# Функция НСВ

Пусть $\xi$ – НСВ с плотностью вероятности $f(x)$, определенная на $(a,b)$.

Функция распределения $\xi$: $F(x) = P(\xi < x)$.

$x = \psi(y)$ – обратная функция.

? $F(x)$ $f(x)$

пл. в-ти $\eta$

$$\eta = \varphi(\xi) \text{ — НСВ}$$

$$g(y) = G'(y)$$

$$G(y) = P(\eta < y) \quad \forall y \in R$$

$x = \psi(y) -$ обратная функция.

$\eta = \varphi(\xi) -$ функция СВ $\xi$.

*Найдем распределение* $\eta$.

Пусть $G(y) -$ функция распределения НСВ $\eta$,

$g(y) = G'(y) -$ ее плотность вероятности.

$$G(y) = P(\eta < y) = P(\varphi(\xi) < y) =$$

$F(x) = P(\xi < x)$

$?$ $\qquad$ $f(x) = F'(x)$

пл.вер $\eta$

$$g(y) \leftarrow \eta = \varphi(\xi) - \text{НСВ}$$

$$g(y) = G'(y)$$

$$G(y) = P(\eta < y) \quad \forall y \in R$$

$$G(y) = P(\eta < y) = P(\varphi(\xi) < y) =$$

$$= \begin{cases} P(\xi < \psi(y)) = F(\psi(y)), \quad \text{если} \quad \varphi(x) \square \\ P(\xi > \psi(y)) = 1 - F(\psi(y)), \quad \text{если} \quad \varphi(x) \square \end{cases}$$

Плотность вероятности СВ $\eta$:

$$g_\eta(y) = G'(y) = \begin{cases} F'(\psi(y))\psi'(y) = f(\psi(y))\psi'(y), \text{если } \varphi(x) \square \\ \\ -F'(\psi(y))\psi'(y) = -f(\psi(y))\psi'(y), \text{если } \varphi(x) \square \end{cases}$$

$$\boxed{g_\eta(y) = f(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|}$$ (если $\varphi(x)$ монотонна)

Если $y = \varphi(x)$ на $(a,b)$ не монотонна, то следует разбить интервал $(a,b)$ на интервалы монотонности, найти $g_\eta(y)$ на каждом из них. При этом

$$\boxed{g_\eta(y) = \sum_i f(\psi_i(y))\left|\psi_i'(y)\right|}$$

искомая плотность вероятности СВ $\eta$.

## Пример

СВ $\xi$ равномерно распределена на отрезке [2,4], т.е. ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, x\in[2,4]\\ 0, x\notin[2,4]\end{cases}$$

Найти плотность распределения площади правильного треугольника со стороной $\xi$.

## Решение

$$\eta = S(\xi) = \frac{\sqrt{3}}{4}\xi^2 - НСВ$$

$$y = \varphi(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow$$

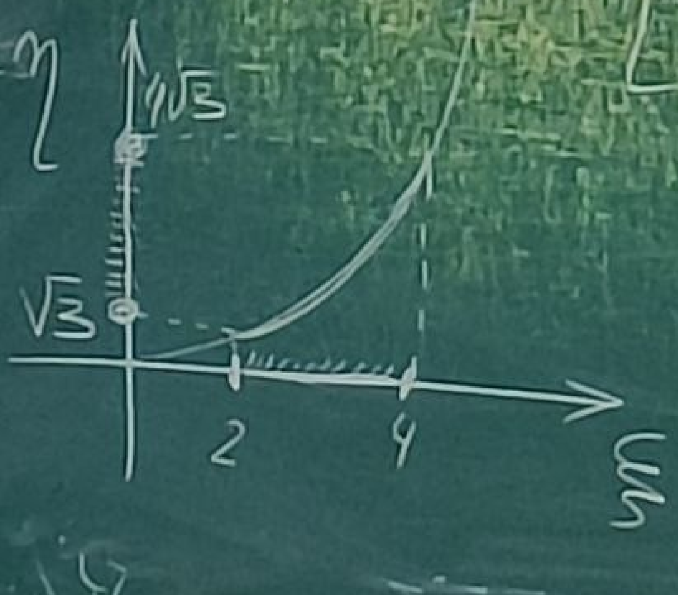
$$x^2 = \frac{4y}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}} = \psi(y) -$$

$-$обратная функция

$$\xi \in [2;4] \Rightarrow \eta \in \left[\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\right]$$

$$\eta = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\xi^2$$

$$\eta = \varphi(\xi)\ \uparrow$$

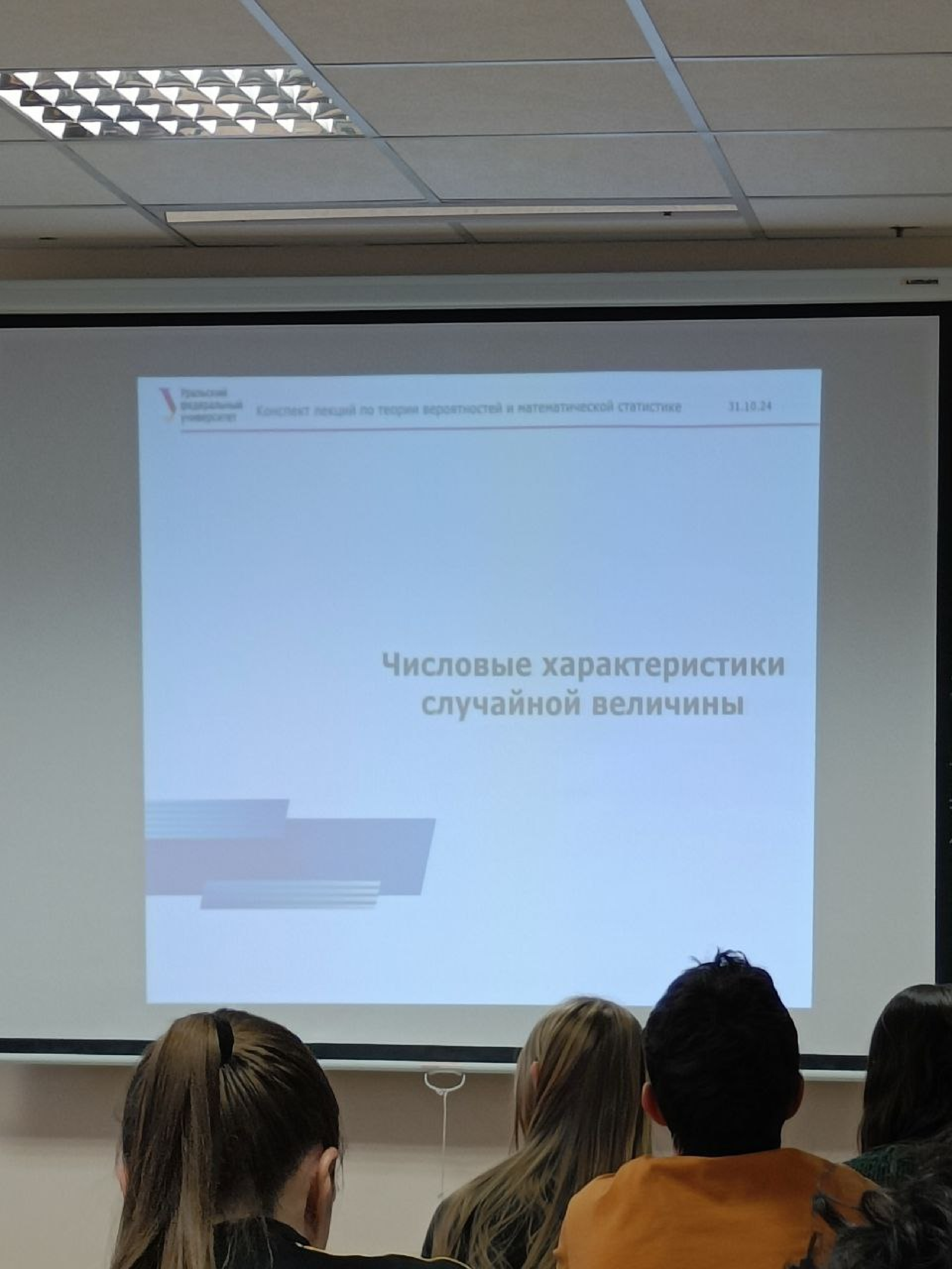


По формуле $\boxed{g_\eta(y) = f(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|}$

получаем

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\right)'\right| = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{3}\sqrt{y}},\ y \in \left[\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\right] \\ 0,\ y \notin \left[\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\right] \end{cases}$$

– искомая плотность вероятности


Уральский федеральный университет
Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике
31.10.24
Числовые характеристики случайной величины

## Математическое ожидание

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и СВ $\xi(\omega)$.

Математическим ожиданием СВ $\xi(\omega)$ называется число $M[\xi] = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\, dP(\omega)$, где интеграл понимается в смысле Лебега.

Математическим ожиданием функции $\varphi(\xi)$ от СВ $\xi(\omega)$ называется число

$$M[\varphi(\xi)] = \int\limits_{\Omega} \varphi(\xi(\omega))\, dP(\omega).$$

Если $\eta = \varphi(\xi)$ для некоторой действительной функции $y = \varphi(x)$, то

$$M[\varphi(\xi)] = \begin{cases} \sum_i \varphi(x_i) p_i, & \xi - ДСВ \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx, & \xi - НСВ \end{cases}$$

## Теорема о свойствах МО

$1^0$ Математическое ожидание СВ, принимающей неотрицательные значения, неотрицательно.

$2^0$ Математическое ожидание константы равно константе.

$3^0$ Константу (как множитель) можно выносить за знак математического ожидания.

$4^0$ Математическое ожидание суммы любых СВ равно сумме математических ожиданий СВ.

$5^0$ Математическое ожидание произведения независимых СВ равно произведению их математических ожиданий.

## Доказательство

Пусть $\xi$ принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$,

$\eta$ принимает значения $y_1, y_2, ..., y_m$.

Тогда $\xi + \eta$ принимает значения $x_i + y_j$ с вероятностями $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

$$M[\xi+\eta]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\underbrace{\sum_{j=1}^{m}p_{ij}}_{p_i}+\sum_{j=1}^{m}y_j\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_{ij}}_{p_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+\sum_{j=1}^{m}y_j p_j=M[\xi]+M[\eta]$$

## Следствия

$$M[\xi + C] = M[\xi] + C$$

$$M[\xi - M[\xi]] = 0$$

Центрированная СВ,

соответствующая $\xi$.

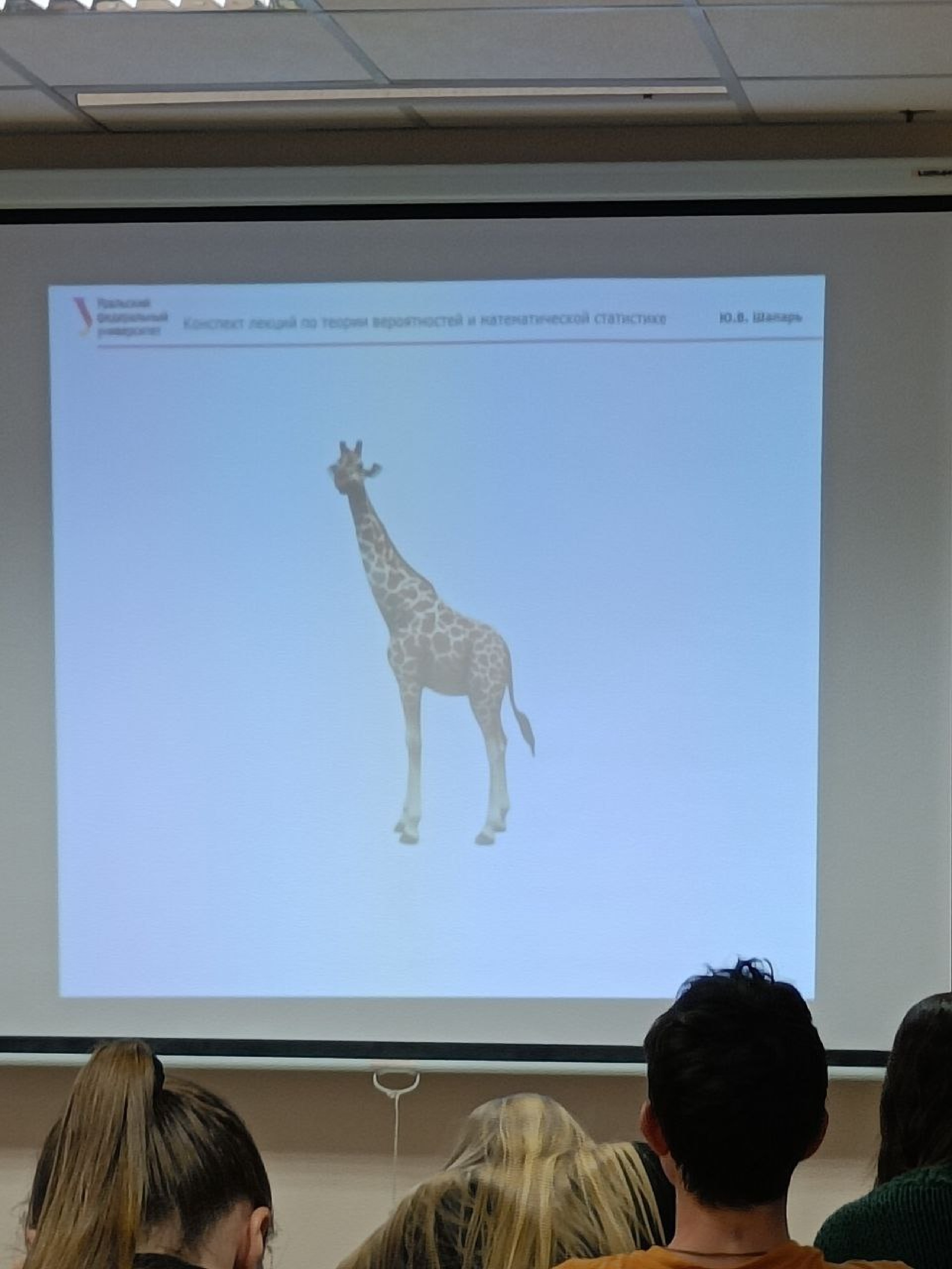
*Доказательство* п.5)

$\xi, \eta$– независимые $\Rightarrow p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j) =$

$= P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) = p_i p_j$

$$M[\xi\eta] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i p_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \sum_{j=1}^{m} y_j p_j = M[\xi]M[\eta]$$


Уральский федеральный университет
Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике
Ю.В. Шапарь

# Дисперсия и моменты старших порядков

## Дисперсия СВ

***Опр.*** Дисперсией СВ $\xi$ называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ $\xi$ от своего среднего значения

$$D[\xi] = M\left[\left(\xi - M[\xi]\right)^2\right].$$

$$D[\xi] = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - M[\xi])^2 p_i, & \xi - ДСВ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi])^2 \cdot f_\xi(x)dx, & \xi - НСВ \end{cases}$$

## Среднее квадратическое отклонение (СКО)

$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]}$ – среднее квадратическое отклонение СВ $\xi$.

**Начальный момент порядка k**

(k=0, 1, 2, ...) СВ $\xi$ (если он существует) есть число

$$\alpha_k = M[\xi^k] = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k \cdot p_i, \text{ если } \xi - ДСВ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_\xi(x)dx, \text{ если } \xi - НСВ \end{cases}$$

**Центральный момент порядка k**

(k=0, 1, 2, ...) СВ $\xi$ (если он существует) есть число

$$\mu_k = M[(\xi - M[\xi])^k] =$$

$$= \begin{cases} \sum_i (x_i - M[\xi])^k \cdot p_i, \text{ если } \xi - \text{ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi])^k \cdot f_\xi(x)dx, \text{ если } \xi - \text{НСВ} \end{cases}$$

В частности, из определений следует, что

$$\alpha_0 = \mu_0 = 1$$

$$M[\xi] = \alpha_1$$

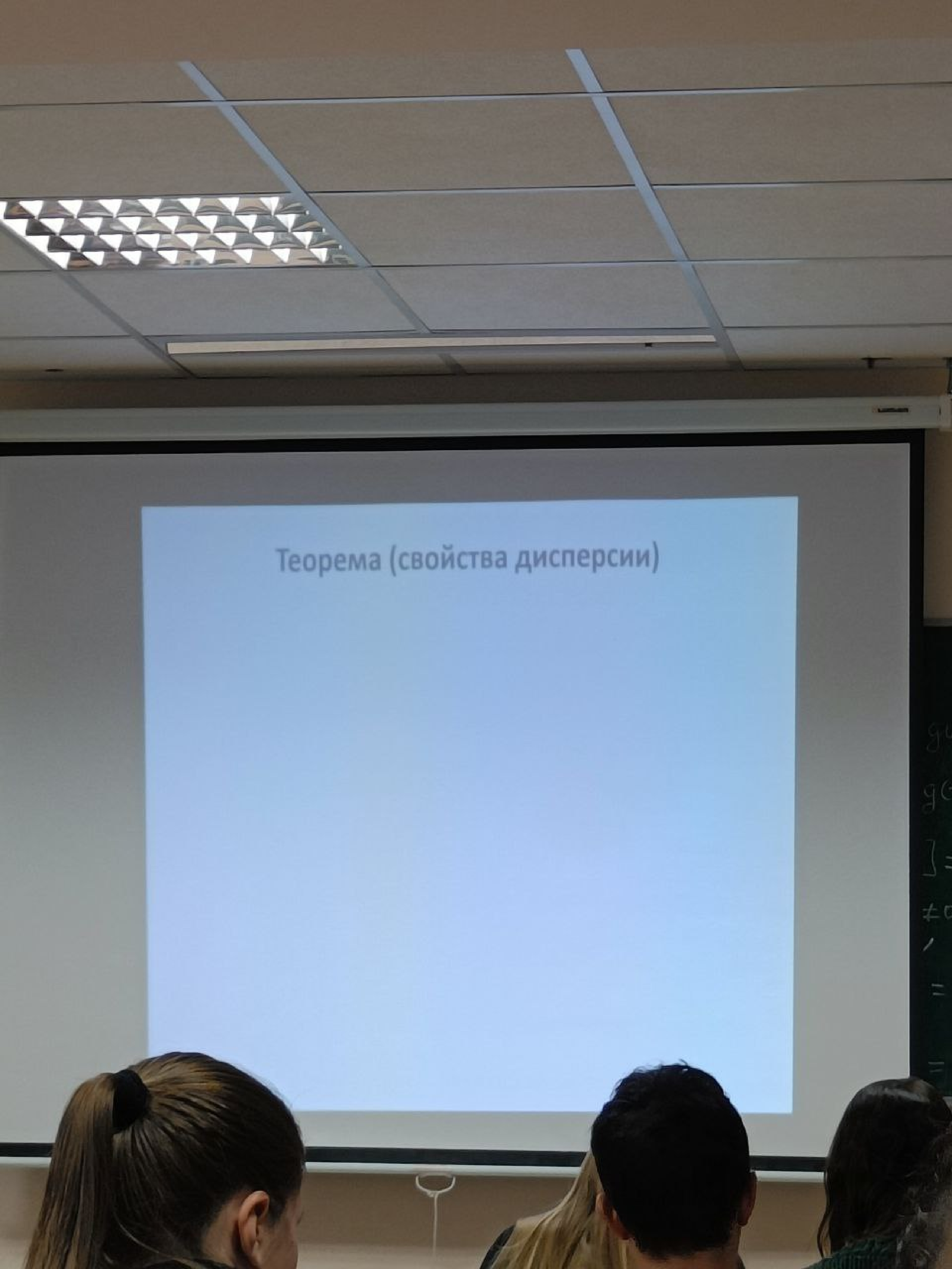
$$D[\xi] = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

Коэффициент асимметрии или «скошенности» НСВ

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Коэффициент эксцесса или «островершинности» НСВ

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$


Теорема (свойства дисперсии)