Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Ю.В. Шапарь

Сборник задач для проведения практических занятий по теории вероятностей. Часть 1

Текстовый электронный образовательный ресурс

Сборник задач предназначен для проведения практических занятий по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». В нем представлены задачи различных уровней сложности, а также задания в форме тестов для более эффективного проведения практик в условиях уровневого обучения студентов ИРИТ-РТФ. В пособии содержатся краткие теоретические сведения, основные понятия теории вероятностей и математико-статистические таблицы. Пособие ориентировано на студентов ИРИТ-РТФ и ИЕНиМ.

Подготовлено Департаментом информационных технологий и автоматики

Екатеринбург
2022

Оглавление

Введение

Теория вероятностей, изучаемая студентами технических специальностей в рамках учебной дисциплины «Математика для профессиональной деятельности», традиционно вызывает трудности в освоении материала, поскольку требует знаний смежных дисциплин, таких, как логика, математический анализ, основы функционального анализа и др. Однако несмотря на высокую степень абстракции изучаемых понятий и «непохожесть» теории вероятностей на традиционные математические курсы (имеется ввиду методология и аналитический аппарат), данная дисциплина предоставляет мощные средства решения разнообразных прикладных задач и является фундаментом для многих прикладных наук, таких как математическая статистика, теория надежности, теория случайных процессов, стохастические методы оптимизации и пр.

Электронный текстовый ресурс представляет собой сборник задач (первую часть) для проведения практических занятий по теории вероятностей.

Сборник задач содержит достаточное количество примеров и упражнений различного уровня сложности для проведения практических занятий. Каждый раздел соответствует определенной теме практического занятия. Часть задач предлагается для решения на практическом занятии, а также есть примеры для текущих домашних заданий и самоподготовки. Задачи расположены по нарастанию сложности, что позволяет преподавателю обеспечить «загруженность» на занятии как сильных, так и отстающих студентов. В конце задачника предложены варианты контрольных работ и диагностических тестов.

Для удобства пользователя в конце задачника есть математико-статистические таблицы.

В тематическом плане ресурс охватывает большую часть разделов рабочей программы дисциплины: от введения в элементарную теорию вероятностей до функций одномерных случайных величин.

Благодарю научных редакторов В.Г. Панова и Ю.В. Нагребецкую за ряд ценных замечаний, которые учтены при создании данного текстового ресурса.

Благодарю Т.С. Веселову за методическую помощь при оформлении ресурса.

Ю.В. Шапарь

1. Элементы комбинаторики

Комбинаторикой называется раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов конечного множества.

Размещениями из n элементов по m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ называются m-элементные комбинации, выбранные из данных n элементов, отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения. Число размещений находится по формуле

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

Число размещений из n элементов по m по сути есть число способов разместить n объектов на m местах.

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n элементов. Число перестановок из n элементов рассчитывается по формуле

$$\boxed{P_n = A_n^n = n!}$$

Пусть в n- элементном размещении находятся k различных объектов. Первый объект повторяется n_1 раз, второй – n_2 раза, ..., k-й – n_k раз. При этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, а число перестановок с повторениями рассчитывается по формуле

$$\boxed{P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}}$$

Сочетаниями из n элементов по m называются m-элементные комбинации, выбранные из n элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (т. е. отличаются только составом элементов). Число сочетаний C_n^m вычисляется по формуле

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}}$$

Число сочетаний из n элементов по m по сути есть число способов выбрать m объектов из n объектов.

Если при упорядоченном выборе m элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки называются размещениями с повторениями. Их число находится по формуле

$$\boxed{\widetilde{A}_n^m = n^m}$$

Если при неупорядоченном выборе m элементов из n элементы возвращаются обратно (одни и те же элементы могут выниматься по нескольку раз, т.е. повторяться), то полученные комбинации представляют собой сочетания с повторениями, число которых вычисляется по формуле

$$\boxed{\widetilde{C}_n^{\,m} = C_{n+m-1}^{\,m}}$$

Правило умножения. Если из некоторого конечного множества первый объект A можно выбрать n_1 способами, второй объект B — n_2 способами, то оба объекта A и B в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило сложения. Если объект A можно выбрать n_1 способами, второй объект B — n_2 способами, то выбрать A или B можно $n_1 + n_2$ способами.

Задачи

1.1. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию по 5 адресам?

1.2. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3: а) если цифры не повторяются; б) если цифры могут повторяться?

1.3. Студентам нужно сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

1.4. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых ровно 3 лежат на одной прямой?

1.5. Восемь студентов, дополнительно зачисленных в университет, случайным образом распределяются по 4 группам. Сколькими способами их можно распределить по группам так, чтобы: а) они распределились поровну по четырем группам; б) все оказались в одной группе; в) по 4 студента попали в две группы?

1.6. Сколько существует шестизначных чисел, у которых на четных местах стоят цифры 0, 2, 4, 6, 8?

1.7. Имеется 5 конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для письма?

1.8. На десяти различных жетонах написаны буквы А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Жетоны случайным образом перемешаны и выложены в ряд. Сколькими способами можно получить таким образом слово «МАТЕМАТИКА»?

1.9. Сколько словарей нужно издать, чтобы переводить с любого из 5 языков на любой другой из этих языков?

1.10. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; б) 3 юноши и 2 девушки; в) 1 юноша и 4 девушки; г) 5 юношей?

1.11. Автомобильные номера состоят либо из трех букв и трех цифр, либо из двух букв и четырех цифр. Найти количество таких номеров, если используются 12 букв русского алфавита.

1.12. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 4 офицера и 8 солдат?

1.13. В колоде 36 карт. Сколькими способами можно а) вытянуть 3 карты; б) вытянуть 3 карты так, чтобы среди них оказалась дама; в) вытянуть 3 карты так, чтобы среди них оказалась пиковая дама; г) вытянуть 3 карты одной масти?

1.14. В колоде 52 карты. Наудачу берут 6 карт без возвращения. Сколькими способами можно получить эти шесть карт, чтобы а) среди них было 5 карт одной масти; б) среди них присутствовали все масти; в) среди них оказалась пиковая дама?

1.15. Группа шахматистов сыграла между собой 28 партий. Каждые два из них встречались между собой один раз. Сколько шахматистов участвовало в соревнованиях?

1.16. Сколькими способами 9 одинаковых конфет можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?

1.17. Сколько обыкновенных дробей можно составить из чисел 3, 5, 11, 13,16, 17?

1.18. В урне 5 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать: а) 2 шара разных цветов; б) 2 белых шара; в) 2 черных шара?

1.19. Кодовое устройство пятиразрядного цифрового замка состоит из пяти вращающихся дисков, каждый из которых имеет шесть цифр от 0 до 5. Только одна (правильная) комбинация позволяет открыть замок. Найти число возможных комбинаций.

1.20. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

Ответы

1.1. 120
1.2. а) 18; б) 192
1.3. 1680
1.4. 26
1.5. а) 2520; б) 4; в) 420
1.6. 112500
1.7. 20
1.8. 24
1.9. 20
1.10. 21; 4620; 420; 792
1.11. 3168000
1.12. 224
1.13. а) 7140; б) 2380; в) 595; г) 336
1.14. а) 50193, б) 6854640, в) 2349060
1.15. 8
1.16. 70
1.17. 30
1.18. 40; 10; 28
1.19. 6^5
1.20. $(7!)^2 \cdot 2$

2. Алгебра событий

Случайным называется событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти. События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$.

События, которыми может закончиться опыт, называются *исходами*.

Событие Ω, которое обязательно наступит в данном опыте, называют *достоверным*. Событие $\varnothing$, которое не наступит в данном опыте, называют *невозможным*.

Множество $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{n}$ (или $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$) всех возможных взаимно исключающих исходов данного опыта называется *пространством элементарных событий (исходов)*.

Суммой (объединением) двух событий A и B называется новое событие $A + B$ $(A \cup B)$, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B.

Произведением (пересечением) двух событий A и B называется новое событие $A \cdot B$ $(AB,\ \ A \cap B)$, состоящее в совместном появлении A и B в данном опыте.

Событие A влечет за собой событие B $(A \subset B)$, если в результате наступления события A наступает также событие B.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно состоит в ненаступлении события A.

Несколько событий в данном опыте называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление любого другого.

Задачи

2.1. Указать пространства элементарных событий для следующих опытов: а) подбрасывание двух игральных костей; б) стрельба по мишени до первого попадания; в) наблюдение за временем безотказной работы прибора.

2.2. Игральную кость бросают один раз. Описать пространство элементарных событий, указать элементарные исходы, благоприятные событиям: A_1=\{выпало четное число очков\}; A_2=\{выпало не менее 4 очков\}; A_3=\{выпало более 6 очков\}.

2.3. Электрическая цепь составлена по схемам, приведенным на рисунке 1. Событие A_i={элемент с номером i вышел из строя}, $i \in \overline{1,3}$. Событие B={цепь вышла из строя}. Выразить события B и $\overline{B}$ через события A_i.

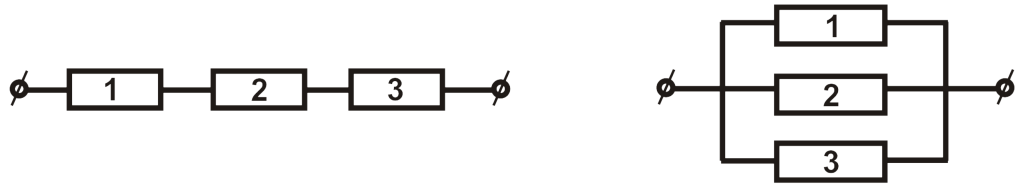

Рис. 1

2.4. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие A_1={первый студент решил задачу}, A_2={второй студент решил задачу}, A_3={третий студент решил задачу}. Выразить через события A_i, $i \in \overline{1,3}$ следующие события: A={все студенты решили задачу}; B={задачу решил только первый студент}; C={задачу решил хотя бы один студент}; D={задачу решил только один студент}.

2.5. Описать пространство элементарных исходов Ω и вычислить его мощность для следующих экспериментов: 1) человек наудачу подбирает пинкод; 2) покупатель наугад выбирает в кондитерском магазине пять пирожных четырех видов; 3) трем игрокам в покер раздают из колоды карт (52 шт.) по 4 карты каждому; 4) шахматист играет серию из 8 партий, каждый раз фиксируя в протоколе результат В, П или Н.

2.6. Поражение боевого самолета может наступить или в результате повреждения обоих двигателей (случайные события D_1 и D_2), или в результате попадания в кабину пилота (случайное событие K). При обстреле любое попадание в соответствующий агрегат самолета приводит к его повреждению. Пусть A={поражение самолета}. Описать пространство элементарных событий. Записать событие A в алгебре событий как через элементарные исходы, так и через события $D_1; D_2; K$.

2.7. Двое играют в шахматы. Рассмотрим события A={выиграл первый игрок} и B={выиграл второй игрок}. Что означают события

$$A \cdot B,\ \ \overline{A} \cdot \overline{B},\ \ \overline{B} \setminus A,\ \ \overline{B} \setminus A + A \setminus \overline{B}\ ?$$

3. Вероятность. Классическое определение вероятности

Числовая функция P, определенная на σ-алгебре $\mathcal{A}$, называется *вероятностью*, если выполняются аксиомы:

1) $P(A) \geqslant 0$ для любого события $A \in \mathcal{A}$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ для любых $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, таких что $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Если вероятность определяется на алгебре событий, то третья аксиома заменяется на условие: $P(A+B) = P(A) + P(B)$ для любых несовместных событий A и B, принадлежащих $\mathcal{A}$.

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется *вероятностным пространством.*

Из определения вероятности следует, в частности, что

$$P(\varnothing) = 0; \quad P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Пусть производится опыт с n равновозможными исходами, образующими группу несовместных событий. Исходы, которые приводят к наступлению события A, называются *благоприятными* событию A. Тогда вероятность события A равна отношению числа m благоприятных исходов к числу n всевозможных исходов данного события:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Данную формулу называют классическим определением вероятности.

Замечание («урновая схема»). Пусть в урне содержится N шаров, среди которых M черных и $N-M$ белых. Наудачу и без возвращения вынимают n шаров. Тогда вероятность того, что полученная выборка состоит их m черных и $n-m$ белых шаров, равна

$$\boxed{P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}}$$

Задачи

3.1. На карточках написаны буквы: Л, И, Т, Е, Р, А. На стол наудачу по одной выкладывают 4 карточки. Какова вероятность того, что получится слово «ТИРЕ»?

3.2 В урне 20 шаров с номерами $1, 2, \ldots, 20$. Наудачу выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них есть шары с номерами 1 и 2.

3.3. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не больше 3?

3.4. В первом ящике находятся шары с номерами $1, 2, 3, 4, 5$, во втором – с номерами $6, 7, 8, 9, 10$. Из каждого ящика вынимают по шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: а) не меньше 7; б) равна 11 ?

3.5. За круглым столом случайно рассаживаются n мужчин и n женщин. Найти вероятности следующих событий: а) никакие два лица одного пола не сядут рядом; б) если эти мужчины и женщины образуют n супружеских пар, то супруги сядут рядом.

3.6. Из букв слова ПАРАЛЛЕЛИЗМ путем их перестановки составляется новое «слово». Какова вероятность того, что в этом «слове» порядок гласных не изменится?

3.7. Из колоды карт (52 шт.) Герман наудачу выбирает три карты. Какова вероятность того, что эти карты – «тройка», «семерка», туз?

3.8. Из 12 лотерейных билетов, среди которых 4 выигрышных, берут 6. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один выигрышный?

3.9. Полная колода карт (52 шт.) делится наугад на две равные части по 26 карт. Найти вероятность того, что в каждой из пачек окажется по два короля.

3.10. В лотерейном билете нужно зачеркнуть 6 номеров из 49. Какова вероятность угадать: а) 6 номеров; б) 5 номеров; в) 4 номера; г) 3 номера; д) 2 номера; е) один номер?

3.11. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляется трехзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что это число будет четным?

3.12. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других; в каждую лунку может попасть несколько шариков. Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой – один, а в двух оставшихся лунках шариков не будет.

3.13. В группе 15 студентов, из которых четверо – отличники. Для написания тестового контроля наудачу из группы отбирают 7 человек. Какова вероятность того, что среди отобранных студентов будет не более двух отличников?
3.14. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания (слева направо), но необязательно рядом.

Ответы

3.1. 1/360
3.2. 3/38
3.3. 1/12
3.4. а) 1; б) 1/5
3.5. а) $2(n!)^2/(2n)!$; б) $n! \cdot 2^n/(2n)!$
3.7. $2,9 \cdot 10^{-3}$; $4,8 \cdot 10^{-4}$
3.8. 32/33
3.9. 0,39
3.10. $P(k) = C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}/C_{49}^6$, где k – число угаданных номеров
3.11. 2/5
3.12. 3/16
3.13. 10/13
3.14. 3/14

4. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности применимо, если имеется конечное число равновозможных исходов некоторого события. Если же пространство элементарных исходов бесконечно и является всюду плотным множеством, то используется геометрический подход. В его основе вероятности трактуются как «доли» множества благоприятных исходов во множестве всевозможных элементарных исходов:

$$\boxed{P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}}$$

Здесь $\mu(\Omega)$ есть мера фигуры Ω, соответствующей пространству всевозможных исходов, а $\mu(A)$ – мера фигуры, соответствующей множеству благоприятных событию A исходов.

В качестве меры могут выступать длина, площадь или объем в зависимости от размерности задачи. Предполагается, что $\mu(\Omega) > 0$.

Данную формулу называют геометрическим определением вероятности.

Задачи

4.1. Точку бросают наугад в круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Найти вероятность того, что: а) расстояние от точки до центра круга превысит 0,5; б) абсцисса точки будет не больше 0,5; в) точка окажется вне квадрата, вписанного в данный круг.

4.2. Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена в угловом секторе α радиан, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?

4.3. В единичный квадрат $[0;1] \times [0;1]$ наугад брошена точка. Пусть $(\xi;\eta)$ – ее координаты. Найти вероятность того, что корни уравнения $t^2 + \xi t + \eta = 0$ действительные.

4.4. На отрезке $[a;b]$ наудачу ставят две точки. Пусть x, y – их координаты. Найти вероятности событий $A, B, AB, A \cup B$, если A={расстояние между второй точкой и левым концом отрезка меньше, чем расстояние между первой точкой и правым концом отрезка}; B={расстояние между точками меньше половины длины отрезка}.

4.5. Выбираются наудачу два числа из отрезка $[0;1]$. Какова вероятность того, что их сумма не больше единицы, а их произведение не больше $2/9$?

4.6. Стержень разломали на три части в двух точках, выбранных наудачу. Определить вероятность того, что из полученных отрезков можно а) построить треугольник; б) построить остроугольный треугольник; в) построить треугольник с углами $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$?

4.7. На окружности единичного радиуса наудачу ставятся три точки A, B и C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

4.8. На отрезке AB длины l наудачу выбирают две точки M и N. Определить вероятность того, что точка M ближе к точке N, чем к точке A.

4.9. Найти вероятность того, что из трех взятых наудачу отрезков длины не больше L можно построить треугольник.

4.10. Посадочная система аэропорта обеспечивает заход на посадку в сложных метеоусловиях с интервалом между посадками самолетов не менее 5 мин. Два самолета должны прибыть на аэродром по расписанию: один в 10 ч, а другой в 10 ч 10 мин. Какова вероятность того, что второму самолету придется уходить в зону ожидания, если первый самолет может выйти на аэродром с отклонением от расписания в пределах ± 10 мин, а второй – в пределах ± 5 мин при условии, что величины отклонений от расписания в указанных пределах равновозможны?

Ответы

4.1. а) $3/4$; б) $(8\pi + 3\sqrt{3})/12\pi$; в) $1 - 2/\pi$

4.2. $\alpha/2\pi$

4.3. $1/12$

4.4. $P(A) = 1/2$; $P(B) = 3/4$; $P(AB) = 3/8$; $P(A \cup B) = 7/8$

4.5. $1/3 + 2/9 \ln 2$

4.6. а) $1/4$; б) $3\ln 2 - 2$

4.7. $1/4$

4.8. $3/4$

4.10. $1/4$

5. Теоремы умножения и сложения вероятностей. Условная вероятность

В некоторых задачах математическая модель (т.е. вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$) уже построена, а вероятности т.н. «простых» (вспомогательных) событий известны или легко находятся. Требуется найти вероятность «сложного» события, которое выражается через вспомогательные события при помощи операций над событиями. В таких случаях удобно использовать теоремы сложения и умножения вероятностей.

Условной вероятностью события A по событию B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Условная вероятность определяется формулой

$$\boxed{P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0}$$

События A и B называются *независимыми*, если появление или непоявление одного из них не меняет вероятности появления другого. В противном случае события называются *зависимыми*. Для независимых событий

$$P(A/B) = P(A), \; P(B/A) = P(B).$$

***Теорема* 1.** *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого (при условии, что первое событие произошло)*

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Эта формула легко обобщается на случай любого числа событий. В частности, вероятность произведения трех событий

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B)$.

***Теорема* 2.** *Вероятность суммы совместных событий A и B равна*

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для несовместных событий A и B вероятность их суммы

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

При вычислении вероятности сложного события бывает удобно пользоваться формулой вычисления вероятности противоположного события:

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right).$$

Задачи

5.1. По мишени производится три выстрела. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,4; 0,5 и 0,7. Считая попадания в мишень событиями независимыми, найти вероятности следующих событий: а) ровно одно попадание; б) хотя бы одно попадание; в) ровно два попадания; г) хотя бы два попадания; д) три попадания.

5.2. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 25 вопросов из 30. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос билета и на один дополнительный вопрос из этих же 30 вопросов.

5.3. Студент выполняет тест. Работа состоит из трех задач. Для каждой задачи предложено 5 вариантов ответов, из которых только один правильный. Студент выбирает ответы наудачу. Какова вероятность того, что он пройдет тест, если для этого достаточно верно решить хотя бы две задачи?

5.4. На рисунках 2-8 приведены схемы соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Вычислить вероятность безотказной работы (надежность) каждой схемы, если надежность k-го элемента $p_k = 0,6$; $k \in \overline{1,12}$.

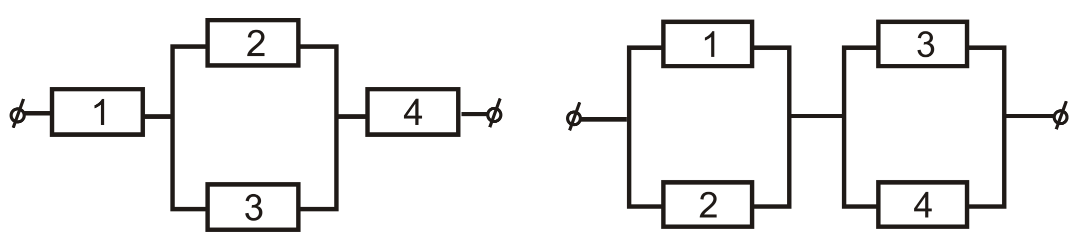

Рис. 2

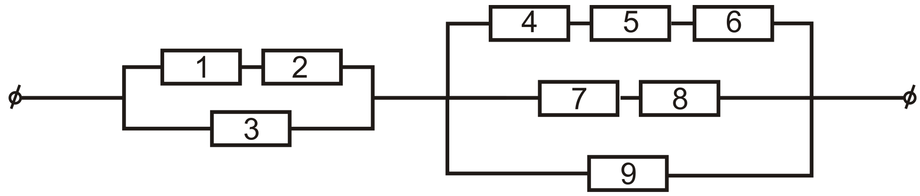

Рис. 3

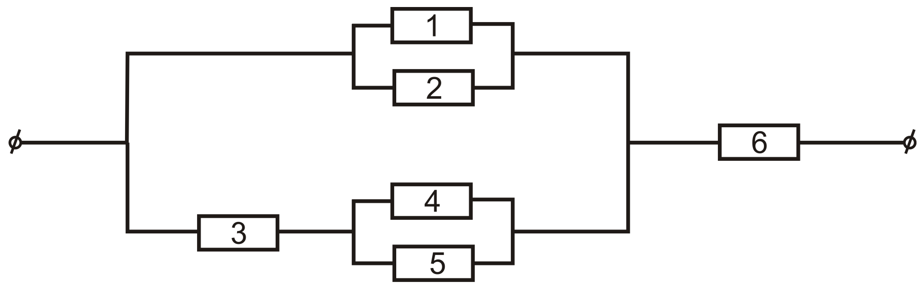

Рис. 4

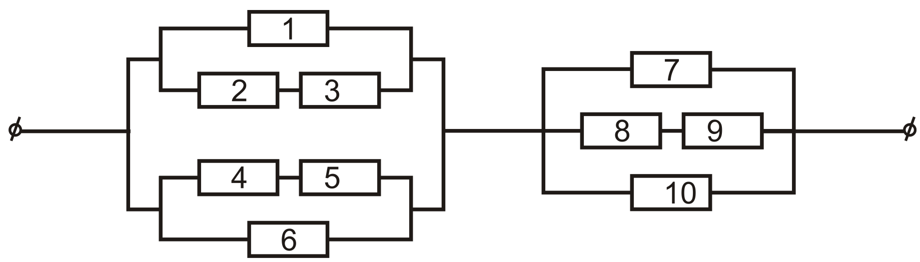

Рис. 5

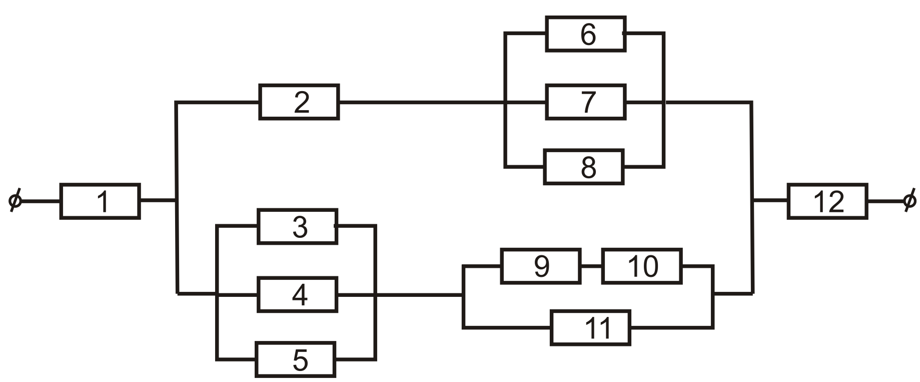

Рис. 6

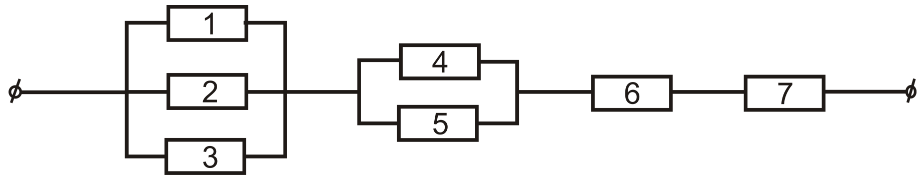

Рис. 7

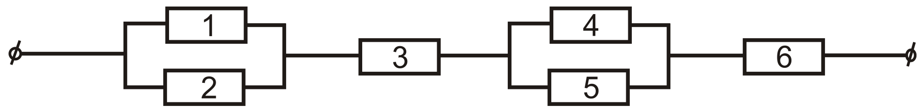

Рис. 8

5.5. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью 1/4, выжить с вероятностью 1/4 и разделиться на две с вероятностью 1/2. В следующий такой же промежуток времени с каждой амебой независимо от ее «происхождения» происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями может существовать к концу второго промежутка времени?

5.6. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах равна 0,973. Найти вероятность попадания при одном выстреле, предполагая, что попадания при каждом выстреле независимы и равновероятны.

5.7. Клиент банка решил снять деньги в банкомате, но забыл последние две цифры пинкода. Найти вероятность того, что клиент верно введет пинкод с первой попытки при следующих условиях: 1) клиент помнит, что эти цифры одинаковые; 2) помнит, что цифры различные; 3) вспомнил, что последняя цифра 1; 4) ничего не помнит.

5.8. Найти вероятность того, что в группе из 23 студентов не менее двух студентов родились в один день.

5.9. Охотник стреляет в лося с расстояния 100 метров и попадает в него с вероятностью 0,5. Если при первом выстреле попадания нет, то охотник стреляет второй раз, но с расстояния 150 м. Если нет попадания и в этом случае, то охотник стреляет третий раз, причем в момент выстрела расстояние до лося равно 200 м (лось «равномерно» убегает, пока охотник «равномерно» прицеливается). Считая, что вероятность попадания обратно пропорциональна квадрату расстояния от охотника до лося, определить вероятность попадания в лося с трех выстрелов.

5.10. Вероятность перехода студента первого курса на второй равна 0,9, а вероятность успешного окончания университета равна 0,8. Какова вероятность того, что студент второго курса окончит университет?

Ответы

5.1. а) 0,36; б) 0,91; в) 0,41; г) 0,55; д) 0,14
5.2. 0,936
5.3. 0,104
5.5. 0, 1, 2, 3, 4 амебы могут существовать с вероятностями 11/32; 4/32; 9/32; 4/32; 4/32 соответственно
5.6. 0,7
5.7. 1) 0,1; 2) 0,011; 3) 0,1; 4) 0,01
5.8. 0,5073
5.9. 95/144
5.10. 8/9

6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Теорема 3. *Пусть* $H_1, H_2, \dots, H_n -$ *полная группа попарно несовместных событий (гипотез), т.е.* $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \quad H_i \cdot H_j = \varnothing, i \neq j$, *совместно с одним из которых происходит событие* A. *Тогда справедлива формула полной вероятности:*

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)}$$

При этом $P(H_i)$ называют *априорными* (доопытными) вероятностями гипотез. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Теорема 4. *Пусть* $H_1, H_2, \dots, H_n -$ *полная группа гипотез некоторого события* A. *Тогда справедлива формула Байеса:*

$$\boxed{P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.}$$

Данная формула позволяет «пересчитать» вероятности гипотез при условии, что событие A произошло.

Вероятности $P(H_i/A)$ называются *апостериорными* (послеопытными) вероятностями гипотез.

Задачи

6.1. В тире имеется 6 ружей. Вследствие разницы в пристрелке ружей вероятность попадания для двух из этих ружей равна 0,8, для трех – 0,9, для одного 0,3. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле, если ружье выбирается наудачу.

6.2. На рисунке 9 изображена схема дорог. Туристы выходят из пункта A, выбирая каждый раз на развилке дорог дальнейший путь наудачу. Какова вероятность того, что они попадут в пункт B?

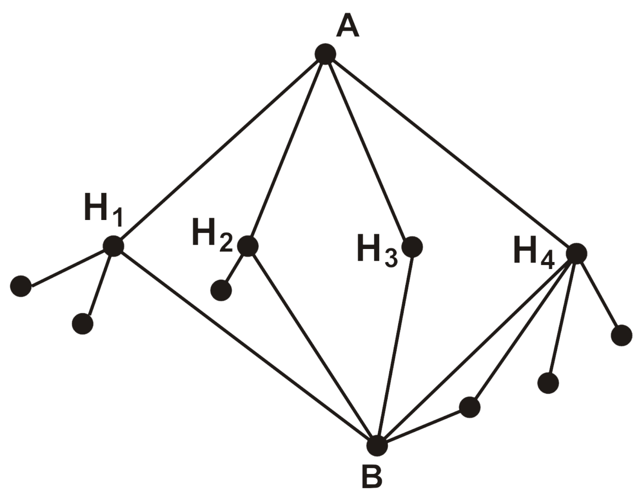

Рис. 9

6.3. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе мимо бензоколонки относится к числу легковых, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, легковая – 0,2. Чему равна вероятность того, что машина, подъехавшая к заправке, грузовая?

6.4. Из 10 студентов, сдающих экзамен по теории вероятностей, два студента знают по 20 билетов из 30, один студент знает 15 билетов, остальные знают все билеты. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный из списка студент сдаст экзамен, если знание билета обеспечивает сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а незнание – с вероятностью 0,1?

6.5. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

6.6. В первой урне 10 шаров, из которых 8 белых, во второй 20 шаров, из которых 4 белых. Из каждой урны берут наугад по одному шару, а затем из этих двух шаров выбирают наудачу один. Найти вероятность того, что он белый.

6.7. Из 18 стрелков пятеро попадают в мишень с вероятностью 0,8; семеро – с вероятностью 0,7; четверо – с вероятностью 0,6 и двое – с вероятностью 0,5. Выбранный по жребию стрелок произвел выстрел и попал в мишень. Какова вероятность того, что стрелок принадлежит первой группе.

6.8. Военный корабль может пройти вдоль пролива шириной 1 км с минным заграждением в любом месте. Вероятность его подрыва на мине в правой части заграждения шириной 200 м равна 0,3, а на остальной части эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что корабль благополучно пройдет пролив.

6.9. Имеется две колоды карт по 36 листов. Из первой колоды во вторую переложили две карты, а затем из второй наудачу извлекли две. Среди двух извлеченных оказался один туз. Какова вероятность того, что среди переложенных карт был хотя бы один туз?

6.10. По объекту производится три одиночных (независимых) выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором – 0,5; при третьем – 0,7. Для вывода объекта из строя заведомо достаточно трех попаданий; при двух попаданиях он выходит из строя с вероятностью 0,6; при одном — с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов объект будет выведен из строя.

6.11. Среди наблюдаемых спиральных галактик 23 % принадлежат подтипу S_a, 31 % — подтипу S_b и 46 % — подтипу S_c. Вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в этих галактиках составляет 0,002; 0,0035 и 0,0055 соответственно. Найти вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в далекой спиральной галактике, подтип которой определить не удается. В некоторой спиральной галактике обнаружена вспышка сверхновой звезды. С какой вероятностью наблюдаемая при этом галактика принадлежит типу S_a, S_b, S_c?

6.12. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любого донора. Человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же, либо первой группы. Человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7%

имеют первую группу, 37,5% – вторую, 20,9% – третью, 7,9% – четвертую. Найти вероятность того, что

а) случайно взятому больному можно перелить кровь случайного донора;

б) переливание можно осуществить, если имеются два донора;

в) если имеются три донора.

Ответы

6.1. 0,766
6.2. 7/12
6.3. 0,429
6.4. 0,763
6.5. 0,445
6.6. 0,5
6.7. 40/123
6.8. 0,3
6.9. 0,247
6.10. 0,458
6.11. 0,004075; 0,1129; 0,2663; 0,6208
6.12. а) 0,574; б) 0,819; в) 0,923

7. Схема Бернулли

Несколько опытов называются *независимыми*, если их исходы представляют собой независимые (в совокупности) события.

Пусть проводится n независимых испытаний (опытов), в каждом из которых некоторое событие A наступает с вероятностью p (вероятность успеха) и не наступает с вероятностью $q = 1 - p$ (вероятность неуспеха). Рассмотрим две задачи: точечную и интервальную.

Точечная задача: требуется найти вероятность $P_n(m)$ того, что в серии из n испытаний число успехов равно m.

Интервальная задача: найти вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что в серии из n испытаний число успехов $m \in [m_1; m_2]$.

Формула Бернулли:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}} \tag{1}$$

Теорема 5. *Если число испытаний n велико, вероятность успеха в одном испытании p близка к нулю ($p < 0,1$) и при этом $\lambda = np < 10$, то*

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}} \tag{2}$$

Теорема 6. *Если число испытаний n велико, $\lambda = np > 10$, то*

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_0)}, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x_0 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{3}$$

Теорема 7. *Если число испытаний n велико, то*

$$\boxed{P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),} \tag{4}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt -$ *функция Лапласа;* $x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}$; $i \in \{1; 2\}$.

- Для решения точечной задачи используется формула Бернулли (1), теорема Пуассона (2), локальная теорема Муавра-Лапласа (3).
- Для решения интервальной задачи применяется интегральная теорема Муавра-Лапласа (4).
- Если число испытаний n невелико, то возможно сведение интервальной задачи к нескольким точечным задачам при помощи теоремы сложения вероятностей.

Пусть m — число испытаний, в которых произошло событие A. Отношение $\frac{m}{n}$ называется *относительной частотой наступления события* A в данной серии испытаний. Справедлива формула (закон больших чисел в схеме Бернулли)

$$\boxed{P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)}$$

Таблицы значений функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ имеются в Приложениях.

Наивероятнейшее число наступления успехов m_0 в серии из n испытаний можно определить из неравенства

$$np-q\leqslant m_0\leqslant np+p.$$

Замечание 1. Если $np+p\in\mathbb{Z}$, то таких значений будет два:

$$m_0^{(1)}=np-q,\ m_0^{(2)}=np+p.$$

Замечание 2. Пусть в одном испытании возможны несколько ($m>2$) исходов, а не два (успех/неуспех), как в схеме Бернулли.

Обозначим их цифрами $1,2,\ldots,m$. Пусть i-й исход в одном испытании случается с вероятностью p_i, где $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$. Обозначим через $P(n_1,n_2,\ldots,n_m)$ вероятность того, что в $n=n_1+n_2+\ldots+n_m$ независимых испытаниях исход 1 появился n_1 раз, исход 2 появился n_2 раза, ..., исход m появился n_m раз.

Тогда справедлива *полиномиальная формула*

$$\boxed{P(n_1,n_2,\ldots,n_m)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}\,p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_m^{n_m}}$$

Задачи

7.1. По каналу связи передается шесть сообщений. Каждое из сообщений независимо от других искажается с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что а) ровно два сообщения из шести искажены; б) не менее двух сообщений из шести искажены.

7.2. Производится 600 испытаний. Вероятность успеха в каждом испытании равна 0,007. Найти вероятность наступления m успехов, если m принимает значения 0, 1, 300.

7.3. Предполагая, что номер машины состоит из четырех цифр, начиная с 0000, найти вероятность того, что а) номер машины не содержит цифры 5; б) номер не содержит двух и более пятерок.

7.4. Каждый выпущенный по цели снаряд попадает в нее независимо от других снарядов с вероятностью 0,4. Если в цель попал один снаряд, она поражается с вероятностью 0,3; если два снаряда – с вероятностью 0,7; если три или более снарядов, то цель поражается наверняка. Найти вероятность поражения цели при условии, что по ней выпущено 3 снаряда.

7.5. Игральная кость подбрасывается 15 раз. Найти вероятности событий: а) выпадет ровно 10 троек; б) выпадет хотя бы одна тройка; в) выпадет 10 троек и две единицы.

7.6. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,3. Событие B наступает с вероятностью 1, если событие A произошло не менее двух раз. Событие B не может наступить, если событие A не имело места и оно наступает с вероятностью 0,6, если A наступило один раз. Найти вероятность события B.

7.7. Радиотелеграфная станция передает цифровой текст. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,001. Найти вероятности того, что в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет сделано а) ровно 7 ошибок; б) меньше двух ошибок.

7.8. Есть четыре кубика. На трех из них окрашена белым половина граней, а на четвертом кубике всего одна грань из шести белая. Наудачу выбранный кубик подбрасывается семь раз. Найти вероятность того, что выбран четвертый кубик, если при семи подбрасываниях белая грань выпала ровно один раз.

7.9. Имеется 200 семей, в каждой из которых 4 ребенка. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятности того, что а) число семей, имеющих одного сына и трех дочерей, равно 20; б) число семей, имеющих одного сына и трех дочерей, по крайней мере равно 20.

7.10. Вероятность рождения мальчика $p = 0,512$. Вычислить вероятности событий: а) среди 100 новорожденных будет 51 мальчик; б) среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек.

7.11. В некоторой области имеется 16 200 тракторов. Известно, что в течение сезона в среднем у одной трети тракторов выходит из строя некоторая деталь, которая требует замены. Было заготовлено 5 400 деталей для замены. Какова вероятность того, что этого количества деталей достаточно для обеспечения непрерывной работы в течение сезона? Сколько нужно заготовить деталей, чтобы с вероятностью 0,95 их было достаточно для обеспечения нормальной работы тракторов в течение сезона?

7.12. В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 у.е. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1 000 у.е. Найти вероятности событий: A={по истечении года работы страховая компания потерпит убыток}, B={страховая компания получит прибыль не менее 60 000 у.е.}

7.13. В жилом доме имеется 6400 ламп. Вероятность включения каждой лампы в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет от 3120 до 3200. Вычислить наивероятнейшее число включенных ламп и вероятность этого значения.

7.14. Косметологическая клиника распространяет рекламные листовки у входа в метро. Опыт показывает, что в результате в одном случае из тысячи следует обращение в клинику. Найти вероятность того, что при распространении 50 тысяч листовок число обращений а) будет равно 41; б) будет находиться в диапазоне от 36 до 47.

7.15. Какова вероятность того, что среди 730 пассажиров поезда: а) четверо родились 9 августа; б) двое родились 12 ноября; в) никто не родился 6 июня? Считать, что в году 365 дней.

7.16. Какое минимальное количество раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,95, отклонение относительной частоты выпадения герба от вероятности его выпадения не превышало 0,01?

7.17. Вероятность того, что прибор выдержит гарантийный срок работы равна 0,8. Для партии из 1000 закупленных приборов найти границы, в которых с вероятностью 0,9955 заключено число приборов, выдержавших гарантийный срок службы.

7.18. Оценить, в каких пределах с вероятностью P заключено число шестерок, выпадающих при подбрасывании 1 000 игральных костей а) если $P = 0,95$; б) $P = 0,99$.
7.19. Отрезок AB, длина которого 15 см, разделен точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Какова вероятность того, что две из них окажутся левее точки C, а две – правее?
7.20. Город ежедневно посещают 1000 туристов, которые днем идут обедать. Каждый выбирает для обеда один из двух городских ресторанов с равными вероятностями и независимо друг от друга. Владелец одного из ресторанов желает, чтобы с вероятностью приблизительно 0,99 все пришедшие в его ресторан туристы могли там одновременно пообедать. Сколько мест должно для этого быть в его ресторане?

Ответы

7.1. 0,246; 0,345
7.3. 0,6561; 0,9477
7.4. 0,3952
7.6. 0,595
7.8. 0,7
7.10. 0,0797; 0,516
7.11. 0,5; 5499
7.12. P(A)$\approx$ 0; P(B)=0,5
7.13. 0,4772; 3200; 0,00998
7.14. а) 0,025; б) 0,3118
7.15. а) 0,09; б) 0,27; в) 0,135
7.16. $n \geqslant 9604$
7.18. а) (143;189); б) (136;196)
7.19. 8/27
7.20. 537 мест

8. Дискретные случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство.

Случайной величиной называется действительная функция от элементарного события $\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega$, такая, что

$$\{\omega : \xi(\omega) < \ x\} \in \mathcal{A} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает изолированные (отделенные друг от друга) значения, которые можно занумеровать. Множество значений дискретной случайной величины конечно или счетно.

Рядом распределения дискретной случайной величины ξ называется таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

.

Здесь $p_i = P(\xi = x_i)$, $i \in \overline{1,n}$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ (условие нормированности).

Функция распределения дискретной случайной величины:

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{k:\, x_k < x} p_k,\ F(x) \in [0;1].$$

$F(x)$ – неубывающая, кусочно-постоянная; терпит разрывы первого рода в точках-значениях случайной величины. При этом величины скачков функции в этих точках равны вероятностям соответствующих значений случайной величины.

Математическим ожиданием $M[\xi]$ дискретной случайной величины называется ее среднее значение, вычисляемое по формуле

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Дисперсией $D[\xi]$ дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения:

$$D[\xi] = M\left[\big(\xi - M[\xi]\big)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - M[\xi]\big)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2[\xi].$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma[\xi]$ дискретной случайной величины называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[\xi]$ оценивает меру разброса значений случайной величины ξ относительно ее центра распределения (группировки) – математического ожидания $M[\xi]$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение называются *числовыми характеристиками* случайной величины.

Замечание. Для случайной величины, множество значений которой счетно, справедливы аналогичные формулы для вычисления числовых характеристик.

Если $\eta = \varphi(\xi)$ – функция дискретной величины ξ, то числовые характеристики η находятся по формулам

$$M[\eta] = M[\varphi(\xi)] = \sum_i \varphi(x_i)p_i,$$

$$D[\eta] = D[\varphi(\xi)] = \sum_i \big(\varphi(x_i) - M[\eta]\big)^2 p_i = \sum_i \varphi^2(x_i)p_i - M^2[\eta].$$

При решении задач бывает удобно использовать свойства числовых характеристик. Приведем некоторые свойства математического ожидания и дисперсии, справедливые для случайных величин ξ и η, $C \in \mathbb{R}$.

Свойства математического ожидания

1) $M[C] = C$;

2) $M[C\xi] = CM[\xi]$;

3) $M[\xi + \eta] = M[\xi] + M[\eta]$;

4) $M[\xi \cdot \eta] = M[\xi] \cdot M[\eta]$, если ξ и η независимы.

Свойства дисперсии

1) $D[C] = 0;\ \ D[C\xi] = C^2 D[\xi];\ \ D[C + \xi] = D[\xi];$

2) $D[\xi] = M\left[\xi^2\right] - M^2[\xi];$

3) $D[\xi \pm \eta] = D[\xi] + D[\eta]$, если ξ и η независимы;

4) $D[\xi \cdot \eta] = M\left[\xi^2\right] \cdot M\left[\eta^2\right] - M^2[\xi]\, M^2[\eta]$, если ξ и η независимы.

Замечание. Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если независимы события $\xi < x$ и $\eta < y$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Примеры основных дискретных распределений и их числовые характеристики

- распределение Бернулли: $\xi \in \mathcal{B}(p);\quad M[\xi] = p,\ D[\xi] = pq;$

  ξ – число успехов в одном испытании.

- биномиальное распределение:

  $$\xi \in \mathcal{B}i(n;p);\quad M[\xi] = np,\ D[\xi] = \ npq;$$

  ξ – число успехов в серии n независимых испытаний.

- распределение Пуассона: $\xi \in \Pi(\lambda);\ \ M[\xi] = D[\xi] = \lambda;$

  ξ – число успехов в серии n независимых испытаний при

  $$n \to\ \infty.$$

- геометрическое распределение:

  $$\xi \in \mathcal{G}(p);\quad M[\xi] = 1/p,\ D[\xi] = q/p^2;$$

  ξ – число независимых испытаний до первого успеха.

- гипергеометрическое распределение:

$$\xi \in \mathcal{HG}(M;N;n); \quad M[\xi] = \frac{nM}{N},$$

$$D[\xi] = \frac{n\,M}{N-1} \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{N^2};$$

ξ – число черных шаров среди m наудачу вынутых (урновая модель задачи).

Замечание. В приведенных примерах используются обозначения, ранее введенные при описании схемы независимых испытаний Бернулли и урновой модели задачи.

Задачи

8.1. Задан ряд распределения дискретной случайной величины

ξ	-1	0	2	4
P	0,1	0,3	0,5	0,1

Построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения и построить ее график. Вычислить числовые характеристики случайной величины ξ.

8.2. Известно, что случайная величина ξ принимает значения -1; 0 и 1. При этом $M[\xi] = \ 0,1$, $D[\xi] = 0,9$. Найти вероятности, с которыми принимаются значения ξ.

8.3. Два спортсмена делают по одному броску мяча в корзину. Вероятность попадания в нее первым спортсменом равна 0,5; вторым – 0,4. Найти среднее число попаданий в корзину.

8.4. Стрелку выдано четыре патрона. Он производит выстрелы по мишени до первого попадания или пока не израсходует все патроны. Вероятности попадания в мишень при первом, втором, третьем и четвертом выстрелах равны соответственно 0,4; 0,7; 0,6; 0,5. Случайная величина ξ – число израсходованных патронов. Найти ее закон распределения и числовые характеристики.

8.5. По заданной функции распределения случайной величины ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1 \\ 0,25, & \text{если } 1 < x \leqslant 2 \\ 0,75, & \text{если } 2 < x \leqslant 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

составить ряд распределения, вычислить $M[\xi]$ и $D[\xi]$.

8.6. Вероятность того, что студент сдаст экзамен на «5», равна 0,2, на «4» – 0,4. Определить вероятности получения им оценок «3» и «2», если известно, что $M[\xi] = 3,7$, где дискретная случайная величина ξ – оценка, полученная студентом на экзамене.

8.7. В команде 16 спортсменов, из которых 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух спортсменов. Построить ряд распределения и функцию распределения числа перворазрядников среди выбранных.

8.8. Вероятности сдать экзамен по математике на отлично для каждого из троих студентов равны 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Пусть ξ – общее число полученных ими отличных оценок. Вычислить $M[\xi]$.

8.9. Артиллерийское орудие производит три выстрела по цели с вероятностями попадания 0,6; 0,7; 0,8 соответственно. Составить ряд распределения числа попаданий орудия в цель.

8.10. Из колоды карт (32 шт.) наудачу извлекают три. Составить закон распределения числа тузов среди извлеченных карт.

8.11. Независимо испытываются на надежность три прибора. Вероятности выхода из строя каждого прибора одинаковы и равны 0,6. Найти среднее число вышедших из строя приборов.

8.12. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадают при бросании двух игральных костей.

8.13. Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 0,8$. Записать ряд распределения случайной величины ξ. а) Найти вероятность $P(1 \leqslant \xi < 3)$; б) вычислить математическое ожидание $M[5-2\xi]$ и дисперсию $D[5-2\xi]$.

8.14. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3, вторым – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин ξ и η – числа израсходованных снарядов первым и вторым орудиями соответственно. Найти среднее число израсходованных снарядов.

8.15. Для того чтобы получить главный приз в онлайн-казино, игрок должен сделать бесконечно много ставок. Каждую ставку игрок делает с вероятностью 0,1, причем эта величина не зависит от остальных ставок. Как только игрок окажется неспособен сделать очередную ставку, его аккаунт будет заблокирован с невозможностью вернуть вложения. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа сделанных игроком ставок.

8.16. Подбрасывают одновременно правильный кубик и неправильную монету, на сторонах которой написаны «0» и «1», выпадающие с вероятностями 2/3 и 1/3 соответственно. Пусть ξ – число, выпавшее на грани кубика, а η – число, выпавшее на монете. Найти закон распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию следующих случайных величин: 1) $\xi+3$; 2) $\xi+\eta$; 3) $2\xi-\eta$; 4) ξ^2; 5) $\xi\eta$; 6) $\max\{\xi-3;\eta\}$.

8.17. Задан ряд распределения случайной величины ξ

ξ	-2	-1	1	2	3
P	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

.

Построить ряды распределений случайных величин а) $\eta = 2\,\xi+3$; б) $\eta = 2\,\xi$; в) $\eta = 3\,\xi^2$ и вычислить их числовые характеристики.

8.18. Задано распределение дискретной случайной величины ξ

ξ	-3	-1	0	1	3	5
P	0,05	0,2	0,25	0,3	0,15	0,05

.

Найти распределение случайных величин а) $\eta = |\xi|$; б) $\eta = \xi^3+1$.

8.19. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено три светофора, дающих независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 1,5 мин., желтый – в течение 0,3 мин., красный – в течение 1,2 мин. Найти функцию распределения и среднее число остановок автомобиля на этой улице.

8.20. Мишень состоит из круга 1 и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг дает 10 очков, в кольцо 2 – 5 очков, в кольцо 3 – (-1) очко. Вероятности попадания в круг 1 и кольца 2 и 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Построить ряд распределения для случайной суммы выбитых очков в результате трех попаданий.

8.21. Сотрудник, работающий на вредном производстве, проходит ежегодный медосмотр в поликлинике.Число заболеваний, обнаруженных во время медосмотра, распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 1/2$. Если заболеваний не обнаружено, то медосмотр продолжается в среднем 3 часа. Если обнаружены одно или два заболевания, то на дополнительный осмотр тратится в среднем еще полчаса. Если обнаруживается более двух заболеваний, то сотрудник получает направление в диагностический центр, где он дополнительно обследуется в среднем 4 часа. Определить закон распределения среднего времени обследования сотрудника T и вычислить математическое ожидание T.

8.22. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 1/3. Имеется семь патронов. Стрельба производится до тех пор, пока не будет трех попаданий или пока не закончатся патроны. Пусть ξ – число выстрелов. Найти математическое ожидание ξ.

Ответы

8.1. $M[\xi] = 1,3;\ D[\xi] = 2,01$ **8.2.** 0,405; 0,09; 0,505 **8.3.** 0,9

8.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,4 & 0,42 & 0,108 & 0,072 \end{pmatrix}$; $M[\xi] = 1,852;\ D[\xi] = 0,77$

8.5. $M[\xi] = 2$; $D[\xi] = 0,5$ **8.6.** $P(3) = 0,3$; $P(2) = 0,1$

8.7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,375 & 0,5 & 0,125 \end{pmatrix}$

8.8. $M[\xi] = 2,4;\ D[\xi] = 0,46$

8.9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,024 & 0,188 & 0,452 & 0,336 \end{pmatrix}$; $M[\xi] = 2,1;\ D[\xi] = 0,61$

8.10. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,66 & 0,305 & 0,034 & 0,001 \end{pmatrix}$

8.11. $M[\xi] = 1,8$; $\sigma[\xi] = 0,72$ **8.12.** 7

8.13. а) $1,12e^{-0,8}$; б) 3,4; 3,2

8.14. $M[\xi] = 1,25;\ M[\eta] = 0,886$ **8.15.** 1/9; 10/81

8.21. 3,325 часа **8.22.** 6,3

9. Непрерывные случайные величины

Непрерывной называется случайная величина, возможные значения которой (непрерывно) заполняют некоторый промежуток, и для которой существует функция $f(x) = F'(x)$. При этом функция распределения

$$F(x) = P(\xi < x)$$

непрерывна.

Функция $f(x)$ называется *плотностью вероятности* (или дифференциальной функцией распределения) и обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \geqslant 0$ (условие неотрицательности);

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ (условие нормированности);

3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;

4) $P(\alpha < \xi < \beta) = P(\alpha < \xi \leqslant \beta) = P(\alpha \leqslant \xi < \beta) =$
$= P(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$

Числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия) непрерывной случайной величины вычисляются по формулам:

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx;$$

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi])^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2[\xi].$$

Замечание. Числовые характеристики существуют, если несобственные интегралы в соответствующих формулах сходятся.

Задачи

9.1. Пусть $f(x)$ – плотность вероятности. Найти значение входящей в определение $f(x)$ постоянной C :

$$1)\ \ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ C\, e^{-\alpha x}, & \text{если } x > 0, \end{cases} \qquad \alpha > 0;$$

$$2)\ \ f(x) = \frac{C}{1 + (x-\alpha)^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

9.2. Задана плотность вероятности случайной величины ξ

$$f(x) = \begin{cases} a\, x^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x < 0;\ x > 1. \end{cases}$$

Найти постоянную a; $F(x)$; числовые характеристики; $P(\xi > \ 0,5)$.

9.3. Существует ли значение C такое, что функция $f(x)$ служит плотностью вероятности? Если существует, то указать его и вычислить соответствующие математическое ожидание и дисперсию:

$$1)\ \ f(x) = \begin{cases} C(1 - |x|), & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

$$2)\ \ f(x) = Ce^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

9.4. Случайная величина задана функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{если } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant \pi/2. \end{cases}$$

Найти постоянную a, функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию случайной величины и вероятность $P(|\,\xi| < \pi/4)$.

9.5. Найти плотность вероятности и математическое ожидание случайной величины по заданной функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \sin^2 x, & \text{если } 0 < x \leqslant \pi/2, \\ 1, & \text{если } x > \pi/2. \end{cases}$$

9.6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -1, \\ ax^2 + b, & \text{если } -1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найти a, b; $f(x)$; $P(0 < \xi < 1/2)$. Построить графики $f(x), F(x)$. Вычислить числовые характеристики случайной величины ξ.

9.7. Дана функция распределения случайной величины

$$F(x) = 1/2 + 1/\pi \operatorname{arctg}(x/2).$$

Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью равной $1/4$ величина ξ принимает значение большее x_1.

9.8. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = c + b \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}.$$

Найти параметры c и b; плотность вероятности ξ; вероятность $P(\alpha < \xi < \beta)$.

9.9. Дана плотность вероятности случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} A/\sqrt{x}, & \text{если } x \in (1;4), \\ 0, & \text{если } x \notin (1;4). \end{cases}$$

Найти постоянную A, функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию случайной величины и вероятность $P(\xi \in (2,25;5))$.

9.10. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \frac{A}{e^{-x} + e^{x}}.$$

Найти
а) постоянную A;
б) вероятность того, что в трех независимых наблюдениях ξ примет значение меньшее единицы;
в) $P(|\xi| < 1)$;
г) $P(\xi \in [-5;2])$.

9.11. Случайная величина ξ распределена по закону равнобедренного треугольника (закону Симпсона) в интервале $(-2; 2)$. Общий вид плотности распределения представлен на рисунке 10.

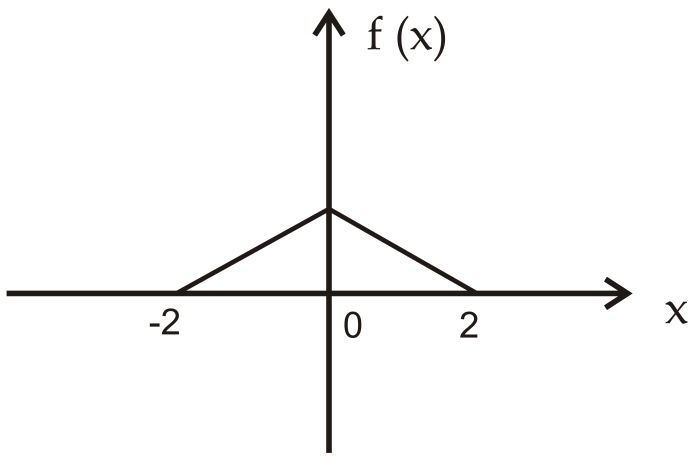

Рис. 10

Записать функцию плотности вероятности и функцию распределения. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и эксцесс ξ.

9.12. На перекрестке стоит светофор, у которого 1 мин. горит зеленый свет и 0,5 мин. красный, затем опять 1 мин. – зеленый свет и т. д. Автобус подъезжает к перекрестку в случайный момент времени, не связанный с работой светофора. Найти а) вероятность того, что он проедет перекресток не останавливаясь; б) закон распределения времени ожидания у перекрестка.

9.13. На круговом экране локатора равновозможно появление цели в каждой точке экрана. Радиус экрана равен R. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки до центра экрана.

9.14. «Продолжение» задачи о встрече. Двое условились встретиться в промежутке времени с 12 до 13 ч. Каждый приходит к месту встречи независимо от другого и с постоянной плотностью распределения в любой момент назначенного промежутка времени. Пришедший раньше ожидает другого. Найти распределение вероятностей времени ожидания и вероятность того, что ожидание продлится не менее получаса. Вычислить среднее время ожидания.

9.15. Зона ответственности локатора определяется в полярных координатах неравенствами $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4$; $30 \leqslant \rho \leqslant 100$. В случайной точке зоны ответственности может появиться цель. Расстояние от цели до локатора – случайная величина ξ. Считая равновозможными все положения цели в зоне ответственности, найти функцию распределения ξ и ее числовые характеристики.

Ответы

9.1. 1) $C=\alpha$;
2) $C=1/\pi$
9.2. $\alpha = 3$;
$M[\xi] = 0,75$; $D[\xi] = 0,0375$;
$P(\xi > 0,5) = 0,875$
9.3. 1) $C = 1$; $M[\xi] = 0$; $D[\xi] = 1/6$;
2) $C = 1/2$; $M[\xi]=0$; $D[\xi]=2$
9.4. $a = 0,5$;
$P(|\,\xi| < \pi/4) = \sqrt{2}/2$;
$M[\xi]=0$; $D[\xi]=\pi^2/4-2$
9.5. $M[\xi] = \pi/4$
9.6. $a = 1/3$; $b = -1/3$
9.7. $x_1 = 2$
9.8. $c = 1/2$; $b = 1/\pi$
9.9. $A = 1/2$;
$M[\xi] = 7/3$; $D[\xi] = 34/45$;
$F(x) = 0,\ x \leqslant 0$; $F(x) = \sqrt{x} - 1,\ x \in (1;4)$; $F(x) = 1,\ x \geqslant 4$
9.11. $M[\xi] = 0; D[\xi] = a^2/6$; $E_\xi = -0,6$
9.13. $f(x) = 2x/R^2,\ x \in (0;R)$;
$M[\xi] = 2R/3$; $D[\xi] = R^2/18$
9.14. $f(x) = 2 - 2x,\ x \in (0,1)$;
$M[\xi] = 1/6$; $P(\xi \geqslant 1/2) = 0,25$
9.15. $f(x) = x/4950,\ x \in (30;100]$;
$M[\xi] = 71$

10. Примеры непрерывных распределений

Случайная величина ξ имеет *равномерное распределение* на $[a;b]$ (запись: $\xi \in \mathcal{R}[a;b]$), если ее плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant a\\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a<x\leqslant b\\ 0, & \text{если } x>b\end{cases}, \quad F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant a\\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a<x\leqslant b\\ 1, & \text{если } x>b\end{cases}.$$

Графики этих функций приведены на рисунке 11.

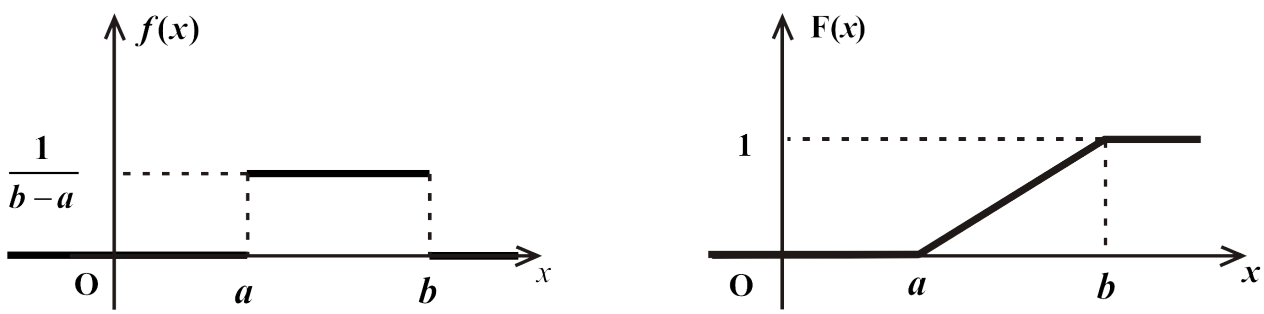

Рис. 11

Заметим, что значения $f(x)$ в точках a и b не фиксируются, т.е. можно положить $f(a)=f(b)=0$ или, например, $f(a)=f(b)=\frac{1}{b-a}$ и даже как-нибудь иначе.

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины

$$\boxed{M[\xi] \;=\; \frac{a+b}{2};\;\; D[\xi] \;=\; \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Случайная величина ξ имеет *экспоненциальное (показательное) распределение* с параметром $\lambda>0$ (запись: $\xi\in Exp(\lambda)$), если ее плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\, e^{-\lambda x}, & \text{если } x>0\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0\end{cases}, \quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x>0\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0\end{cases}.$$

Графики этих функций приведены на рисунке 12.

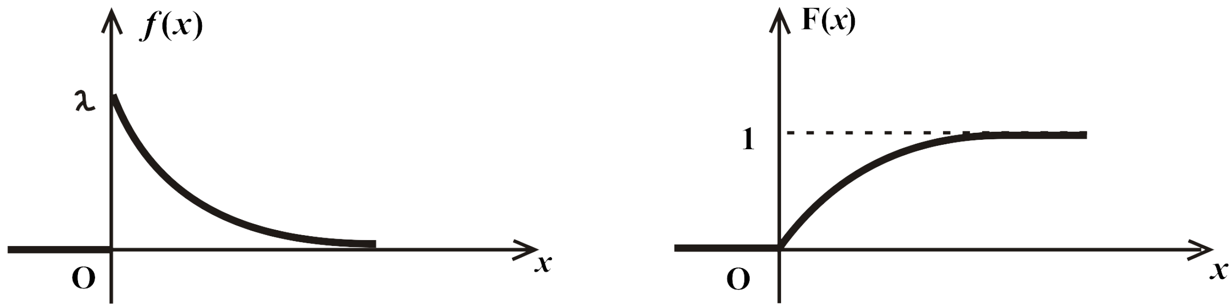

Рис. 12

Числовые характеристики показательной случайной величины

$$\boxed{M[\xi] = \frac{1}{\lambda};\ D[\xi] = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Случайная величина ξ имеет *нормальное (гауссово) распределение* с параметрами a и $\sigma > 0$ (запись: $\xi \in \mathcal{N}(a;\sigma)$), если ее плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Числовые характеристики нормального распределения

$$\boxed{M[\xi] = a;\ D[\xi] = \sigma^2}$$

При $a = 0$; $\sigma = 1$ получаем так называемое *стандартное нормальное распределение*. Его функции распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{2} + \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Здесь $\varphi(x)$ – функция Гаусса, а $\Phi(x)$ – нормированная функция Лапласа (в некоторых источниках используется обозначение $\Phi_0(x)$). Графики этих функций приведены на рисунке 13, а их значения – в таблицах (см. Приложения).

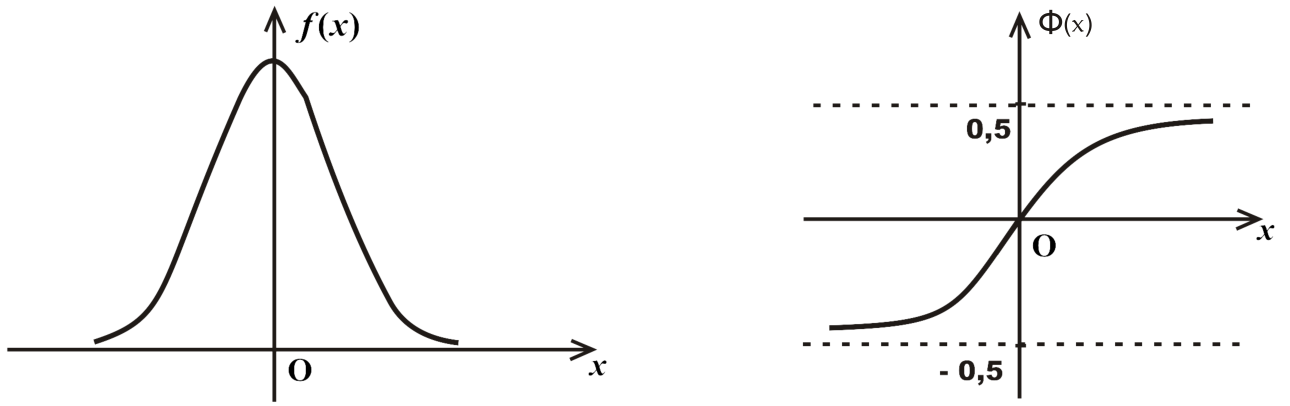

Рис. 13

Заметим, что

$$\Phi(0) = 0 \ \text{ и } \ \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Также справедливы свойства

$$\Phi_{0,1}(0) = 0,5 \ \text{ и } \ \Phi_{0,1}(-x) = 1 - \Phi_{0,1}(x).$$

В общем случае ($\xi \in \mathcal{N}(a;\sigma)$) функции нормального распределения с параметрами a и σ равны соответственно

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right); \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания значений нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),}$$

при этом для симметричного относительно a интервала

$$\boxed{P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}.$$

Задачи

10.1. Поезда метро ходят с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, вышедший на платформу в случайный момент времени, будет ожидать поезд не менее трех минут.

10.2. Случайная величина ξ распределена равномерно в некотором интервале. Построить графики ее функции распределения и плотности вероятности, если известно, что $M[\xi] = 2;\ D[\xi] = 0,75$.

10.3. Правило «трех сигм» для экспоненциального распределения ($\xi \in Exp(\lambda)$): вычислить вероятность

$$P\left(|\,\xi - M[\xi]| < 3\sqrt{D[\xi]}\right).$$

10.4. Время T выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leqslant 0; \\ 0,2 \cdot e^{-0,2\,t}, & \text{если } t > 0 \end{cases}.$$

Найти функцию распределения $F(t)$; математическое ожидание и дисперсию случайной величины T; вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 часов работы.

10.5. Мгновенные значения амплитуды X принимаемого сигнала при замираниях описываются распределением Рэлея

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x > 0.$$

Вычислить числовые характеристики X.

10.6. Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение. Известны вероятности $P(\xi > 2) = 0,5$; $P(\xi < 3) = 0,975$. Вычислить $P(1 < \xi < 3)$ и записать плотность распределения вероятности.

10.7. Деталь считается стандартной, если отклонение ее размера от проектного не превышает 0,7 мм. Считая, что размер детали – случайная величина, распределенная по нормальному закону $\mathcal{N}(a; 0,4)$, найти, сколько годных деталей будет в среднем из 100 выбранных наугад.

10.8. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с параметрами $\sigma = 20$ мм и $a = 0$. Определить вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превысит по абсолютной величине 4 мм.

10.9. Оценить интервал допустимых отклонений размеров деталей от расчетных (среднее квадратическое отклонение равно 5 мк) так, чтобы с вероятностью не более 0,0027 отклонения размеров изготовленных деталей от расчетных выходили за пределы допустимых значений.
10.10. Химический завод изготовляет серную кислоту номинальной плотности 1,84 г/см^3. В результате статистических испытаний обнаружено, что практически 99,9 % всех выпускаемых реактивов имеют плотность в интервале (1,82; 1,86). Найти вероятность того, что кислота удовлетворяет стандарту, если для этого достаточно, чтобы ее плотность не отклонялась от номинала более чем на 0,01 г/см^3. Распределение считать нормальным.
10.11. Дана плотность вероятности случайной величины X :

$$f(x) = \gamma\, e^{-2x^2+4x+1}.$$

Найти неизвестный параметр γ и вероятность того, что
$X \in\ (-1,5; 1,2)$.
10.12. Вычислить $M[(3-\xi)(\xi+5)]$, если $\xi \in \mathcal{N}(-2; 9)$.
10.13. Случайные величины ξ и η независимы, причем $\xi \in \mathcal{N}(2; 0,5)$; $\eta \in \mathcal{R}[0; 4]$. Вычислить а) $M[\xi+\eta]$; б) $M[\xi\eta]$; в) $M\left[\xi^2\right]$; г) $M[3\,\xi-4\eta+1]$; д) $D[\xi+\eta]$; е) $D[3\,\xi-4\eta+1]$.
10.14. Вычислить $P\left(\log_4^2 \xi < 0,25\right)$, если $\xi \in \mathcal{N}(0; 4)$.
10.15. Найти $P\,(\alpha < \xi \leqslant \beta)$, если $\xi \in Exp(\lambda)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ответы

10.1. 0,4 **10.2.** $\xi \in \mathcal{R}(0,5; 3,5)$ **10.3.** 0,982
10.4. $F(t) = 1 - e^{-0,2\,t}$, $t > 0$; $M[T] = 5$; $D[T] = 25$; $0,451$
10.5. $M[X] = \sigma\sqrt{\pi/2}$; $D[X] = \sigma^2(2-\pi/2)$
10.6. 0,95 **10.7.** 92
10.8. 0,4343
10.9. $\geqslant 30$ мк
10.10. 0,898
10.12. 6
10.13. а) 4; б) 4; в) 4,5; д) 11/6
10.14. 0,1437

11. Функции от непрерывной случайной величины

Пусть на интервале $(a;b)$ заданы непрерывная случайная величина ξ с функцией распределения $F(x)$ и плотностью вероятности $f(x)$, и дифференцируемая, строго монотонная на $(a;b)$ функция $y=\varphi(x)$, имеющая обратную функцию $\psi(x)=\varphi^{-1}(x)$ $(x=\psi(y))$.

Непрерывная случайная величина $\eta=\varphi(\xi)$ называется функцией случайной величины ξ. Функция распределения η имеет вид

$$G(y)=P(\eta<y)=P(\varphi(\xi)<y)=\begin{cases} F(\psi(y)), & \text{если } \varphi(x)\uparrow \\ 1-F(\psi(y)), & \text{если } \varphi(x)\downarrow \end{cases}.$$

Плотность вероятности η можно найти по формуле

$$g(y)=\frac{d\,G}{d\,y}=f(\psi(y))\cdot\left|\psi'(y)\right|.$$

Если $y=\varphi(x)$ немонотонна на $(a;b)$, то для нахождения $g(y)$ следует разбить интервал на k участков монотонности и найти обратную функцию на каждом из них. В результате плотность вероятности примет вид

$$g(y)=\sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\cdot\left|\psi_i'(y)\right|.$$

Числовые характеристики функции случайной величины:

$$M[\eta]=M[\varphi(\xi)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot f(x)\,dx;$$

$$D[\eta]=D[\varphi(\xi)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big(\varphi(x)-M[\eta]\big)^2\cdot f(x)\,dx.$$

Задачи

11.1. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}3\,x^2, & \text{если } x\in[0;1),\\ 0, & \text{если } x\notin[0;1).\end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta=-\ln\xi$.

11.2. Случайная величина ξ на интервале $(2;4)$ задана плотностью распределения $f(x)=-0,75x^2+4,5x-6$; вне этого интервала $f(x)=0$. Не находя плотности распределения случайной величины $\eta=\xi^{\,3}$, вычислить $M[\eta]$.

11.3. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } x\in(0;\pi/2),\\ 0, & \text{если } x\notin(0;\pi/2)\,.\end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y=X^2$. Вычислить числовые характеристики случайной величины Y.

11.4. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } x\in[0;1],\\ 0, & \text{если } x\notin[0;1].\end{cases}$$

Найти а)$D[\,|\xi-1/2|\,]$; б)$M\left[2^{\,\xi}\,\right]$.

11.5. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0;4]$. Найти законы распределения случайных величин:
а) $\eta_1=2\xi-3$; б) $\eta_2=-9\xi^2$; в) $\eta_3=e^{-2\xi}$; г) $\eta_4=-\ln(3\xi)$.

11.6. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2;\pi/2)$. Найти законы распределения случайных величин:
а) $Y_1=\sin X$; б) $Y_2=\cos X$; в) $Y_3=|\sin X|$.

11.7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda=5$. Найти плотности распределения случайных величин:
а) $\sqrt{\xi}$; б) ξ^2; в) $\min\{\xi;\xi^2\}$; г) $5\,\xi+2$; д) $-2\sqrt{\xi}$.

11.8. Радиус круга $R-$ случайная величина, распределенная по закону Рэлея с плотностью вероятности

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

при $x>0$. Найти закон распределения площади круга радиуса R.

11.9. Случайная величина $X \in Exp(\lambda)$. Найти числовые характеристики случайной величины $Y = e^{-X}$.
11.10. Случайная величина $\xi \in \mathcal{R}[0;2]$. Найти числовые характеристики случайной величины $\eta = 6\,\xi^2$.
11.11. Случайная величина ξ распределена по закону Коши с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найти плотность распределения случайных величин
а) $\eta_1 = 1/\xi$; б) $\eta_2 = \xi^2/\left(1+\xi^2\right)$; в) $\eta_3 = 2\xi/\left(1-\xi^2\right)$.
11.12. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность вероятности X^2.
11.13. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-3)^2/2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Найти интегральную функцию распределения случайной величины
$\eta = -5\xi + 2$ и вероятность $P(-17 < \eta < -12)$.
11.14. Случайная величина $X \in \mathcal{N}(-2;1)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = -2X + 5$ и вероятность $P(4 \leqslant Y < 7)$.
11.15. Стороны прямоугольника равны 2 см и 6 см. На смежные стороны наудачу и независимо друг от друга ставится по одной точке. Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата расстояния между этими точками.
11.16. На отрезок AB длины 5 наудачу ставится точка T и проводится окружность радиуса AT. Найти математическое ожидание и дисперсию площади полученного круга.
11.17. На окружность радиуса 4 наудачу ставятся две точки, которые затем соединяются между собой и с центром окружности. Найти математическое ожидание площади полученного треугольника.
11.18. Ножки циркуля, каждая длиной 10 см, раздвинуты на случайный угол φ, значения которого равномерно распределены на отрезке $[0;\pi]$. Найти $M[X]$, где X – расстояние между остриями ножек.
11.19. Вершина C прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника соединяется отрезком прямой с произвольной точкой M гипотенузы, длина которой равна 2 см. Найти математическое ожидание длины отрезка CM.
11.20. Случайная величина $\xi \in \mathcal{R}[2;4]$. Найти среднее значение площади правильного треугольника со стороной ξ.

Ответы

11.1. $3\,e^{-3y},\ y>0$
11.2. 3
11.3. $g(y)=\cos\sqrt{y}/(2\sqrt{y}),\ y\in\ \big(0;\pi^2/4\big)$;
$M[Y]=(\pi^2-8)/4;\ \ D[Y]=20-2\pi^2$
11.4. а) $1/48$;
б) $(4\ln 2-2)/\ln^2 2$
11.5. а) $\eta_1\in\mathcal{R}[-3;5]$;
б) $f_2(y)=1/(24\sqrt{-y}),\ y\in(-144;0)$;
в) $F_3(y)=1+\ln y/8,\ y\in(e^{-8};1]$;
г) $f_4(y)=e^{-y}/12,\ y>-\ln 12$
11.6. а) $g_1(y)=1/(\pi\sqrt{1-y^2}),\ \ y\in(-1;1)$;
б) $g_2(y)=2/(\pi\sqrt{1-y^2}),\ \ y\in\ (0;1)$;
в) $g_3(y)=2/(\pi\sqrt{1-y^2}),\ y\in\ (0;1)$
11.7. а) $10\,ye^{-5y^2},\ y\geqslant\ 0$;
б) $5e^{-5\sqrt{y}}/(2\sqrt{y}),\ \ y>0$;
в) $5\,e^{-5y},\ \ y>\ 1;\ 5\,e^{-5\sqrt{y}}/(2\sqrt{y}),\ \ y\in(0;1]$;
г) $e^{2-y},\ y>2$;
д) $5/2\,y\,e^{-5/4y^2},\ y\leqslant 0$
11.8. $g(s)=1/(2\pi\sigma^2)\cdot\exp(-s/(2\pi\sigma^2));\ s>\ 0$
11.9. $M[Y]=\lambda/(\lambda+1);\ \ D[Y]=\lambda/(\lambda+2)(\lambda+1)^2$
11.10. $M[\eta]=8;\ \ D[\eta]=51,2$
11.12. $e^{-y/2}/\sqrt{2\pi y},\ y>0$
11.13. $F(x)=1/2+\Phi(\frac{x+13}{5});\ 0,3674$
11.14. 0,1525

12. Примеры решения задач

Пример 1. В рыбном отделе супермаркета в аквариуме находится 16 рыб (6 осетров и 10 карпов). Сколькими способами можно наугад выбрать а) две разные рыбы; б) две одинаковые рыбы; в) три осетра?

Решение. а) Для выбора осетра возможно 6 вариантов, для выбора карпа — 10 вариантов. По правилу умножения две разные рыбы можно выбрать $6 \cdot 10 = 60$ числом способов.
б) Два осетра можно выбрать $C_6^2 = 15$ числом способов. Два карпа можно выбрать $C_{10}^2 = 45$ числом способов. По правилу сложения две одинаковые рыбы можно выбрать $15 + 45 = 60$ числом способов.
в) Три осетра можно выбрать $C_6^3 = 20$ числом способов.

Пример 2. Два спортсмена независимо друг от друга бросают мяч в баскетбольную корзину. Пусть событие A=\{первый спортсмен попал в корзину\}, B=\{второй спортсмен попал в корзину\}. Выразить через события A и B следующие события: A_1=\{только один спортсмен попал в корзину\}; A_2=\{в корзину попали оба спортсмена\}; A_3=\{никто не попал в корзину\}.

Решение. Воспользуемся действиями над событиями. Напомним, что при умножении событий используется логический союз **и**, а при сложении — **или**.
$A_1 = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A}$ (буквально «первый попал **и** второй не попал» **или** «второй попал **и** первый не попал»);
$A_2 = A \cdot B$ («первый попал **и** второй попал»);
$A_3 = \overline{A} \cdot \overline{B}$ («первый не попал **и** второй не попал»).

Пример 3. Пусть механическая система состоит из r частиц, которые находятся в фазовом пространстве, разбитом на n ячеек (n состояний). Найти вероятность того, что рассматриваемые r частиц распределятся в *заданных* r ячейках из числа возможных n ячеек.

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Также при решении этой задачи важно понимать как именно распределяются частицы по ячейкам (состояниям). Рассмотрим три варианта, принятых в статистической физике.
1) В классической статистике Максвелла-Больцмана частицы считаются различимыми, т.е. каждой из них присваивается свой номер, при этом, в силу

их тождественности, они с одинаковой вероятностью попадают в любую из n ячеек. Таким образом, число равновозможных состояний (число всевозможных исходов) равно n^r. Число благоприятных исходов — $r!$ В этом случае искомая вероятность

$$P_n(r) = \frac{r!}{n^r}.$$

2) В статистике Бозе-Эйнштейна предполагается, что частицы абсолютно неразличимы, причем все возможные их распределения по ячейкам равновероятны. Число равновозможных состояний определяется числом сочетаний с повторениямии. Искомая вероятность равна при этом

$$P_n(r) = \frac{1}{C_{n+r-1}^r}.$$

3) В статистике Ферми-Дирака частицы также абсолютно не различимы, однако в отличие от предыдущего случая их число должно быть не больше числа ячеек ($r \leqslant n$), а каждая ячейка может содержать не более одной частицы. Тогда искомая вероятность равна

$$P_n(r) = \frac{1}{C_n^r}.$$

Пример 4. Среди определенной группы людей вероятность заболевания $\mathcal{N}$ равна 0,02. Тест, выявляющий болезнь, несовершенен. Если человек болен, то тест показывает положительный результат в 97 случаях из 100. Если же человек здоров, то тест дает положительный результат в 1 случае из 100 (ложноположительный результат). Найти вероятность того, что человек, получивший положительный результат, действительно болен $\mathcal{N}$.

Решение. При решении задачи воспользуемся формулой полной вероятности и формулой Байеса.

Введем событие $A =${получен положительный результат теста} и гипотезы: $H_1 =${человек болен $\mathcal{N}$}, $H_2 =${человек здоров}.

$$P(H_1) = 0,02;\ P(H_2) = 0,98;\ P(A/H_1) = 0,97;\ P(A/H_2) = 0,01.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = 0,02 \cdot 0,97 + 0,98 \cdot 0,01 = 0,0292.$$

Тогда по формуле Байеса апостериорная вероятность гипотезы H_1 равна

$$P(H_1/A) = \frac{0,02 \cdot 0,97}{0,0292} \approx 0,664.$$

Пример 5. Игральная кость подбрасывается 15 раз. Найти вероятности событий $A =${выпадет ровно десять троек}; $B =${выпадет не менее двух троек} и $C =${выпадет десять троек и две единицы}.

Решение. Пусть m — число выпадений тройки в серии из 15 испытаний (число успехов). Вероятность успеха $p = 1/6$; вероятность неуспеха $q = 5/6$. По формуле Бернулли

$$P(A) = P_{15}(m = 10) = C_{15}^{10} \cdot (1/6)^{10} \cdot (5/6)^5 \approx 1,99 \cdot 10^{-5}.$$

$$P(B) = P_{15}(m \geqslant 2) = 1 - P_{15}(m < 2) = 1 - (P_{15}(0) + P_{15}(1)) = \\ = 1 - C_{15}^0 \cdot (1/6)^0 \cdot (5/6)^{15} - C_{15}^1 \cdot (1/6)^1 \cdot (5/6)^{14} \approx 0,792.$$

Для нахождения вероятности события C воспользуемся полиномиальной формулой.

$$P(C) = P_{15}(10; 2; 3) = \frac{15!}{10!\ 2!\ 5!}(1/6)^{10}(1/6)^2(4/6)^3 \approx 2 \cdot 10^{-7}.$$

Пример 6. На некотором производстве вероятность того, что изделие окажется нестандартным, равна 0,01.

1. Найти вероятность того, что в партии из 1000 изделий относительная частота нестандартных изделий отклонится от вероятности нестандартного изделия не более, чем на 0,001.
2. Какой величины должна быть партия изделий, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что относительная частота нестандартного изделия отклонится от вероятности 0,01 не более, чем на 0,002?
3. Определить границу отклонения частоты от вероятности, которую можно гарантировать с вероятностью 0,985 при объеме партии $n = 1600$ изделий.

Решение.

1. Воспользуемся следствием интегральной теоремы Муавра-Лапласа (так называемой формулой «отклонения частоты от вероятности»).

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0,001\right) = 2\,\Phi\left(0,001 \cdot \sqrt{\frac{1000}{0,01 \cdot 0,99}}\right) = \\ = 2\,\Phi(0,3178) = 2 \cdot 0,1255 = 0,251.$$

2.
$$0,9 = 2\,\Phi\left(0,002 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,01 \cdot 0,99}}\right) \Rightarrow \Phi(x) = 0,45.$$
Отсюда находим по таблице $x = 1,64$. Следовательно,
$$0,002 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,01 \cdot 0,99}} = 1,64 \Rightarrow n = 6657.$$

3. Теперь требуется найти величину ε.
$$0,985 = 2\,\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1600}{0,01 \cdot 0,99}}\right).$$
Отсюда следует, что $\Phi(x) = 0,4925 \Rightarrow x = 2,41 \Rightarrow$
$$\varepsilon = 2.41 : \sqrt{\frac{1600}{0,01 \cdot 0,99}} = 0,0059948.$$

Замечание. При решении примера производились округления в промежуточных вычислениях.

Пример 7. У стрелка имеется три патрона. Он стреляет по мишени до первого попадания или пока не закончатся патроны. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Составить ряд распределения числа израсходованных патронов. Вычислить среднее значение числа израсходованных патронов.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ — число израсходованных патронов. Она принимает значения 1, 2 и 3. Вычислим вероятности этих значений. Пусть событие A={попадание при одном выстреле};
$P(A) = 0,8;\ P(\overline{A}) = 0,2.$

Тогда
$$p_1 = P(\xi = 1) = P(A) = 0,8;$$
$$p_2 = P(\xi = 2) = P\left(\overline{A} \cdot A\right) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16;$$
$$p_3 = P(\xi = 3) = P\left(\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A}\right) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,2^3 = 0,04.$$
Ряд распределения случайной величины имеет вид

ξ	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

Найдем математическое ожидание (среднее значение) случайной величины ξ.
$$M[\xi] = 1 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,04 = 1,24.$$

Пример 8. Случайная величина ξ в интервале $(0, \pi)$ задана плотностью вероятности $f(x) = A\sin x$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр A и дисперсию случайной величины $\eta = \xi + 2$.

Решение. Из условия нормированности (это одно из свойств плотности вероятности) получаем, что $A\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = 1$. Отсюда $-A\cos x|_0^\pi = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

По свойствам дисперсии

$$D[\eta] = D[\xi + 2] = D[\xi] = M\left[\xi^2\right] - M^2\left[\xi\right].$$

$$M[\xi] = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\left(x\cos x|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \cos x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\pi - \sin x|_0^\pi\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$D[\xi] = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x^2\sin x\,dx - \frac{\pi^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x|_0^\pi\right) - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

Пример 9. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины ξ равны соответственно 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(15, 25)$.

Решение. Воспользуемся формулой нахождения вероятности попадания значений случайной величины в интервал. Для нормального распределения имеем

$$P(15 < \xi < 25) = \Phi\left(\frac{25-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{5}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) = 2\Phi(1) = 2\cdot 0,3413 = 0,6826.$$

Замечание. Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$ есть в Приложениях.

Пример 10. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале $(0, 32)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sqrt[5]{\xi}$.

Решение. Плотность вероятности случайной величины ξ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32}, \ x \in (0, 32) \\ 0, \ x \notin (0, 32). \end{cases}$$

Плотность вероятности η найдем по формуле

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|.$$

$$\varphi(x) = \sqrt[5]{x} = y \Rightarrow x = y^5 \Rightarrow \psi(y) = y^5, \ \psi'(y) = 5y^4, \ y \in (0, 2).$$

Искомая плотность вероятности

$$g(y) = \begin{cases} \frac{5}{32} y^4, \ y \in (0, 2) \\ 0, \ y \notin (0, 2). \end{cases}$$

13. Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. На отрезке $[0;1]$ независимо друг от друга наудачу выбираются две точки. Найти вероятность событий: A={разность координат первой и второй точек меньше 0,5}, B={сумма координат точек больше удвоенного произведения координат}.

2. Стержень длиной 1 м ломается случайным образом в двух точках. Какова вероятность того, что хотя бы одна из получившихся частей будет не более 10 см?

Вариант 2

1. Отрезок длины L ломается наугад в двух взятых точках. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно построить треугольник.

2. На верхней полуокружности радиуса R наугад берется точка. Затем через эту точку проводится хорда, перпендикулярная горизонтальному диаметру. Найти вероятность того, что длина хорды не превосходит R.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. В ящике 6 катушек белых, 4 катушки черных и 2 катушки красных ниток. Катушки извлекают по одной без возвращения. Найти вероятность того, что катушка с белыми нитками появится раньше, чем катушка с черными нитками.

2. В левом кармане находятся 5 монет достоинством 1 рубль и 4 монеты по 2 рубля. В правом кармане 6 монет по 2 рубля и 2 монеты по 1 рублю. Из левого кармана в правый наугад перекладываю две монеты. Затем из правого извлекают одну монету. Какова вероятность того, что это монета достоинством 2 рубля?

3. Имеется три партии деталей по 20 штук в каждой. Число стандартных деталей в каждой из них равно 20, 15 и 10 соответственно. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали извлечены из третьей партии.

Вариант 2

1. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что он наберет нужный номер не более чем за три попытки.

2. При обследовании больного имеется подозрение на одно из заболеваний H_1 и H_2. Их вероятности равны 0,6 и 0,4 соответственно. Для уточнения диагноза назначается анализ, результатом которого является положительная или отрицательная реакция. В случае болезни H_1 вероятность положительной реакции равна 0,9, отрицательной $-$ 0,1, а в случае болезни H_2 положительная и отрицательная реакции равновероятны. Анализ провели дважды, и оба раза реакция оказалась положительной. Требуется найти вероятность каждого заболевания после проделанных анализов.

3. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2; для второго – 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины ξ :

ξ	-2	-1	1	2	3
P	0,2	0,25	0,3	0,15	0,1

.

Построить ряд распределения случайных величин: а) $\eta = 2\,\xi$; б) $\eta = \xi^2 - \xi$. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Вычислить $M[\xi]$, $D[\xi]$, $P(0 < \xi \leqslant 3)$.

2. Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найти математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов, считая, что стрелять можно неограниченное число раз.

3. Найти функцию распределения и числовые характеристики случайной величины ξ, имеющей плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 1/(\pi\sqrt{1-x^2}), & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Построить ряд распределения числа попаданий в ворота при трех одиннадцатиметровых ударах, если вероятность попадания при одном ударе равна 0,7.

2. В урне четыре белых и три черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Построить ряд и многоугольник распределения дискретной случайной величины ξ — числа извлеченных шаров.

3. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\pi/6, \\ a \sin\left(x + \pi/6 + b\right), & \text{если } -\pi/6 < x < \pi/3, \\ 1, & \text{если } x \geqslant \pi/3. \end{cases}$$

Вычислить коэффициенты a и b, $P(0 < \xi < \pi/2)$. Указать вид $f(x)$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Пусть $\xi \in \mathcal{N}(5\,;0,5)$. Найти вероятность того, что в серии из 5 независимых испытаний хотя бы в двух из них ξ примет значения из интервала $(2;4)$.

2. Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид: $f(x) = \cos x$ в интервале $(0;\pi/2)$; $f(x) = 0$ вне этого интервала. Найти плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^3$.

3. Случайная величина $\xi \in Exp(\lambda)$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta = 3\sqrt{\xi^4 + 1}$.

Вариант 2

1. Случайная величина $\xi \in \mathcal{N}(1\,;2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \operatorname{arctg} 2\,\xi$.

2. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0;\pi/4]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sin 2\,\xi$; вычислить ее числовые характеристики.

3. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a. Максимальное значение плотности вероятности равно $1/\left(3\sqrt{7\pi}\right)$. Вычислить $P(|\xi - a| < 40)$.

14. Проверочные тесты

Полученные ответы необходимо округлить до третьего знака после запятой по правилам округления, например

$$0,12345 \approx 0,123; \ 0,12354 \approx 0,124.$$

Тест № 1. Комбинаторика

1.1 Шесть пассажиров садятся в электричку, состоящей из десяти вагонов. Каждый пассажир выбирает вагон наудачу. Определить возможное число вариантов размещения пассажиров в электричке.
1.2 Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр $\{2,3,5,7\}$, если цифры не могут повторяться?
1.3 Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр $\{2,3,5,7\}$, если цифры могут повторяться?
1.4 Сколькими способами можно выбрать 3 карандаша из коробки, в которой находятся 12 карандашей?
1.5 Сколькими способами можно рассадить 5 человек за круглым столом?
1.6 Сколькими способами можно переставить буквы в слове АНАНАС?
1.7 В лифт 16-этажного дома на первом этаже вошли 4 человека. Сколькими способами они могут выйти на нужных этажах?
1.8 Группа из 10 студентов сдает устный экзамен. Сколькими способами может быть сформирован порядок отвечающих?
1.9 В урне 2 белых, 4 черных и 6 красных шаров. Сколькими способами можно извлечь из урны пять шаров, среди которых хотя бы один белый?
1.10 На полке стоят 8 книг. Сколько существует способов их расположения, при которых 3 заранее помеченные книги окажутся рядом?

Тест № 2. Вероятность

2.1 В урне 6 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимают три шара. Какова вероятность того, что они белые?

2.2 В урне 6 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что они разного цвета?

2.3 В урне 6 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что они одного цвета?

2.4 Вероятность того, что студент сдаст первый и второй экзамен, равна 0,8 и 0,6 соответственно. Чему равна вероятность сдать оба экзамена?

2.5 Вероятность того, что студент сдаст первый и второй экзамен, равна 0,8 и 0,6 соответственно. Чему равна вероятность сдать один экзамен?

2.6 Из пяти карточек с буквами К,Б,В,Т,О наугад выбирают три и выкладывают на стол. Какова вероятность того, что получится слово «КОТ»?

2.7 Из шести карточек с буквами К,Б,В,К,Т,О наугад выбирают три и выкладывают на стол. Какова вероятность того, что получится слово «КОТ»?

2.8 Абонент забыл две последние цифры телефонного номера и набрал их наугад, помня лишь то, что они нечетны и различны. Какова вероятность того, что номер набран верно?

2.9 Самолет противника обнаруживается тремя локаторами с вероятностями 0,5; 0,7 и 0,9 соответственно. Какова вероятность обнаружения самолета хотя бы одним локатором?

2.10 Три автомата поставляют на конвейер детали в соотношении 2:3:5. Вероятности производства бракованной детали на этих автоматах равны 0,01; 0,02 и 0,05 соответственно. Какова вероятность подачи на конвейер годной детали?

Тест № 3. Схема Бернулли

3.1 Вычислить $P_5(3)$ при $p = 0,2$.

3.2 Вычислить $P_5(3 \leqslant m \leqslant 4)$ при $p = 0,2$.

3.3 Вычислить $P_{200}(3)$ при $p = 0,2$.

3.4 Вычислить $P_{200}(2 \leqslant m \leqslant 200)$ при $p = 0,2$.

3.5 Вычислить $P_{200}(50 \leqslant m \leqslant 65)$ при $p = 0,2$.

3.6 Вычислить $P_{800}(10)$ при $p = 0,02$.

3.7 Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 300 выстрелах мишень будет поражена не менее 40 раз.

3.8 Вероятность опечатки на одной странице текста равна 0,001. Найти вероятность того, что в тексте из 1400 страниц будет не более трех опечаток.

3.9 Вероятность угадать правильный ответ на вопрос в тесте равна 0,2. Найти вероятность успешной сдачи теста (ответ выбирается наугад), если для этого необходимо правильно ответить на 40% вопросов из 20 предложенных. В свою очередь, 20 вопросов теста случайно выбираются из базы, состоящей из 600 вопросов.

3.10 При сдаче экзамена на право управления автомобилем необходимо правильно ответить как минимум на 38 вопросов из 40 предложенных. На выбор в каждом вопросе предлагается 4 варианта ответа, из которых только один правильный. Найти вероятность успешного прохождения теста, если ответы выбираются наугад.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Задачи по теории вероятностей. Часть 1: методические указания / Г. М. Безлудный, В. А. Знаменский, Н. В. Коваленко, В. Е. Ковальчук−РГУ, Ростов-на-Дону, 2002.−URL: http://docs.yandex.ru/docs/view?tm=1641490744&tld=ru&lang=ru&name=rsu129.pdf&text =безлюдный (дата обращения 20.03.2020)

2. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров.− М.: Высшая школа, 2000.−658 с.−ISBN 978-5-4365-1927-2

3. Голикова, Е. А. Элементы теории вероятностей: учеб. пособие / Е. А. Голикова.− Екатеринбург: УрФУ, 2012.−129 с.−ISBN 978-5-321-02152-1

4. Горяинов, В. Т. Статистическая радиотехника: примеры и задачи: учеб. пособие / В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов; под ред. В. И. Тихонова−М: Советское радио, 1980.−543 с.−ISBN 978-5-458-37876-5

5. Сборник задач по математике для втузов: учеб. пособие для втузов / под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова−М.: Физматлит, 2004.−URL: http://obuchalka.org/20180627101462/sbornik-zadach-po-matematike-dlya-vtuzov-chast-1-efimov-a-v-pospelova-a-s-2001.html (дата обращения 21.04.2021)

6. Ивановский, Р. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad: учеб. пособие / Р. И. Ивановский.−СПб.: БХВ-Петербург, 2008.−URL:http://s.11klasov.net/7825-teorija-verojatnostej-i-matematicheskaja-statistika-ivanovskij-ri.html (дата обращения 05.01.2022)

7. Катальников, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. В. Катальников, Ю.В. Шапарь−Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2014.−72 с.−ISBN 978-5-7996-1158-3

8. Кочетков, Е. С. Теория вероятностей в задачах и упражнениях: учеб. пособие / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская.−М.: Форум: Инфра-М, 2008.−481 с.−ISBN 978-5-91134-181-7

9. Краснов, М. Л. Вся высшая математика: учебник. Т. 5.−Изд. 2-е, исправл. / М. Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко.−М.: Эдиториал УРСС, 2002.−ISBN 978-5-382-02031-0

10. Крупин, В. Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями: учеб. пособие / В. Г. Крупин, А. Л. Павлов, Л. Г. Попов−М: Изд. дом МЭИ, 2013.−URL: http://kafvmsrv.mpei.ac.ru/MM/Тип_расч_вер.pdf (дата обращения 06.07.2019)

11. Михайлов, В. Е., Теория вероятностей в примерах и задачах. Часть 1. Комбинаторика. Случайные события и их вероятности: учеб. пособие / В. Е. Михайлов, Н. Н. Патронова, В. В. Тепляков−Архангельск: САФУ, 2013.−URL: http://av.disus.ru/metodichka/1949097-

1-ev-mihaylov-patronova-vvteplyakov-teoriya-veroyatnostey-primerah-zadachah-chast-kombinatorika-sluchaynie-sobitiya-veroyatnosti-arhangelsk.php (дата обращения 15.09.2020)

12. Сборник задач по высшей математике. 2 курс: учебное пособие / К. Н. Лунгу, В П. Норин, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко—М.: Айрис-пресс, 2004.—592 с.—ISBN 978-5-8112-6174-1

13. Павлов, С. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / С. В. Павлов – М.: РИОР, 2010.—186 с.—ISBN 978-5-369-00679-5

14. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный.— М.: Айрис-пресс, 2013.—287 с.—ISBN 978-5-8112-5097-4

15. Просветов, Г. И. Теория вероятностей и математическая статистика: задачи и решения: учеб.-практ. пособие. / Г. И. Просветов.—М.: Альфа-Пресс, 2009.—268 с.—ISBN 978-5-94280-418-3

16. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: учеб. пособие.— 3-е изд. перераб. / под общ. ред. А. А. Свешникова.—СПб.: Лань, 2007.—446 с.—ISBN: 978-5-8114-0708-8

17. Султанова, Р. А. Сборник задач по теории вероятностей: учеб. пособие. / сост. Р. А. Султанова.—Екатеринбург:Издательство Уральского университета, 2005.—96 с.

18. Тимофеева, Г. А. Теория вероятностей: сборник домашних заданий. / сост. Г. А. Тимофеева.—Екатеринбург:УГТУ-УПИ, 2007.—URL: http://study.urfu.ru/Aid/Umk/3791?partId=6 (дата обращения 14.11.2018)

В данном текстовом ресурсе приведены задачи, которые составили канд. физ.-мат. наук Д. В. Хлопин и канд. физ.-мат. наук Я. В. Салий.

Приложение 1

Таблица биномиальных коэффициентов $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

n \ m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	2	1	–	–	–	–	–	–	–	–
3	3	3	1	–	–	–	–	–	–	–
4	4	6	4	1	–	–	–	–	–	–
5	5	10	10	5	1	–	–	–	–	–
6	6	15	20	15	6	1	–	–	–	–
7	7	21	35	35	21	7	1	–	–	–
8	8	28	56	70	56	28	8	1	–	–
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1	–
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Приложение 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0978	0963	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 3

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2434	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	44441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	1719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
2,	0,4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4961
3,	0,4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	4999

Текстовый электронный образовательный ресурс

Шапарь Юлия Викторовна

СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧАСТЬ 1

Методическая разработка

Компьютерная верстка *Ю. В. Шапарь*

Рекомендовано Методическим советом УрФУ
протокол № от « » 2022
Электронный формат — pdf
Объем 4,3 уч.-изд.л.

620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
Информационный портал УрФУ
http://study.urfu.ru