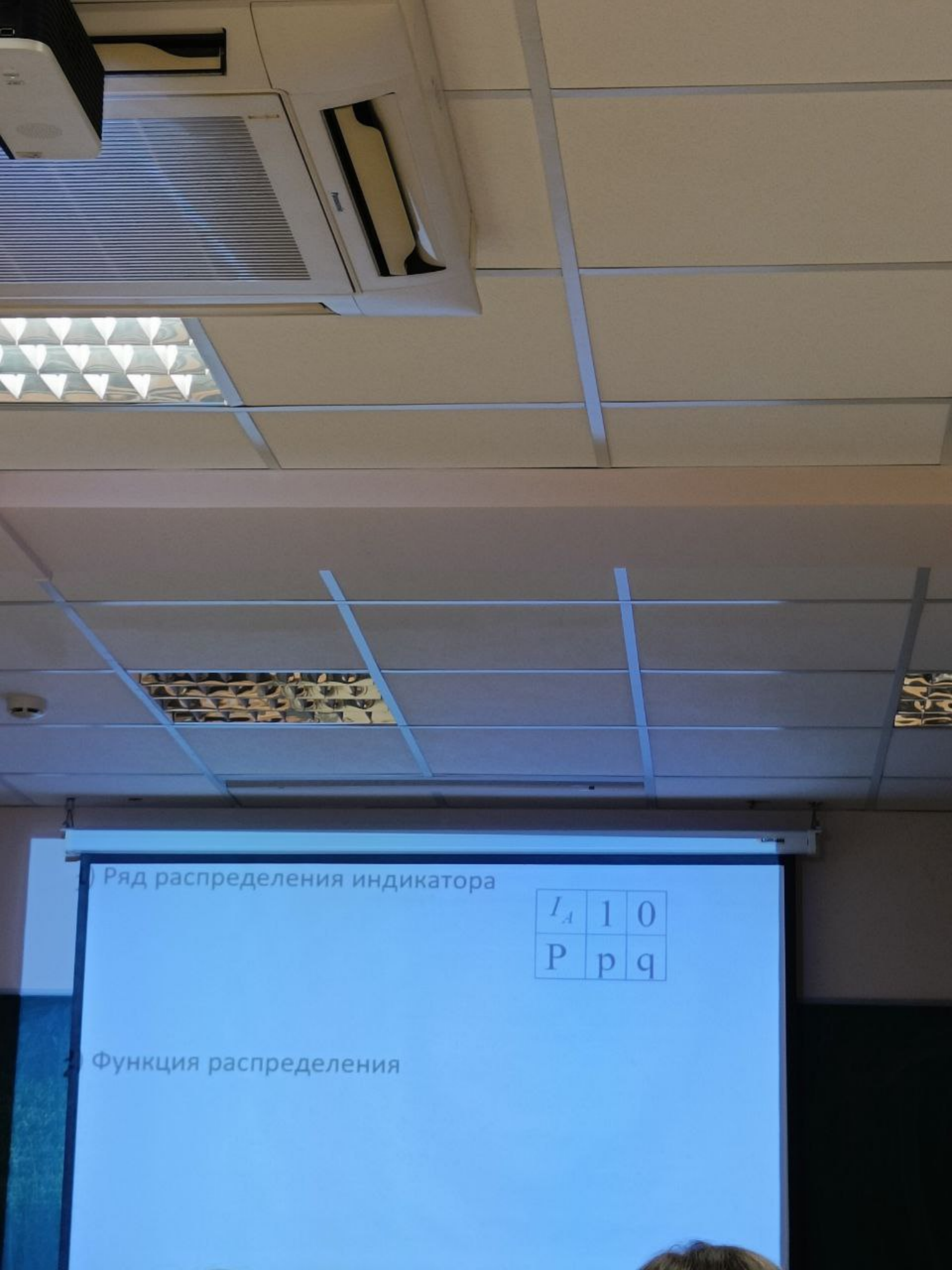
Индикатор события (бернуллиева СВ)

Индикатором события А называется СВ I_A равная 1, если в результате опыта событие А произошло,

и равная 0, если А не произошло.

) Ряд распределения индикатора

I_A	1	0
P	p	q


Ряд распределения индикатора
I_A 1 0
P p q
Функция распределения

1) Ряд распределения индикатора

I_A	1	0
P	p	q

2) Функция распределения

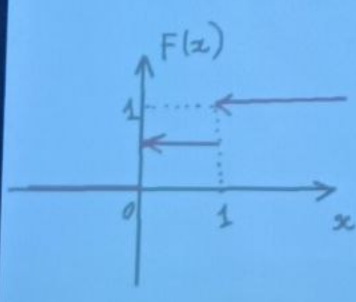
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ q, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

1) Ряд распределения индикатора

I_A	1	0
P	p	q

2) Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ q, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$



Операции над ДСВ

- Сумма (разность, произведение)

X принимает значения $x_i, i \in \overline{1,n}$

с вероятностями $p_i = P(X = x_i)$.

Y принимает значения $y_j, j \in \overline{1,m}$ с вероятностями $q_j = P(Y = y_j)$.

$X+Y$ $(X-Y,\ XY)$ принимает значения x_i+y_j $(x_i-y_j,\ x_iy_j)$, $i\in\overline{1,n}$, $j\in\overline{1,m}$ с вероятностями p_{ij}.

$X+Y \quad (X-Y,\, XY)$ принимает значения $x_i+y_j \quad (x_i-y_j,\, x_iy_j)$, $i\in\overline{1,n}$, $j\in\overline{1,m}$ с вероятностями p_{ij}.

$$p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$$

В случае повторяющихся значений соответствующие вероятности складываются.

Таблица распределения

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\cdots$	p_{2m}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\cdots$	p_{3m}
x_4	p_{41}	p_{42}	p_{43}	$\cdots$	p_{4m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	$\cdots$	p_{nm}

Таблица распределения

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\cdots$	p_{2m}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\cdots$	p_{3m}
x_4	p_{41}	p_{42}	p_{43}	$\cdots$	p_{4m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	$\cdots$	p_{nm}

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\boxed{\sum_i \sum_j p_{ij} = 1}$$

(Случайные величины X, Y — **независимы**) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (независимы события $X < x, Y < y \; \forall x, y \in R$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j)$

(Случайные величины X, Y — **независимы**) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (независимы события $X < x, Y < y \ \forall x, y \in R$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j)$

- Произведение СВ X на число С.

Применение: на вход технического устройства поступает случайное воздействие X; устройство подвергает X некоторому преобразованию φ и на выходе появляется СВ Y:

$$\text{СВ } X \longrightarrow \boxed{\quad \varphi \quad} \longrightarrow Y = \varphi(X) - \text{СВ}$$

- Функция от ДСВ X.

Пусть X – ДСВ, $y = \varphi(x)$ – числовая функция, определенная на множестве значений X.

ДСВ $Y = \varphi(X)$ принимает значения $y_i = \varphi(x_i)$ с вероятностями $p_i = P(X = x_i)$.

Пример

- Даны законы распределения дискретных случайных величин X и Y

X	-1	0	2
P	0,2	0,5	0,3

Y	1	3	4
P	0,1	0,4	0,5

Составить законы распределения СВ

$$X^2+5, \quad X+Y, \quad X\cdot Y$$

Решение.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
P	0,2	0,5	0,3

Y	1	3	4
P	0,1	0,4	0,5

а)

X^2+5	5	6	9
P	0,2	0,5	0,3

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
P	0,2	0,5	0,3

Y	1	3	4
P	0,1	0,4	0,5

Решение.

а)

X^2+5	5	6	9
P	0,2	0,5	0,3

б) Значения $X+Y$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

в) Значения $X \cdot Y$: $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Значения $X+Y$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Значения $X \cdot Y$: $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Вспомогательная таблица:

X/Y	1	3	4
-1	0,02	0,08	0,1
0	0,05	0,2	0,25
2	0,03	0,12	0,15

Ряд распределения суммы

$X+Y$	0	1	2	3	4	5	6
P	0,02	0,05	0,08	0,33	0,25	0,12	0,15

Значения $X+Y$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Значения $X \cdot Y$: $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Вспомогательная таблица:

X/Y	1	3	4
-1	0,02	0,08	0,1
0	0,05	0,2	0,25
2	0,03	0,12	0,15

Ряд распределения суммы

$X+Y$	0	1	2	3	4	5	6
P	0,02	0,05	0,08	0,33	0,25	0,12	0,15

Ряд распределения произведения

XY	- 4	- 3	- 1	0	2	6	8
P	0,1	0,08	0,02	0,5	0,03	0,12	0,15

Непрерывные СВ

Рассмотрим СВ ξ, имеющую функцию распределения $F(x)$.

$F(x)$ – непрерывна и дифференцируема всюду, кроме, м.б. отдельных точек.

Опр. Плотностью вероятности СВ ξ называется производная ее функции распределения $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Средняя плотность вероятности (приходящаяся на единицу длины участка $[x, x+\Delta x)$***)***

$$P(x \le \xi < x + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$

$$P(x \le \xi < x + dx) \approx f(x) \cdot dx$$

элемент вероятности

Плотность вероятности $f(x)$ аналогична таким понятиям, как плотность распределения масс на оси абсцисс или плотности тока в теории электричества.

Теорема (свойства плотности в-ти)

1) $f(x) \geq 0,$

2)

$$P(\alpha \leq \xi < \beta) = P(\alpha \leq \xi \leq \beta) =$$

$$= P(\alpha < \xi < \beta) = P(\alpha < \xi \leq \beta) =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx.$$

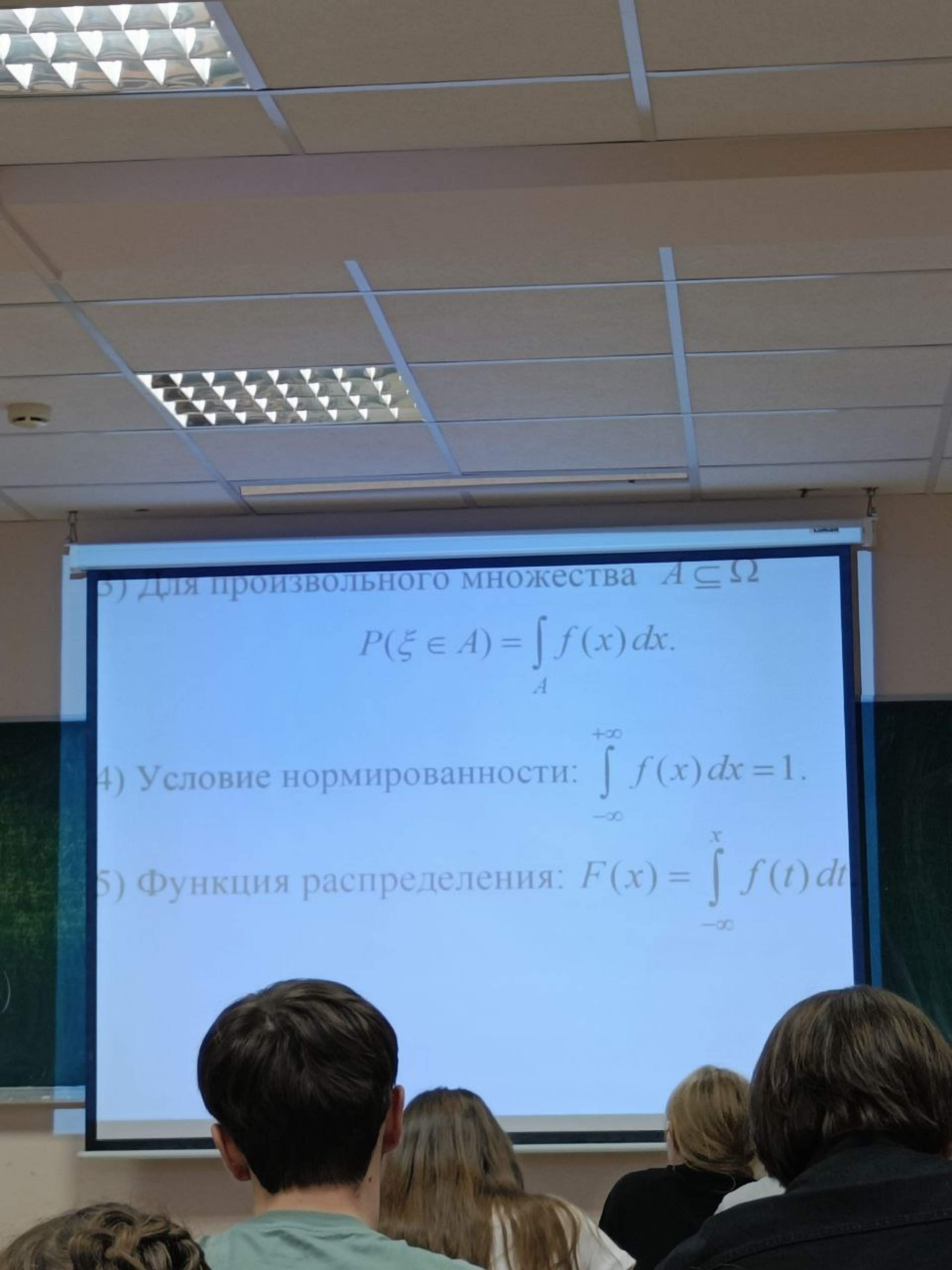
3) Для произвольного множества $A \subseteq \Omega$

$$P(\xi \in A) = \int_A f(x)\,dx.$$

3) Для произвольного множества $A \subseteq \Omega$

$$P(\xi \in A) = \int_A f(x)\,dx.$$

4) Условие нормированности: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$


3) Для произвольного множества $A \subseteq \Omega$
$P(\xi \in A) = \int_A f(x)\,dx.$
4) Условие нормированности: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$
5) Функция распределения: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

3) Для произвольного множества $A \subseteq \Omega$

$$P(\xi \in A) = \int_A f(x)\,dx.$$

4) Условие нормированности: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

5) Функция распределения: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Замечание. Функции распределения $f(x)$, $F(x)$ являются эквивалентными обобщающими характеристиками НСВ.

Доказательство.

1) $F(x)$ — неубывающая $\Rightarrow f(x) = F'(x) \geq 0.$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx =$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to-\infty}} (F(b) - F(a)) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^x f(t)dt =$

Доказательство.

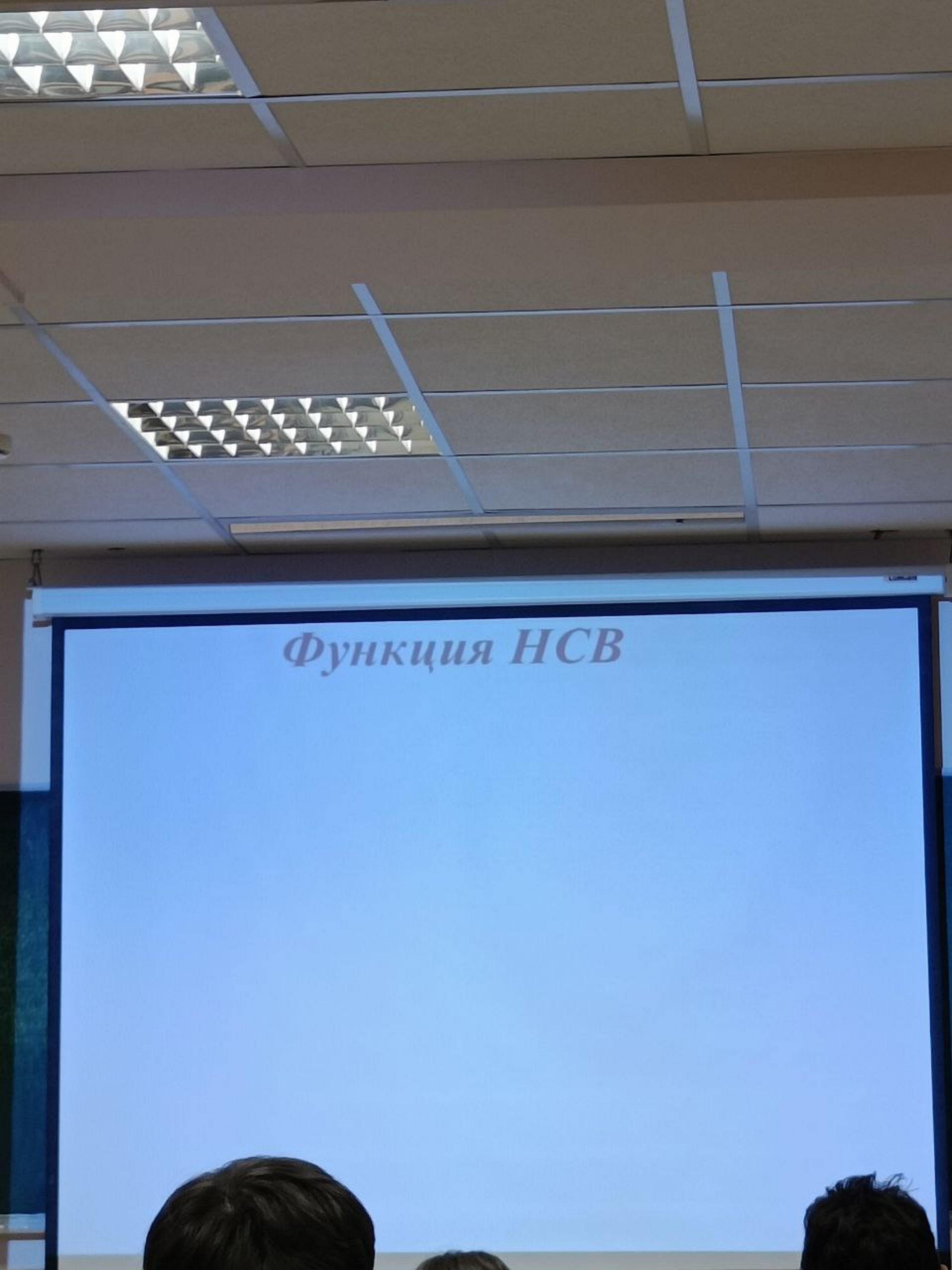
1) $F(x)-$ неубывающая $\Rightarrow f(x)=F'(x)\geq 0.$

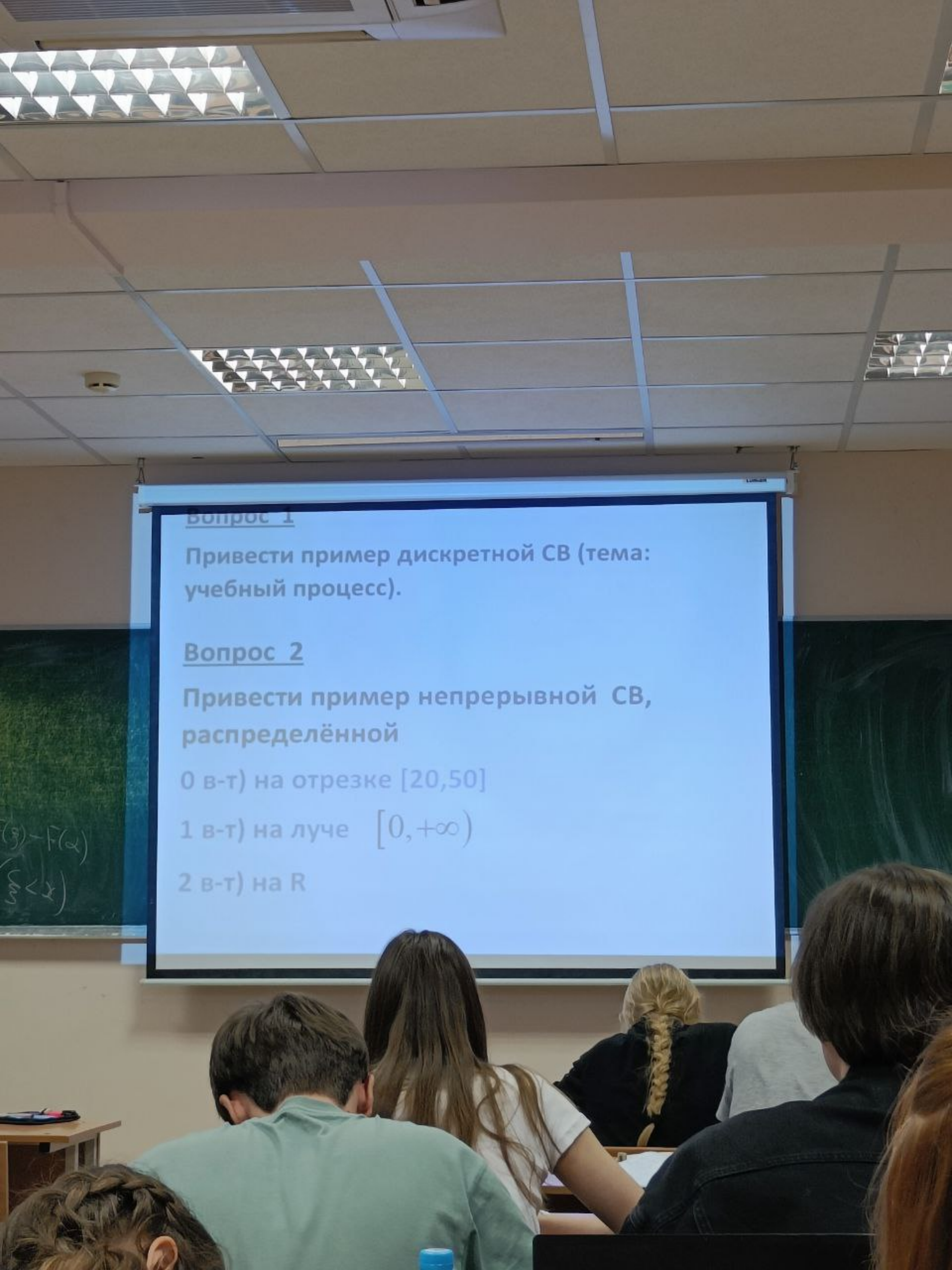
3) $$\int\limits_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to-\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to-\infty}} (F(b)-F(a)) = F(+\infty)-F(-\infty) = 1-0 = 1$$

4) $$\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{x} f(t)dt =$$

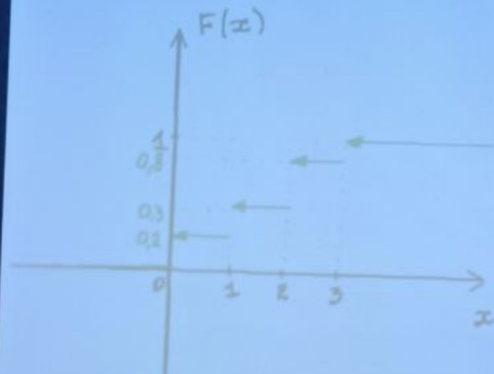
$$= \lim_{a\to-\infty} (F(x)-F(a)) = F(x)-F(-\infty) = F(x).$$


Функция НСВ


Вопрос 1
Привести пример дискретной СВ (тема: учебный процесс).
Вопрос 2
Привести пример непрерывной СВ, распределённой
0 в-т) на отрезке [20,50]
1 в-т) на луче $[0,+\infty)$
2 в-т) на R

Вопрос 3

По графику функции распределения СВ ξ определить



0 в-т) $P(\xi = 1)$

1 в-т) $P(\xi > 1)$

2 в-т) $P(1 \leq \xi < 3)$

Вопрос 4

Функция распределения непрерывной СВ

$F(x) = \sin x, \quad 0 < x \le 1.$

Вычислить

0 в-т) $P(0 \le \xi < 0,5)$

1 в-т) $P(\xi = 0,5)$

2 в-т) $P(0 < \xi < 0,5)$