Теорема (свойства дисперсии)

1) $D[C]=0, \quad \sigma[C]=0, C-const$

2) $D[\xi]=M\left[\xi^2\right]-M^2[\xi]$

<u>Следствие</u>

$$D[\xi]=\begin{cases} \sum\limits_i x_i^2 p_i - M^2[\xi], & \xi - ДСВ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_\xi(x)dx - M^2[\xi], & \xi - НСВ \end{cases}$$

3) $D[C\xi] = C^2 D[\xi]$

4) $D[C+\xi] = D[\xi]$

5) $D[\xi+\eta] = D[\xi] + D[\eta]$,

если ξ, η – независимы

6)

$D[\xi \cdot \eta] = M[\xi^2]M[\eta^2] - M^2[\xi]M^2[\eta]$,

если ξ, η – независимы

Доказательство.

$$2)\ D[\xi] = M\left[\left(\xi - M[\xi]\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\xi^2 - 2\xi \cdot M[\xi] + M^2[\xi]\right] =$$

$$= M\left[\xi^2\right] - 2M[\xi] \cdot M[\xi] + M^2[\xi] =$$

$$= M\left[\xi^2\right] - M^2[\xi]$$

$$3)\ D[C\xi]=M\left[\left(C\xi-M[C\xi]\right)^2\right]=$$

$$=M\left[C^2\left(\xi-M[\xi]\right)^2\right]=C^2D[\xi]$$

Замечание. $\sigma\left[C\xi\right]=\left|C\right|\cdot\sigma[\xi]$

$$4)\ D[C+\xi]=M\left[\left(C+\xi-M[C+\xi]\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(C+\xi-C-M[\xi]\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(\xi-M[\xi]\right)^2\right]=D[\xi]$$

$$5)\ D[\xi+\eta]=M\left[(\xi+\eta)^2\right]-M^2[\xi+\eta]=$$

$$=M\left[\xi^2\right]+2M[\xi\eta]+M\left[\eta^2\right]-$$

$$-M^2[\xi]-2M[\xi]M[\eta]-M^2[\eta]=$$

$$=M\left[\xi^2\right]-M^2[\xi]+M\left[\eta^2\right]-M^2[\eta]+$$

$$+2\left(M[\xi\eta]-M[\xi]M[\eta]\right)=$$

$$=D[\xi]+D[\eta]$$

Замечание

Наряду со СВ ξ рассматривают т.н. **нормированную** СВ

$$T = \frac{\xi - M[\xi]}{\sigma[\xi]}.$$

При этом

$$M[T] = 0, \quad D[T] = 1.$$

Дисперсия функции СВ

$$
\underbrace{D[\varphi(\xi)]}_{\eta} = \begin{cases} \sum\limits_i \left(\varphi(x_i) - M[\eta]\right)^2 p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi(x) - M[\eta]\right)^2 \cdot f_\xi(x)dx \end{cases} =
$$

$$
= \begin{cases} \sum\limits_i \varphi^2(x_i) p_i - M^2[\eta], & \xi - \text{ДСВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)^2 \cdot f_\xi(x)dx - M^2[\eta], & \xi - \text{НСВ} \end{cases}
$$

Мода и медиана

Опр. Модой ДСВ ξ называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью.

Для НСВ $M_o[\xi]$ – точка locmax плотности вероятности f(x).

Если $M_o[\xi]$ единственна, то распределение называется ***унимодальным***.

В противном случае – ***полимодальным***.

Опр. Медианой $M_e[\xi]=x_p$ НСВ ξ называется такое ее значение, что $P(\xi<x_p)=P(\xi>x_p)=\dfrac{1}{2}$, т.е. одинаково вероятно, окажется ξ больше x_p или меньше x_p.

С помощью функции распределения можно записать

$$F(x_p)=1-F(x_p)\Rightarrow F(x_p)=F(M_e)=0{,}5$$

Метод производящих функций вычисления ЧХ ДСВ

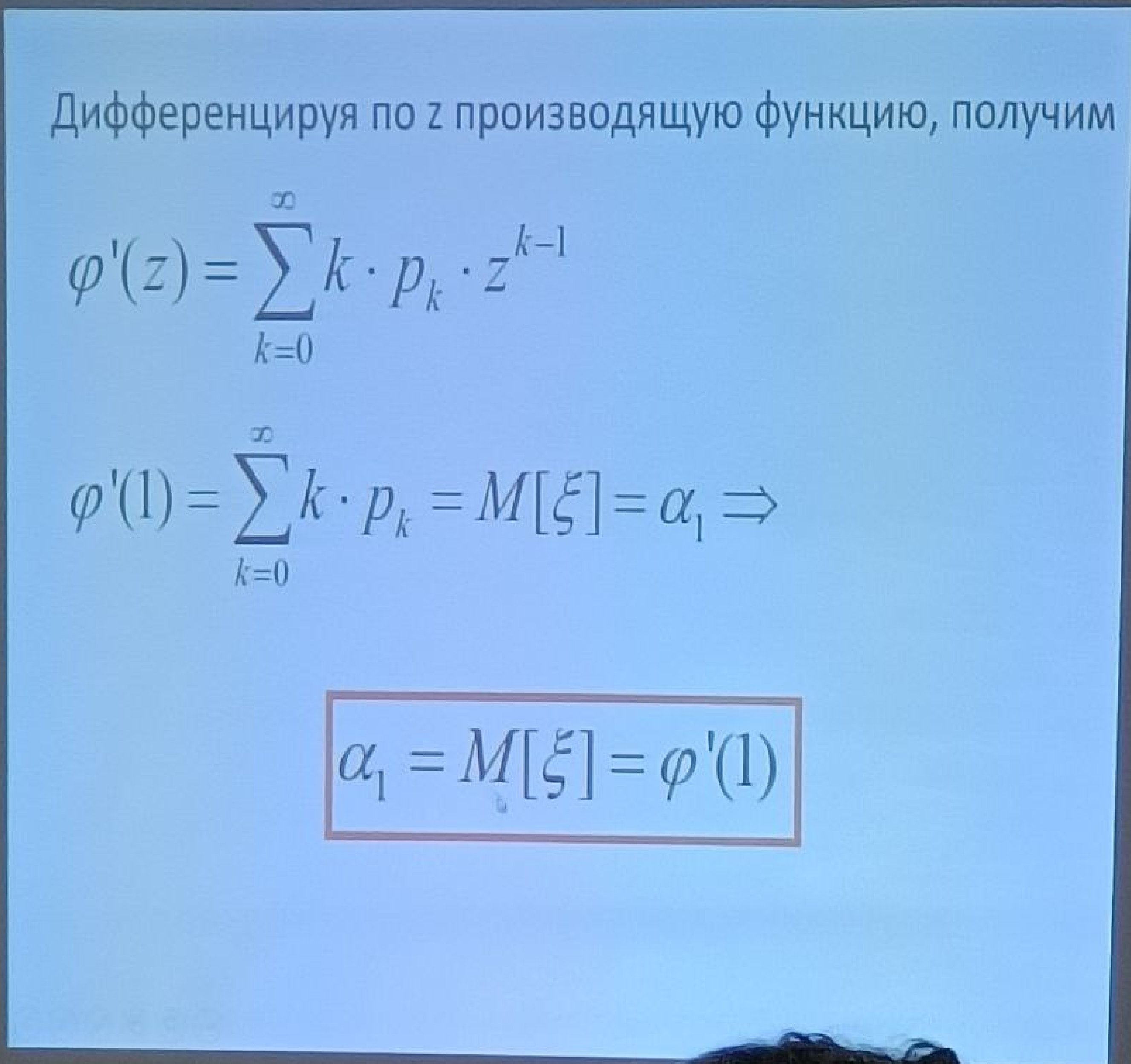
Рассмотрим ДСВ ξ, имеющую ряд распределения

ξ	0	1	2	...	k	...
P	p_0	p_1	p_2	...	p_k	...

Производящей функцией для ДСВ ξ называется

$$\boxed{\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_k z^k + \ldots}$$

z – произвольный параметр, $0 < z \le 1$.


Дифференцируя по z производящую функцию, получим
$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot z^{k-1}$$
$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = M[\xi] = \alpha_1 \Rightarrow$$
$$\boxed{\alpha_1 = M[\xi] = \varphi'(1)}$$

Берём вторую производную

$$\varphi''(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k \cdot z^{k-2}$$

$$\varphi''(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k =$$

$$= \alpha_2 - \alpha_1 = M\left[\xi^2\right] - M[\xi]$$

$$D[\xi]=M\left[\xi^2\right]-M^2[\xi]=\alpha_2-\alpha_1^2=$$

$$=\left(\alpha_2-\alpha_1\right)+\left(\alpha_1-\alpha_1^2\right)=$$

$$=\varphi''(1)+\varphi'(1)-\left(\varphi'(1)\right)^2$$

т.е. $\boxed{D[\xi]=\varphi''(1)+\varphi'(1)-\left(\varphi'(1)\right)^2}$

Примеры основных распределений и их ЧХ

1. Биномиальная СВ (обозначение $\xi \in Bi(n,p)$).

СВ ξ –число успехов в серии из n испытаний.

Значения ξ: 0, 1, 2, …, n

Вероятности значений: $p_m = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

(ф-ла Бернулли)

Условие нормированности:

Примеры основных распределений и их ЧХ

1. Биномиальная СВ (обозначение $\xi \in Bi(n,p)$).

СВ ξ –число успехов в серии из n испытаний.

Значения ξ: 0, 1, 2, ..., n

Вероятности значений: $p_m = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

(ф-ла Бернулли)

Условие нормированности:

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$$

Числовые характеристики

$$\varphi(z)=\sum_{m=0}^{n} p_m \cdot z^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m \underbrace{q^{n-m} z^m}_{(pz)^m} =$$

$$=(q+pz)^n$$ (бином Ньютона)

$$M[\xi]=\varphi'(1)=\left(\left(q+pz\right)^n\right)'\Big|_{z=1}=$$

$$=pn\left(q+pz\right)^{n-1}\Big|_{z=1}=$$

$$=np(\underbrace{q+p}_{1})^{n-1}=np=\alpha_1$$

Числовые характеристики

$$\boxed{\begin{aligned} M[\xi] &= np \\ D[\xi] &= npq \end{aligned}}$$

Таблица распределения вероятностей имеет вид

ξ	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Примеры биномиальных СВ

- число выпадений орла при n подбрасываниях монеты
- число вышедших из строя приборов среди n проверенных
- число попаданий в мишень при n выстрелах
- число мальчиков в семье, имеющей троих детей

2. Пуассоновская СВ (обозначение $\xi \in \Pi(\lambda)$).