Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Институт естественных наук и математики

И. В. МЕЛЬНИКОВА
В. А. БОВКУН

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

И. В. Мельникова, В. А. Бовкун

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета в качестве учебного пособия
для студентов вуза, обучающихся по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»,
по специальности 10.05.01 «Компьютерная безопасность»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2022

УДК 517.983(075.8)
ББК 22.162я73
М48

Рецензенты:
кафедра прикладной математики
Нижегородского государственного технического университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *А. А. Куркин*);
Н. И. Черных, доктор физико-математических наук, профессор
(Институт математики и механики УрО РАН)

Мельникова, И. В.

М48 Основы линейного функционального анализа : учебное пособие / И. В. Мельникова, В. А. Бовкун ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2022. — 184 с. : ил. — Библиогр.: с. 182–183. — 30 экз. — ISBN 978-5-7996-3484-1. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-7996-3484-1

В учебном пособии рассматриваются основные понятия, методы и приложения линейного функционального анализа. Теоретический материал сопровождается примерами, образцами решения некоторых задач и упражнениями для самостоятельного решения.

Для студентов, изучающих дисциплину «Функциональный анализ» в рамках модулей «Теория функций», «Функциональный анализ», Компьютерная и непрерывная математика».

УДК 517.983(075.8)
ББК 22.162я73

ISBN 978-5-7996-3484-1

Оглавление

Предисловие 5

Введение 7

Глава 1. Основные пространства 9

1.1. Метрические и линейные нормированные пространства . . . 9
1.2. Сравнение норм . . . 22
1.3. Полные пространства . . . 25
1.4. Сепарабельные пространства . . . 33
1.5. Евклидовы и гильбертовы пространства . . . 36
1.6. Некоторые вопросы теории приближений . . . 41
1.7. Ряды Фурье . . . 49
1.8. Принцип сжимающих отображений . . . 57
1.9. Пополнение пространств. Пространства Соболева . . . 65

Глава 2. Операторы 76

2.1. Линейные операторы. Пространство $L(X, Y)$ . . . 76
2.2. Первый принцип линейного анализа — принцип ограниченности . . . 86
2.3. Функционалы. Сопряженные пространства . . . 90
2.4. Второй принцип линейного анализа — принцип продолжимости . . . 97
2.5. Функционалы на пространстве $C[a, b]$ . . . 104
2.6. Сопряженные операторы . . . 109
2.7. Обратные операторы . . . 115
2.8. Спектр оператора. Резольвента . . . 121
2.9. Замкнутые операторы . . . 125
2.10. Третий принцип линейного анализа — принцип обратимости . . . 129
2.11. Компактные множества и компактные операторы . . . 134
2.12. Вполне непрерывные операторы . . . 145

2.13. Спектральные свойства вполне непрерывных операторов 150

Глава 3. Операторные уравнения **157**

3.1. Уравнения второго рода. Теория Фредгольма (Рисса — Шаудера) 157

3.2. Уравнения первого рода. Регуляризация некорректных задач 165

3.3. Дифференциально-операторные уравнения. Примеры 169

3.4. Корректность абстрактной задачи Коши 173

Библиографические ссылки **182**

Библиографический список **182**

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено главным образом линейному функциональному анализу. От других пособий по функциональному анализу предлагаемый курс отличает бóльшая прикладная направленность, в частности, большое число примеров, важных для приложений, и глава, посвященная решению операторных и дифференциально-операторных уравнений – дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами. Кратко логическое устройство курса отражает следующая схема:

$$\begin{array}{c}\boxed{\text{Пространства}}\\ \downarrow\\ \boxed{\text{Операторы}}\\ \downarrow\\ \boxed{\text{Операторные уравнения}}\end{array}$$

Наполнение этих глав можно видеть из оглавления. В главе «Основные пространства» рассматриваются различные свойства метрических и более подробно свойства линейных нормированных пространств, выделяются пространства со специальными свойствами. Это необходимо, чтобы вводить линейные операторы и изучать их свойства в зависимости от свойств пространств, в которых эти операторы определены. Освоение главы «Операторы» дает необходимый аппарат для исследования и решения операторных уравнений. «Операторные уравнения» являются заключительной главой данного курса, важной с точки зрения построения самых разных моделей, возникающих в прикладных задачах, и исследования их решений.

Курс соответствует базовой части учебной программы дисциплины «Функциональный анализ» по направлению подготовки «Математика», содержит все необходимые доказательства, за исключением тех немногих теорем, смысл которых вполне понятен из формулировки, а доказательство является слишком технически сложным.

Для студентов других специальностей, изучающих функциональный анализ, предложенный курс будет полезен без большей части доказательств, но с учетом примеров и дополнений, в которых мы старались объяснить суть и логику излагаемого материала.

Основная задача пособия состоит в том, чтобы помочь студентам овладеть аппаратом функционального анализа, научиться использовать его идеи и методы для постановки и решения конкретных задач. С этой целью в каждом параграфе наряду с основным материалом сформулированы вопросы и даны упражнения, выполнение которых позволит студенту закрепить и более глубоко усвоить излагаемый материал. Большое количество примеров, приведенных в пособии, с одной стороны, помогают понять основные свойства изучаемых объектов, с другой стороны, являются важными с точки зрения приложений функционального анализа в различных областях математики и естествознания.

При иллюстрировании учебного пособия использовались фоторепродукции с интернет-сайтов. Список источников приведен в конце пособия.

Введение

Функциональный анализ возник в результате взаимодействия и последующего обобщения на бесконечномерный случай идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры. Объектами изучения линейной алгебры, как вы помните, являются линейные пространства и заданные на них линейные отображения — матрицы. Основной объект математического анализа – отображения (функции) на множествах с заданным на них предельным переходом.

Основным объектом функционального анализа являются отображения (операторы) на бесконечномерных пространствах, в которых определена операция предельного перехода. Оказывается, что линейных операторов на бесконечномерных пространствах огромное многообразие, среди которых важные для построения различных моделей интегральные и дифференциальные операторы. Это многообразие линейных операторов со специфическими для них свойствами и методами решения операторных уравнений обусловило выделение линейного функционального анализа в отдельный раздел.

Функциональный анализ тесно связан не только с математическим анализом и алгеброй, он связан и обобщает методы практически всех курсов непрерывной математики, которые вы уже изучали или будете изучать. Например, задачи, возникающие в теории обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x''(t) + x(t) = \sigma(t)x(t) + f(t), \quad a < t < b, \quad x(a) = 1,\, x'(a) = 0,$$

приводят к решению интегральных уравнений

$$x(t) - \int_a^t \sin(t-s)\sigma(s)x(s)ds = \cos(t-a) + \int_a^t \sin(t-s)f(s)ds.$$

Среди интегральных уравнений выделяют уравнения первого и второго рода. Уравнение вида

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [a,b],$$

называют интегральным уравнением Фредгольма второго рода, уравнение вида

$$x(t) - \int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [a,b]$$

— интегральным уравнением Вольтерра второго рода, а уравнение вида

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t) \quad \left(\int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t)\right), \quad t \in [a,b]$$

— интегральным уравнением Фредгольма (Вольтерра) первого рода.

К решению интегральных уравнений приводят и многие краевые задачи математической физики. Благодаря изучению свойств операторов, мы покажем, что интегральные уравнения второго рода, как частный случай операторных уравнений второго рода $x - Ax = y$ с вполне непрерывными операторами A, порождают корректные задачи, а интегральные уравнения первого рода, как частный случай операторных уравнений первого рода $Ax = y$, порождают некорректные задачи.

Кроме техники интегральных уравнений, актуальные задачи математической физики требуют использования широкого круга операторных методов. По сути методы современной математической физики — это методы функционального анализа (см., например, [1]). Активного применения методов функционального анализа требуют и современные курсы теории вероятностей и случайных процессов. В последнее время это связано с потребностью учитывать случайные явления в физике, экономике, социальных и биосистемах. Утверждение «функциональный анализ — это язык непрерывной математики» подводит итог сказанному о роли функционального анализа.

Глава 1. Основные пространства

1.1. Метрические и линейные нормированные пространства

В настоящем курсе функционального анализа, в основном, линейного функционального анализа, мы будем использовать наиболее важные для приложений линейные нормированные пространства. Однако начнем курс с более общих, метрических пространств, где естественно определяется понятие окрестности, а значит, понятия сходимости, предельного элемента, открытых и замкнутых множеств, непрерывности отображений (операторов) и т. д.

Определение 1.1. *Метрическое пространство* — это пара (X, ρ), где X — некоторое непустое множество произвольной природы, отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, называемое расстоянием (метрикой), удовлетворяет следующим условиям (аксиомы метрики):

1) $\forall x, y \in X \Rightarrow \rho(x, y) \geq 0,$ при этом $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\forall x, y \in X \Rightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
3) $\forall x, y, z \in X \Rightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Замечание. Если из контекста ясно, о какой метрике (или какого сорта метрик) идет речь, то метрическое пространство обозначают одной буквой X – той же, что и множество.

Примеры

1. Множество $X = \mathbb{R}$ с хорошо известной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ образует метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho)$, которое обычно обозначают просто $\mathbb{R}$.

2. Обобщением предыдущего примера является метрическое пространство $(X,\ \rho(x, y) = |x - y|)$, где X — произвольное непустое подмножество $\mathbb{R}$.

3. $C[a,b] = (X,\rho)$, где X — множество всех функций[1] $x = x(t)$, $t \in [a;b]$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, а метрика определяется равенством

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

С другими примерами метрических пространств (МП) мы познакомимся при изучении линейных нормированных пространств (ЛНП) — важного частного случая метрических пространств.

В метрических пространствах оказывается возможным ввести понятие окрестности (ε-окрестности), позволяющее определить предельный переход и, как следствие, отображения со свойством непрерывности.

Определение 1.2. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство.

- *Открытым шаром* с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ называется множество

$$S_x^r = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}.$$

- *Замкнутым шаром* с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ называется множество

$$\overline{S}_x^r = \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}.$$

- Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре из X.

- *ε-окрестностью* точки $x \in X$ называется множество S_x^ε.

[1] Наряду с функциями, принимающими действительные значения, можно рассматривать комплекснозначные функции. Для наглядности мы по большей части рассматриваем действительнозначные функции.

- Множество $M \subset X$ называется *открытым*, если оно содержит любую точку с некоторой ε-окрестностью.

- Точка $x \in X$ называется *предельной* точкой множества $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит точку из M, отличную от x (содержит бесконечно много точек из M). Множество всех предельных точек для M будем обозначать M'.

- Множество $M \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Замыканием $\overline{M}$ множества M называется объединение $M \cup M'$.

Упражнение 1.1. *Докажите, что множество $M \subset X$ является замкнутым, если и только если оно является дополнением в X до некоторого открытого множества.*

Упражнение 1.2. *Докажите, что объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством. Докажите, что пересечение любого числа и объединение любого конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Упражнение 1.3. *Докажите, что замыкание является замкнутым множеством.*

Определение 1.3. Пусть в метрическом пространстве (X, ρ) задана последовательность точек $\{x_n\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$.

- Точка $x \in X$ называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ (обозначение $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

- Последовательность $\{x_n\}$ называют *сходящейся* в (X, ρ), если она имеет предел.

Упражнение 1.4. *Докажите, что для сходящейся последовательности предел определяется однозначно. Докажите, что сходящаяся последовательность является ограниченной.*

Определение 1.4. Пусть заданы метрические пространства (X, ρ_1) и (Y, ρ_2). Отображение $f : X \to Y$ (точнее, $f : X \supseteq D(f) \to R(f) \subseteq Y$) называется

- непрерывным в точке $x_0 \in D(f) \subseteq X$, если (непрерывность по Коши)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in D(f) \quad \rho_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon;$$

- непрерывным на множестве $M \subseteq D(f)$, если оно является непрерывным в каждой точке этого множества.

Упражнение 1.5. *Докажите, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in D(f)$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности точек $\{x_n\} \subset D(f)$, сходящейся к точке x_0 в пространстве (X, ρ_1), последовательность точек $\{f(x_n)\} \subset Y$ сходится к точке $f(x_0)$ в пространстве (Y, ρ_2) (непрерывность по Гейне).*

Теперь переходим к изучению линейных нормированных пространств. Как следует из названия, в этом случае исходное множество X должно быть линейным пространством над некоторым полем скаляров $\mathbb{P}$, в отличие от метрических пространств, где множество X является множеством произвольной природы. Свойство линейности X является необходимым для того, чтобы определить на нем линейные операторы — один из основных объектов курса функционального анализа. Отметим также, что в рамках курса в качестве поля $\mathbb{P}$ будет выступать поле действительных или комплексных чисел.

Определение 1.5. *Линейное нормированное пространство* над полем $\mathbb{P}$ — это пара $(X, \|\cdot\|)$, где X — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, отображение $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям (аксиомы нормы):

1) $\forall x \in X \Rightarrow \|x\| \geq 0$, при этом $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{P} \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (однородность нормы);
3) $\forall x, y \in X \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (аксиома треугольника).

Замечание. Линейные пространства, так же как и метрические, часто обозначают одной буквой — X.

Упражнение 1.6. *Докажите, что любое ЛНП является метрическим, если метрику определить с помощью равенства $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Является ли произвольное МП линейным нормированным, если положить $\|x\| = \rho(x, 0)$?*

Рассмотрим **примеры** ЛНП, которые будут играть важную роль на протяжении всего курса. В этих пространствах далее будут отрабатываться вводимые новые понятия и доказываться утверждения, теоремы. Поэтому для успешного освоения курса необходимо их знать.

1. Пространство $(\mathbb{R}^d, \|x\|_e)$ — линейное пространство векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$ с d вещественными координатами, евклидова норма на котором определяется равенством

$$\|x\|_e = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |\xi_k|^2}.$$

Проверка первых двух аксиом нормы не вызывает затруднений. Аксиома треугольника следует из неравенства Гельдера:

$$\|x + y\|_e^2 = \sum_{k=1}^{d} |\xi_k + \eta_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{d} |\xi_k|^2 + \sum_{k=1}^{d} |\eta_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{d} |\xi_k| \cdot |\eta_k| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{d} |\xi_k|^2 + \sum_{k=1}^{d} |\eta_k|^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{d} |\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{d} |\eta_k|^2} =$$
$$= (\|x\|_e + \|y\|_e)^2.$$

Отметим, что при оценках евклидовых норм обычно проще записывать оценки для квадратов норм.

Обсудим сходимость в этом пространстве. Пусть последовательность

$$\{x_n\}, \text{ где } x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots, \xi_d^n), \quad n \in \mathbb{N},$$

сходится к точке $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_d^0)$, т. е.

$$\|x_n - x_0\|_e^2 = \sum_{k=1}^{d} \left|\xi_k^n - \xi_k^0\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

В силу свойств предела числовой последовательности данное соотношение имеет место тогда и только тогда, когда

$$\xi_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_k^0, \quad k = 1, 2, \ldots, d.$$

Таким образом, сходимость последовательности в пространстве $(\mathbb{R}^d, \|x\|_e)$ равносильна покоординатной сходимости.

Также можно рассматривать векторы $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$ с комплексными координатами. В этом случае норма вместо абсолютных величин определяется через модули, а полученное пространство обозначается $(\mathbb{C}^d, \|x\|_e)$. В примерах для наглядности мы ограничимся векторами с вещественными координатами.

2. Пространство $(\mathbb{R}^d, \|x\|_m)$ — линейное пространство векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$ с d вещественными координатами, норма на котором определяется равенством

$$\|x\|_m = \max_{1\le k\le d} |\xi_k|.$$

3. Пространство $(\mathbb{R}^d, \|x\|_s)$ — линейное пространство векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$ с d вещественными координатами, норма на котором определяется равенством

$$\|x\|_s = \sum_{k=1}^{d} |\xi_k|.$$

Покажем, как геометрически выглядят шары в $\mathbb{R}^2$ с тремя введенными нормами (рис. 1—3).

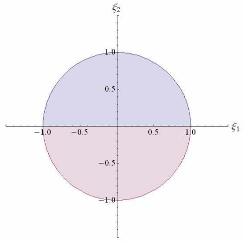


Рис. 1. Шар S_0^1 в пространстве $(\mathbb{R}^2, \|x\|_e)$

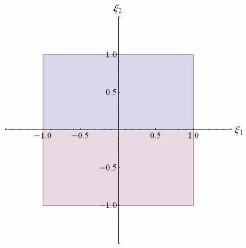


Рис. 2. Шар S_0^1 в пространстве $(\mathbb{R}^2, \|x\|_m)$

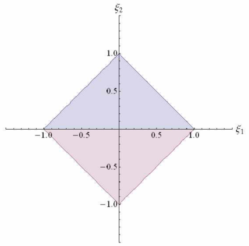


Рис. 3. Шар S_0^1 в пространстве $(\mathbb{R}^2, \|x\|_s)$

Упражнение 1.7. *Опишите открытые и замкнутые множества, сходимость в пространствах* $(\mathbb{R}^2, \|x\|_m), (\mathbb{R}^2, \|x\|_s)$.

Теперь рассмотрим бесконечномерные аналоги этих пространств.

4. Пространство m — линейное пространство ограниченных последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ вещественных (комплексных) чисел, норма на котором определяется равенством

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|.$$

Проверка аксиом нормы не вызывает затруднений. Обсудим сходимость последовательности в этом пространстве. Пусть последовательность

$$\{x_n\}, \text{ где } x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_k^n, \dots), \quad n \in \mathbb{N},$$

сходится к точке $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_k^0, \dots) \in m$, т. е.

$$\|x_n - x_0\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left|\xi_k^n - \xi_k^0\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Из этого факта следует утверждение:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\xi_k^n - \xi_k^0\right| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0 равномерно по координатам. Проверка обратной импликации не вызывает затруднений. Таким образом, сходимость последовательности в пространстве m равносильна равномерной покоординатной сходимости.

5. Пространство c — линейное пространство сходящихся последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ вещественных (комплексных) чисел, норма на котором определяется равенством

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|.$$

6. Пространство c_0 — линейное пространство сходящихся к нулю последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ вещественных (комплексных) чисел, норма на котором определяется равенством

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| = \max_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|.$$

Упражнение 1.8. *Охарактеризуйте сходимость последовательностей в пространствах c и c_0.*

7. Пространство l_1 — линейное пространство последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ вещественных (комплексных) чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$, норма на котором определяется равенством

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|.$$

Сходимость в этом пространстве называется сходимостью в среднем.

8. Пространство l_2 — линейное пространство последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ вещественных (комплексных) чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$, норма на котором определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2}.$$

Сходимость в этом пространстве называется сходимостью в среднем квадратичном.

9. Пространство $l_p, p \geq 1$ — линейное пространство последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ вещественных (комплексных) чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$, норма на котором определяется равенством

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

10. Пространство $C[a,b]$ — линейное пространство функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Упражнение 1.9. *Опишите шар S_f^1 с разными f, в частности:*

а) в пространстве $C[-1,1]$, если $f(t) = t^2$;

б) в пространстве $C[0,\pi]$, если $f(t) = \sin t$.

11. Пространство $C(\mathbb{R})$ — линейное пространство функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, ограниченных $(\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < \infty)$ и непрерывных на $\mathbb{R}$, с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

12. Пространство $C^k[a,b]$ — линейное пространство функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, непрерывно дифференцируемых k раз на

отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \sup_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t)| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t)| < \infty.$$

Упражнение 1.10. *Охарактеризуйте сходимость последовательностей в пространствах $C[a, b]$, $C(\mathbb{R})$ и $C^k[a, b]$.*

13. Пространство $L_1[a, b] = L[a, b]$ — линейное пространство измеримых по Лебегу функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\int_a^b |x(t)|dt < +\infty$, с нормой

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|dt.$$

14. Пространство $L_2[a, b]$ — линейное пространство измеримых по Лебегу функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\int_a^b |x(t)|^2dt < +\infty$, с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2dt}.$$

Упражнение 1.11. *Охарактеризуйте сходимость последовательности в пространствах $L_1[a, b]$ и $L_2[a, b]$.*

15. Пространство $L_p[a, b]$, $p \geq 1$ — линейное пространство измеримых по Лебегу функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty$, с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

16. Пространство $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ — линейное пространство измеримых по Лебегу функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt < +\infty$, с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Упражнение 1.12. *Приведите примеры сходящихся и расходящихся последовательностей в пространствах 4–16.*

Приведенные примеры иллюстрируют богатый запас линейных нормированных пространств (а следовательно, и метрических пространств). Однако в некоторых разделах функционального анализа, например, в теории обобщенных функций, возникает необходимость использовать пространства бесконечно дифференцируемых функций с равномерной сходимостью последовательности самих функций и производных всех порядков, которую не удается записать как сходимость по некоторой норме: по аналогии с пространством $C^k[a,b]$ ожидаемым кандидатом на норму в пространстве бесконечно дифференцируемых функций является ряд из максимумов модулей производных, который в общем случае расходится. В этом случае можно попытаться ввести «правильную» для этого пространства сходимость с помощью не одной нормы, а семейства норм. Таким образом, приходят к определению счетно-нормированных пространств. Для того, чтобы определить счетно-нормированные пространства, необходимо ввести понятие согласованных норм.

Определение 1.6. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные на линейном пространстве X, называются *согласованными*, если всякая последовательность $\{x_n\} \subset X$, фундаментальная[2] по каждой из этих норм и сходящаяся по одной из них к элементу $x \in X$, сходится к этому же элементу и по второй норме.

Определение 1.7. *Счетно-нормированным* пространством называется линейное пространство X, в котором задана счетная система согласованных между собой норм.

Важным примером счетно-нормированного пространства, возникающего в теории обобщенных функций, является пространство быстро убывающих функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ —

[2] Определение фундаментальной последовательности в нормированном пространстве будет сформулировано в параграфе 1.3.

функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ и стремящихся к нулю на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее, чем $1/|t|$ в любой степени, т. е.

$$t^k x^{(q)}(t) \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \forall q \in \mathbb{N}_0.$$

Счетная система норм в пространстве $\mathcal{S}$ определяется следующим образом:

$$\|x\|_n = \sup_{k,q\le n} \max_{t\in\mathbb{R}} |(1+|t|)^k x^{(q)}(t)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Другим, более общим, способом ввести требуемую сходимость на данном множестве является введение топологии. На этом пути возникают топологические пространства (ТП). Коротко приведем необходимые определения.

Определение 1.8. *Топологическим* пространством называется пара (X, τ), где X — произвольное непустое множество, τ — система подмножеств множества X (называемых открытыми), удовлетворяющая условиям:

1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$;

2) объединение любого числа и пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

Топологические пространства являются обобщением МП с точки зрения понятия сходимости (непрерывности). В МП понятие предельной точки вводится с помощью окрестности, что, по сути, эквивалентно понятию открытого множества. В свою очередь, окрестность определяется через метрику. В определении ТП фиксируется система τ — набор подмножеств, каждое из которых по определению называется открытым. Таким образом, фактически определяется набор окрестностей, с помощью которых вводится понятие сходимости. Несмотря на то, что по определению ТП понятие системы τ первично, в некоторых пространствах сначала описывается характер сходимости последовательности элементов и только после этого, если нужно, определяется согласованная с этим типом сходимости система окрестностей.

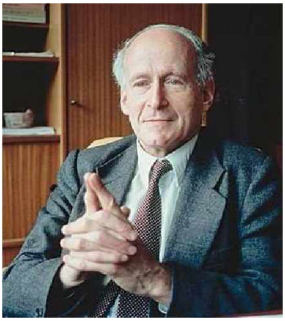
Важным примером топологического пространства является пространство $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$, называемое пространством Лорана Шварца, которое состоит из всех финитных[3] бесконечно дифференцируемых функций. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$ сходится к элементу $x \in \mathcal{D}$, если выполняются условия:

1) существует интервал, вне которого все x_n равны нулю;

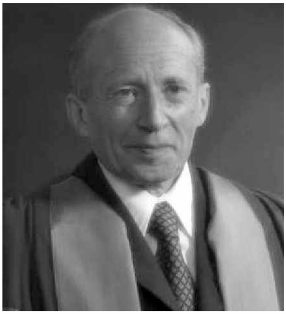
2) для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $x_n^{(k)}$ сходится равномерно на этом интервале к $x^{(k)}$.

Топологию (систему τ), порождающую указанный вид сходимости в $\mathcal{D}$, можно задать с помощью системы окрестностей нуля. Каждая окрестность нуля определяется конечным набором непрерывных положительных функций $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_k$ и состоит из всех элементов $x \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих условиям

$$|x(t)| < \gamma_0(t), \ |x'(t)| < \gamma_1(t), ..., |x^{(k)}(t)| < \gamma_k(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Лоран-Моиз Шварц (5.03.1915 – 4.07.2002)



Израиль Моисеевич Гельфанд (2.09.1913 – 5.10.2009)

Более общие топологические пространства, связанные с теорией обобщенных функций, были введены и подробно изучены в научной школе И. М. Гельфанда.

[3] Функция $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется финитной, если она обращается в нуль вне некоторого ограниченного интервала.

1.2. Сравнение норм

На одном и том же множестве можно задавать разные метрики, а на одном и том же линейном пространстве (ЛП) можно задавать разные нормы. Рассмотрим, как можно сравнивать разные нормы, заданные на одном ЛП.

Определение 1.9. Пусть задано ЛП X и на нем заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Эти нормы называются *эквивалентными*, если

$$\exists\ \alpha, \beta > 0 : \quad \forall x \in X \ \Rightarrow \ \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1. \tag{1}$$

Упражнение 1.13. *Докажите, что на множестве норм, заданных на ЛП, понятие эквивалентных норм задает отношение эквивалентности, т. е. это отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.*

Если в условии (1) выполняется левое неравенство, то говорят, что норма $\|x\|_1$ *подчинена* норме $\|x\|_2$ (или, что норма $\|x\|_2$ *не слабее* нормы $\|x\|_1$).

Если в условии (1) выполняется левое неравенство, но не выполняется правое, то норма $\|x\|_2$ *сильнее* нормы $\|x\|_1$.

Вопрос. *Что можно сказать о сходимости в пространствах* $(X, \|x\|_1)$, $(X, \|x\|_2)$, *если нормы эквивалентны? Если одна норма подчинена другой?*

В качестве **примера** сравним на линейном пространстве X, суммируемых с квадратом последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, нормы

$$\|x\|_1 = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2}.$$

Со второй нормой это пространство, как вы помните, называется l_2. Поскольку для любого натурального k справедливо неравенство $|\xi_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2}$, то имеем оценку

$$\|x_1\| \leq \|x_2\|, \quad \forall x \in X,$$

т. е. норма $\|\cdot\|_1$ подчинена норме $\|\cdot\|_2$. Покажем, что вторая норма сильнее. Для этого достаточно найти последовательность $\{x_n\} \subset X$, которая сходится по первой норме, но не сходится по второй. Возьмем последовательность $\{x_n\}$, определенную следующим образом:

$$x_n = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, 0, \dots\Bigg), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Данная последовательность покоординатно сходится к элементу $x_0 = (0, \dots) \in X$. Более того, в силу соотношения

$$\|x_n - x_0\|_1 = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k - \xi_0| = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

эта последовательность сходится к x_0 по первой норме. Однако из соотношения

$$\|x_n - x_0\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_0|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

следует, что сходимости по второй норме нет. Таким образом, норма $\|\cdot\|_2$ сильнее нормы $\|\cdot\|_1$.

Упражнение 1.14. *Сравните на пространстве $C[a,b]$ нормы*

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Упражнение 1.15. *Сравните на пространстве $L_p[a,b]$ нормы*

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Вопрос. *На каком ЛП можно определить нормы*

$$\|x\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}?$$

Можно ли их сравнить?

Теорема 1.1. В любом конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Доказательство. Зафиксируем базис $\{e_k\}_{k=1}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Пусть

$$x = \sum_{k=1}^d \xi_k e_k, \quad \|x\| = \left\|\sum_{k=1}^d \xi_k e_k\right\|.$$

Сравним эту норму с евклидовой нормой:

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^d \xi_k e_k\right\| \le \sum_{k=1}^d |\xi_k|\|e_k\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^d |\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^d \|e_k\|^2} =$$

$$= \beta\sqrt{\sum_{k=1}^d |\xi_k|^2} = \beta\|x\|_e,$$

где $\beta = \sqrt{\sum_{k=1}^d \|e_k\|^2}$. Таким образом, получили, что произвольная норма на $\mathbb{R}^d$ подчинена евклидовой.

Покажем, что евклидова норма подчинена произвольной норме. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \|x\|$ на множестве $S_1 = \{x : \|x\|_e = 1\}$ — единичной сфере радиуса 1 с центром в нуле. Эта числовая функция непрерывна в силу неравенств:

$$\big|\,\|x_1\| - \|x_2\|\,\big| \le \|x_1 - x_2\| \le \beta\|x_1 - x_2\|_e.$$

По известным свойствам непрерывных функций на ограниченном замкнутом множестве, на единичной сфере радиуса 1 непрерывная функция f достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Пусть

$$\alpha = f(x_0) = \|x_0\| = \inf\|x\|, \quad x_0 \in S_1.$$

Тогда
$$\left\|\frac{x}{\|x\|_e}\right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_e} \geq \alpha \;\Rightarrow\; \|x\| \geq \alpha\|x\|_e.$$
В итоге получили обе оценки, необходимые для эквивалентности норм:
$$\beta\|x\|_e \geq \|x\| \geq \alpha\|x\|_e. \quad \blacksquare$$

1.3. Полные пространства

Свойство полноты пространства $\mathbb{R}$, которое удобнее всего выражается с помощью критерия Коши, играет фундаментальную роль в курсе математического анализа. В этом параграфе мы переходим к обсуждению полноты в метрических и нормированных пространствах.

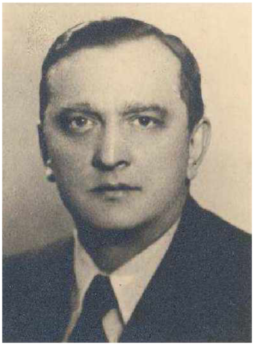
Определение 1.10. Пусть задано метрическое пространство X. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется фундаментальной (последовательностью Коши), если
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n, m > N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Упражнение 1.16. *Докажите, что фундаментальная последовательность в метрическом пространстве является ограниченной.*

Определение 1.11. Метрическое пространство X является *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится, т. е. выполняется критерий Коши.

Замечание. Поскольку ЛНП являются МП, то понятие полноты автоматически переносится и на ЛНП.

Полные ЛНП называются *банаховыми* пространствами в честь Стефана Банаха, внесшего важный вклад в развитие функционального анализа: в трех базовых теоремах, называемых принципами линейного анализа, есть имя Банаха.



Стефан Банах
(30.03.1892 – 31.08.1945)

Рассмотрим **примеры** полных и неполных пространств.

1. Пространство $\mathbb{R}^d$ с любой нормой (все нормы на $\mathbb{R}^d$ эквивалентны) является полным.

2. $C[a, b]$ — полное пространство. Данный факт следует из теоремы, доказываемой в курсе математического анализа, о том, что если последовательность непрерывных функций фундаментальна в смысле равномерной сходимости, то она равномерно сходится к непрерывной функции.

3. Важный пример неполного пространства. Рассмотрим пространство $\widetilde{L}[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций с интегральной нормой
$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx.$$
Зная геометрическую интерпретацию такого интеграла (площадь под кривой $y = |f(x)|$), можем построить последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций, сходящуюся к разрывной функции, скажем, к характеристической функции некоторого отрезка $[c, d]$, лежащего внутри $[a, b]$:
$$\chi_{[c,d]} := \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [c, d], \\ 0, & \text{если } x \notin [c, d]. \end{cases}$$

Можем построить последовательность кусочно-линейных функций, сходящуюся к $\chi_{[c,d]}$ по интегральной норме, а можем построить последовательность сверток (в параграфе 1.6 такие свертки рассмотрим более подробно). Однако возникает проблема: функция $\chi_{[c,d]}$ — разрывная функция, она не принадлежит пространству $\widetilde{L}[a,b]$. Чтобы доказать, что эта функция — единственный предел по интегральной норме построенной последовательности непрерывных функций (т. е. нет непрерывного предела), дополнительно рассмотрим $\overset{\approx}{L}[a,b]$ — пространство кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций с конечным числом разрывов первого рода и введем на нем интегральную норму. В этом пространстве построенная последовательность непрерывных функций сходится по норме к характеристической функции $\chi_{[c,d]}$, а предел в любом ЛНП единственный.

Упражнение 1.17. *Используя идею этого примера, постройте другие неполные пространства, выбирая на известных линейных пространствах «неродную» норму.*

4. Пространство l_p является полным. Для доказательства рассмотрим произвольную фундаментальную в l_p последовательность $\{x_n\}$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall m,n > N \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n - \xi_k^m|^p\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этого утверждения следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall m,n > N\ \forall M \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k^m|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p, \quad (2)$$

а также

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall m,n > N\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |\xi_k^n - \xi_k^m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Из (3) получаем, что для любого натурального k числовая последовательность $\{\xi_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной и, следовательно,

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \xi_k^0 :\ \xi_k^0 = \lim_{n\to\infty} \xi_k^n.$$

Таким образом, построена последовательность $x_0 = \{\xi_k^0\}$. Докажем, что $x_0 \in l_p$ и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 при $n \to \infty$ в l_p. Переходя в неравенстве (2) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N\ \forall M \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k^0|^p \le \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \qquad (4)$$

Тогда в силу неравенства Минковского для любого $M \in \mathbb{N}$ при $n > N$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^0|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k^0|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n|^p\right)^{1/p} \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n|^p\right)^{1/p},$$

т. е. $x_0 \in l_p$. Более того, из оценки (4) следует, что все частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n - \xi_k^0|^p$ ограничены, следовательно, этот ряд сходится и его сумма при $n > N$ меньше ε^p. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 при $n \to \infty$ в пространстве l_p.

Упражнение 1.18. *Докажите полноту пространств $L_p[a, b]$ и $L_p(\mathbb{R})$.*

Теперь сформулируем и докажем два критерия полноты пространств: принцип вложенных шаров в МП и критерий Коши для рядов в ЛНП.

Теорема 1.2 (принцип вложенных шаров). Для того, чтобы МП X было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

Доказательство для наглядности проведем для ЛНП, его нетрудно перенести на случай МП.

$\Rightarrow$ Пусть X — банахово пространство и пусть $\overline{S}_{x_1}^{r_1}$, $\overline{S}_{x_2}^{r_2}$, $\ldots$, $\overline{S}_{x_n}^{r_n}$, $\ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых r_n стремятся к нулю.

Последовательность $\{x_n\}$ — центров этих шаров — фундаментальна, так как радиусы стремятся к нулю. Следовательно, в полном пространстве X существует предел

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad x \in \bigcap_k \overline{S}_{x_k}^{r_k}.$$

$\Leftarrow$ Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Покажем, что она имеет предел. В силу фундаментальности последовательности можно выбрать такую точку x_{n_1}, что $\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2$ при всех $n \geq n_1$. Примем точку x_{n_1} за центр замкнутого шара радиуса 1. Обозначим этот шар S_1.

Далее выберем x_{n_2} с условием $n_2 > n_1$ и $\|x_n - x_{n_2}\| < 1/2^2$ при всех $n \geq n_2$. Примем точку x_{n_2} за центр замкнутого шара радиуса $1/2^2$. Обозначим этот шар S_2 и т. д.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. По предположению они имеют непустое пересечение. Пусть точка x лежит в этом пересечении. Тогда x — предельная точка для центров шаров x_{n_k}. Следовательно, точка x является предельной и для всей фундаментальной последовательности $\{x_n\}$. ■

Рассмотрим **пример**, показывающий, что условие стремления к нулю радиусов шаров в теореме о вложенных замкнутых шарах в МП является существенным. Пусть $X = \mathbb{N}$ и метрика определяется следующим образом:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y. \end{cases}$$

Рассмотрим в этом пространстве произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Тогда существует номер n_0 такой, что при любых $n, m > n_0$ верно неравенство $\rho(x_n, x_m) < 1$. В силу определения метрики из этого неравенства следует, что $x_n = x_{n_0}$ для любого $n \geq n_0$. То есть $\{x_n\}$ является стационарной, начиная с некоторого номера n_0 и, следовательно, сходится к элементу $x_{n_0} \in X$. Таким образом, в силу произвольности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространство (X, ρ) является полным. При этом последовательность вложенных замкнутых шаров $\overline{S}_n^{1+\frac{1}{2n}}$ имеет пустое пересечение. *Нарисуйте эти шары.*

Определение 1.12. Пусть в ЛНП X задана последовательность $\{u_k\}$. Ряд — это формальная сумма вида:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k,$$

где u_k называют общим членом ряда.

Определение 1.13. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *сходящимся* в X, если последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предел в X, который обозначают S и называют суммой ряда.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *абсолютно сходящимся* в X, если последовательность частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предел в $\mathbb{R}$.

Теорема 1.3 (критерий полноты ЛНП в терминах сходимости рядов). Для того, чтобы ЛНП X было банаховым, необходимо и достаточно, чтобы в нем любой абсолютно сходящийся ряд сходился.

Доказательство

$\Rightarrow$ Пусть ЛНП X является банаховым. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ абсолютно сходится. Тогда по критерию Коши для числовых рядов для нормы $\|S_{n+p}-S_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right\|$ имеем

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N:\,\forall n>N\,\forall p\in\mathbb{N}\;\Rightarrow\;\|S_{n+p}-S_n\|\le\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\|u_k\|\right\|<\varepsilon.$$

Значит, последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна, следовательно, в полном пространстве сходится.

$\Leftarrow$ Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Покажем, что она имеет предел в X.

Из фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить x_{n_1} так, чтобы $\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2$ для всех $n > n_1$. Далее, из фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить x_{n_2} $(n_2 > n_1)$ так, чтобы $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < 1/2$. Продолжая этот процесс, из фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ так, чтобы выполнялись неравенства $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < 1/2^k$.

Составим ряд:

$$S = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \ldots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \ldots$$

Этот ряд сходится абсолютно, так как мажорируется рядом $\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$. Тогда существует x, к которому сходится последовательность его частичных сумм S_n. Легко проверить, что $x_{n_k} = S_k$. Тогда $x_{n_k} \to x$ при $k \to \infty$. Следовательно, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. ■

С понятием ряда в банаховых пространствах тесно связано понятие базиса.

Определение 1.14. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Последовательность $\{e_k\} \subset X$ называется *базисом* в X, если для любого элемента $x \in X$ существует единственная последовательность чисел $\{\alpha_k\}$ такая, что имеет место представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k.$$

Упражнение 1.19. *Докажите, что последовательность* $\{e_k\}$, *где*

$$e_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots), \quad k \in \mathbb{N},$$

является базисом в пространстве l_p. *Будет ли данная последовательность базисом в пространстве* c_0? c? m?

Введем понятие множеств первой и второй категории и приведем еще одно свойство полных пространств.

Определение 1.15. Пусть задано МП X. Множество $M \subset X$ называется *плотным* во множестве $N \subset X$, если справедливо вложение $N \subseteq \overline{M}$.

Упражнение 1.20. *Докажите, что множество* M *плотно во множестве* N, *если и только если для любого положительного числа* ε *и для любого элемента* $x \in N$ *существует элемент* $y \in M$ *такой, что справедливо неравенство* $\|x - y\| < \varepsilon$.

Определение 1.16. Множество $M \subset X$ называется *всюду плотным* в МП X, если $\overline{M} = X$.

Определение 1.17. Множество $M \subset X$ называется *нигде не плотным* в МП X, если в каждом шаре содержится другой шар, не содержащий точек из M.

Упражнение 1.21. *Докажите, что дополнение к всюду плотному в МП* X *множеству является нигде не плотным.*

Определение 1.18. Множество в МП в X называется *множеством первой категории*, если оно есть счетное объединение нигде не плотных множеств. Если множество нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, то оно называется *множеством второй категории.*

Теорема 1.4 (Бэра — Хаусдорфа о категориях). Всякое полное метрическое пространство X, в частности банахово, является множеством второй категории.

Доказательство от противного: пусть X представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств:

$$X = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots$$

Возьмем какой-нибудь замкнутый шар S_1 в X. Поскольку M_1 нигде не плотно в X, существует замкнутый шар $S_2 \subset S_1$, не содержащий точек из M_1. Поскольку M_2 нигде не плотно в X, существует замкнутый шар $S_3 \subset S_2$, не содержащий точек из M_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность замкнутых шаров S_k такую, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо вложение $S_{k+1} \subset S_k$ и S_{k+1} не содержит точек из M_k.

Без потери общности можно считать, что радиусы r_k построенных шаров S_k стремятся к нулю при $k \to \infty$. Тогда последовательность вложенных замкнутых шаров S_k с радиусами, стремящимися к нулю, имеет общую точку x_0, принадлежащую пространству X.

С другой стороны, x_0 не принадлежит всем M_k, объединение которых равно X и, значит, не принадлежит X. ■

1.4. Сепарабельные пространства

Определение 1.19. Пространство (метрическое или линейное нормированное) называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Вопрос. *Почему такое свойство является важным, полезным?*

Рассмотрим **примеры** сепарабельных и несепарабельных пространств.

1. Пространство $\mathbb{R}^d$ с любой нормой (все нормы на $\mathbb{R}^d$ эквивалентны) является сепарабельным. В нем существует счетное всюду плотное множество, состоящее из векторов с рациональными координатами.

2. Пространства l_p тоже являются сепарабельными.

Упражнение 1.22. *Постройте в l_p счетное всюду плотное множество.*

3. Пространство $C[a,b]$ является сепарабельным. Докажем, что в этом пространстве счетным всюду плотным множеством является множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Для этого напомним известный результат о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции многочленами — аппроксимационную теорему Вейерштрасса.

Пусть функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $p_N(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ с действительными коэффициентами такой, что имеет место неравенство

$$\max_{t \in [a,b]} |p_N(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Для любого натурального числа N рассмотрим множество P_N всех многочленов с рациональными коэффициентами, степень которых не превышает N. Так как всякий многочлен однозначно определяется набором своих коэффициентов, то множество P_N равномощно множеству $\mathbb{Q}^{N+1}$, следовательно, является счетным. Тогда множество

$$P = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} P_N \subset C[a,b],$$

состоящее из всевозможных многочленов с рациональными коэффициентами, также является счетным. Докажем, что P является всюду плотным множеством в пространстве $C[a,b]$. Выберем произвольные элемент $x \in C[a,b]$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда по теореме Вейерштрасса найдется многочлен $p_N(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ с действительными коэффициентами такой, что $\|x - p_N\| < \varepsilon/2$. Далее, в силу равенства $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ для любого числа $k \in 0, ..., N$ существует рациональное число b_k такое, что выполнено неравенство $|a_k - b_k| < \delta(\varepsilon)$. Определим многочлен $\widetilde{p}_N(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k t^k$

и оценим расстояние

$$\|p_N - \widetilde{p}_N\| = \max_{t\in[a,b]} \left|\sum_{k=0}^{N}(a_k - b_k)t^k\right| \le \sum_{k=0}^{N} |a_k - b_k| \max_{t\in[a,b]} |t|^k <$$
$$< (N+1)\delta(\varepsilon)\left(\max\{1, |a|, |b|\}\right)^N .$$

Тогда для

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(N+1)\left(\max\{1, |a|, |b|\}\right)^N}$$

получаем оценку $\|p_N - \widetilde{p}_N\| < \varepsilon/2$. Следовательно, в силу неравенства треугольника справедливы оценки

$$\|x - \widetilde{p}_N\| \le \|x - p_N\| + \|p_N - \widetilde{p}_N\| < \varepsilon,$$

т. е. для произвольного элемента $x \in C[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ построен многочлен с рациональными коэффициентами $\widetilde{p}_N \in P$ такой, что $\|x - \widetilde{p}_N\| < \varepsilon$. Этот факт доказывает, что P всюду плотно в $C[a,b]$. В силу счетности множества P заключаем, что пространство $C[a,b]$ является сепарабельным.

4. Пространства $L_p[a,b]$. В этих пространствах счетным всюду плотным (по своей норме) множеством также является множество многочленов с рациональными коэффициентами.

5. Пример несепарабельного пространства: m — пространство ограниченных последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$.

Доказательство несепарабельности, которое мы проведем для пространства m, — это характерное доказательство несепарабельности метрических (нормированных) пространств.

Выберем в m последовательности, состоящие из разных наборов нулей и единиц. Обозначим множество выбранных последовательностей через M. Как вы знаете из курса математического анализа, такие последовательности являются двоичным представлением вещественных чисел, и, следовательно, множество M имеет мощность континуум.

Расстояние между разными точками из M равно единице. *Проверьте!* Если взять шары радиуса, скажем $1/4$, вокруг каждой точки из M, то шаров будет столько же, сколько точек, и они не пересекаются. Следовательно, не может существовать счетного множества, для которого все выбранные точки были бы предельными. Таким образом, не существует счетного всюду плотного множества в m.

Упражнение 1.23. *Докажите, что пространство $C(\mathbb{R})$ не является сепарабельным.*

Указание. По аналогии с доказательством несепарабельности пространства m рассмотрите множество M, состоящее из наборов непрерывных функций $x_k = x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, которые определяются следующим образом. На отрезке $[k, k+1]$ график функции x_k представляет собой боковые стороны равнобедренного треугольника, высота которого равна единице. Вне отрезка $[k, k+1]$ функция x_k тождественно равна нулю.

Вопрос. *Является ли сепарабельным пространство $C[0, \infty)$ функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, ограниченных и непрерывных на $[0, \infty)$, с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in [0,\infty)} |x(t)|$?*

1.5. Евклидовы и гильбертовы пространства

Определение 1.20. Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Скалярным произведением в X называется отображение $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям:

1. $\forall x \in X \Rightarrow (x, x) \geq 0,$ при этом $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x, y, z \in X \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ \Rightarrow \ (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
3. $\forall x, y \in X \ \Rightarrow \ (x, y) = \overline{(y, x)}$.

Определение 1.21. Линейное пространство с фиксированным на нем скалярным произведением называется *евклидовым* пространством.

Замечание. Линейное пространство над полем комплексных чисел и со скалярным произведением еще называют *унитарным.*

Утверждение 1.1. Пусть X — евклидово пространство. Тогда величина

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \qquad x \in X \tag{5}$$

задает норму на X.

Доказательство. Очевидно, что для любого элемента $x \in X$ выполнено неравенство $\|x\| \geq 0$, а равенство $\|x\| = 0$ равносильно равенству $(x,x) = 0$, которое в силу определения скалярного произведения равносильно равенству $x = 0$. Далее, для любых элемента $x \in X$ и числа $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha(x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{(\alpha x, x)}} =$$
$$= \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x,x)} = |\alpha|\|x\|.$$

Теперь докажем неравенство треугольника. Для этого покажем, что для любых элементов $x, y \in X$ справедливо неравенство Коши — Буняковского

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Действительно, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda\overline{(x,y)} + |\lambda|^2(y,y).$$

Заметим, что если $y = 0$, то неравенство Коши — Буняковского выполняется. Положим, что $y \neq 0$ и $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$. Тогда получаем

$$0 \leq (x,x) - 2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \ \Leftrightarrow \ |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y),$$

и, следовательно, неравенство Коши — Буняковского доказано. В силу этого неравенства для любых $x, y \in X$ получаем

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2Re(x,y) + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Таким образом, все аксиомы нормы выполнены. ■

Из этого утверждения следует, что в евклидовом пространстве всегда можно задать норму, связанную со скалярным произведением формулой (5). Эту норму называют нормой, порожденной скалярным произведением. Таким образом, евклидово пространство является ЛНП с нормой, порожденной скалярным произведением. В этом случае возникает естественный вопрос об обратной связи, точнее, каким дополнительным условиям должна удовлетворять норма в ЛНП для того, чтобы это пространство было евклидовым, т. е. данная норма порождалась некоторым скалярным произведением? Ответ на данный вопрос предоставляет следующий результат.

Утверждение 1.2. Для того, чтобы ЛНП X было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство параллелограмма:

$$\forall x, y \in X \Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказательство

$\Rightarrow$ Легко проверяется, если записать квадраты норм в равенстве параллелограмма через скалярные произведения:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \\ &= (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y) + \\ &+ (x,x) - (x,y) - \overline{(x,y)} + (y,y) = \\ &= 2(\|x\|^2 + \|x\|^2). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Проверку того, что при выполнении равенства параллелограмма скалярное произведение, согласующееся с нормой, задается следующим образом:

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

можно посмотреть в [3]. ■

В качестве **примера** рассмотрим пространство $C[0,1]$ и покажем, что данное пространство не является евклидовым. Для этого достаточно выбрать хотя бы одну пару элементов из пространства $C[0,1]$, для которой не выполняется равенство параллелограмма.

Напомним, что норма в $C[0,1]$ определяется равенством $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$. Выберем два элемента $x(t) = t$ и $y(t) = 1-t$. Очевидно, что $\|x\| = 1$ и $\|y\| = 1$. Далее,

$$\|x+y\| = \max_{t\in[0,1]} |t+1-t| = 1, \quad \|x-y\| = \max_{t\in[0,1]} |t-1+t| = 1.$$

В этом случае получаем, что

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \neq 4 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Следовательно, в силу утверждения 1.2 в пространстве $C[0,1]$ невозможно ввести скалярное произведение, которое порождало бы имеющуюся норму.

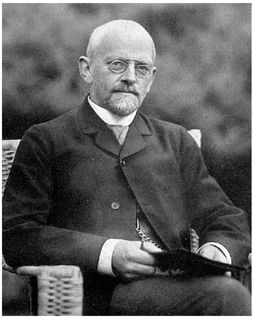
Упражнение 1.24. *Проверьте, являются ли евклидовыми пространства $L_2[a,b]$, $L_1[a,b]$.*

Определение 1.22. *Гильбертово* пространство — это полное сепарабельное пространство с нормой, порожденной скалярным произведеним:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Другими словами, гильбертово пространство — это полное евклидово сепарабельное пространство.

Обозначают произвольное гильбертово пространство обычно буквой H (от Hilbert). Гильбертовы пространства — это пространства, по своим свойствам наиболее близкие к конечномерным евклидовым пространствам. В этих пространствах многие результаты допускают геометрическую интерпретацию.



Давид Гильберт
(23.01.1862 – 14.02.1943)

Пример. Покажем, что пространство l_2 (над полем $\mathbb{R}$) является гильбертовым пространством. Напомним, что в l_2 норма элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ определяется равенством $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$. Для любых элементов $x, y \in l_2$ определим в этом пространстве скалярное произведение следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{6}$$

Данное определение корректно, так как ряд в правой части сходится в силу неравенства Гельдера

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2}$$

и выполняются все условия определения скалярного произведения. *Проверьте!* При этом норма, порождаемая скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$, совпадает с исходной нормой на этом пространстве. Следовательно, пространство l_2 с заданным на нем с помощью равенства (6) скалярным произведением является евклидовым. Ранее было доказано, что нормированное пространство l_p при любом $p \geq 1$ является полным и сепарабельным. Таким образом, пространство l_2 является гильбертовым.

Замечание. Аналогичным образом можно показать, что гильбертовым является линейное (над полем $\mathbb{C}$) пространство l_2 последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ с комплексными координатами $x_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, норма в котором определяется равенством $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$. В этом случае норма порождается скалярным произведением: $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \overline{y_k}$.

Упражнение 1.25. *Покажите, что гильбертовым является пространство $L_2[a, b]$ (над полем $\mathbb{C}$) — интегрируемых с квадратом модуля функций с нормой $\|x\|^2 = (x, x)$, где скалярное произведение задается интегралом: $(x, y) = \int_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$.*

Упражнение 1.26. *Проверьте, что гильбертовыми являются пространства с весом $L_f^2[a, b]$ и $L_f^2(\mathbb{R})$, в которых норма задается следующим образом:*

$$\|x\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 f(t) dt, \quad \|x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 f(t) dt.$$

Вопрос. *Какие функции f могут быть использованы в качестве веса?*

1.6. Некоторые вопросы теории приближений

В этом параграфе мы будем рассматривать для элемента x из ЛНП X элементы наилучшего приближения из некоторого замкнутого выпуклого множества $M \subset X$, в частности из подпространства $M = L$.

Определение 1.23. Пусть X — линейное пространство. Множество $M \subset X$ называется выпуклым, если для любых элементов $x, y \in M$ и любого числа $\alpha \in (0, 1)$ имеет место включение $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$.

Определение 1.24. Пусть X — линейное пространство. Множество $M \subset X$ называется линейным многообразием, если для любых элементов $x, y \in M$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ имеет место включение $\alpha x + \beta y \in M$.

Определение 1.25. Замкнутое линейное многообразие нормированного пространства X называется подпространством.

Определение 1.26. Для $x \in X$ *элементом наилучшего приближения* из M называется элемент $x^* \in M$ такой, что

$$\|x - x^*\| = \inf_{u \in M} \|x - u\| =: \rho(x, M).$$

Отметим, что в зависимости от свойств пространства X и множества M элемента наилучшего приближения может не быть или этот элемент может определяться не единственным образом.

Утверждение 1.3. Пусть L — конечномерное подпространство ЛНП X. Тогда для любого $x \in X$ существует (возможно не единственный) элемент $u^* \in L$ такой, что

$$\rho(x, L) = \|x - u^*\|.$$

Доказательство. Пусть $x \notin L$, тогда $\rho(x, L) = d > 0$. *Почему?* Зафиксируем набор $\{e_k\}_{k=1}^m$ — базис в L. Пусть $u = \sum_{k=1}^m \eta_k e_k$ — разложение произвольного элемента u из L по базису. Введем на L еще евклидову норму $\|u\|_e := \sqrt{\sum_{k=1}^m |\eta_k|^2}$. Тогда в силу эквивалентности норм в конечномерном пространстве имеем

$$\exists\ \alpha, \beta > 0 : \quad \forall u \in L \quad \alpha\|u\|_e \le \|u\| \le \beta\|u\|_e. \tag{7}$$

Рассмотрим L_e — линейное подпространство L с евклидовой нормой. Функция $f(u) = \|x - u\|$ непрерывна в L_e:

$$\big|\, \|x - u_1\| - \|x - u_2\| \,\big| \le \|u_1 - u_2\| \le \beta\|u_1 - u_2\|_e.$$

Покажем, что $\inf\limits_{u\in L}\|x-u\|$ может достигаться только в шаре

$$\|u\|_e \le r, \quad r = \alpha^{-1}(d+1+\|x\|).$$

Действительно, если $\|u\|_e > r$, то

$$\|x-u\| \ge \|u\| - \|x\| \ge \alpha\|u\|_e - \|x\| > \alpha r - \|x\| = d+1.$$

Значит, нижняя грань не может достигаться во множестве $\|u\|_e > r$, а может достигаться (и достигается) только на ограниченном замкнутом множестве $\|u\|_e \le r$. Следовательно,

$$\exists\, u^* \in L: \ \rho(x,L) = \inf_{u\in L}\|x-u\| = \|x-u^*\|. \quad \blacksquare$$

Упражнение 1.27. *Зная геометрию шаров в пространствах* $(\mathbb{R}^2, \|x\|_e)$, $(\mathbb{R}^2, \|x\|_m)$, $(\mathbb{R}^2, \|x\|_s)$, *покажите возможность существования неединственного ближайшего элемента.*

Кроме конечномерных пространств особую роль в вопросах приближения (и во многих других вопросах) играют евклидовы пространства, особенно полные, т. е. гильбертовы пространства без требования сепарабельности.

Теорема 1.5. Пусть M — замкнутое выпуклое множество в полном евклидовом пространстве и точка $x \notin M$. Тогда существует единственный элемент $y \in M$ такой, что

$$\rho(x,M) = \|x-y\|.$$

Доказательство. Знаем, что $\rho(x,M) = \inf\limits_{u\in M}\|x-u\| = d > 0$. Из определения точной нижней грани следует, что

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, u_n \in M: \ d \le \|x-u_n\| < d + 1/n. \tag{8}$$

Покажем, что последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна, используя равенство параллелограмма, взяв за стороны $x-u_n$ и $x-u_m$:

$$\|u_n-u_m\|^2 + \|2x-u_n-u_m\|^2 = 2\left(\|x-u_n\|^2 + \|x-u_m\|^2\right).$$

Элемент $\frac{u_n+u_m}{2} \in M$, так как M выпукло, поэтому

$$\|2x-u_n-u_m\|^2 = 4\left\|x-\frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2 \geq 4d^2.$$

Далее, из неравенства (8) имеем

$$\|x-u_n\|^2 < (d+1/n)^2, \quad \|x-u_m\|^2 < (d+1/m)^2.$$

В силу данных неравенств имеем

$$\begin{aligned}\|u_n-u_m\|^2 = 2\left(\|x-u_n\|^2+\|x-u_m\|^2\right) - 4\left\|x-\frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2 < \\ < 2(d+1/n)^2+2(d+1/m)^2-4d^2 = \\ = \frac{4d}{n}+\frac{4d}{m}+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{m^2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{u_n\}$. Так как M — замкнутое множество в полном пространстве, то существует элемент $y \in M$, который является пределом последовательности $\{u_n\}$. Тогда, переходя к пределу в неравенствах (8), получаем

$$\|x-y\| = d = \rho(x, M).$$

Единственность получается от противного. Действительно, из равенства параллелограмма

$$\begin{aligned}4d^2 = 2\|x-y\|^2+2\|x-y^*\|^2 = \\ = \|y-y^*\|^2+4\left\|x-\frac{y^*+y}{2}\right\|^2 \geq \|y-y^*\|^2+4d^2\end{aligned}$$

следует, что $\|y-y^*\| = 0$. ■

Следствие. Пусть L — подпространство в полном евклидовом пространстве и точка $x \notin L$. Тогда существует единственный элемент $y \in L$ такой, что

$$\rho(x, L) = \|x-y\|.$$

Отсюда вытекают два важных результата, для формулировки которых приведем необходимые определения.

Определение 1.27. Пусть X — евклидово пространство. Элементы $x, y \in X$ называются *ортогональными* (в этом случае пишут $x \perp y$), если выполнено равенство $(x, y) = 0$.

Определение 1.28. Пусть L — линейное многообразие в полном евклидовом пространстве H. Совокупность всех элементов из H, ортогональных к L, т. е. ортогональных любому элементу из L, называется *ортогональным дополнением к* L и обозначается $L^{\perp}$.

Упражнение 1.28. *Проверьте, что $L^{\perp}$ — подпространство в H.*

Теорема 1.6. Пусть L — подпространство в полном евклидовом пространстве и точка $x \notin L$. Пусть $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Тогда $x - y \perp L$.

Доказательство. Докажем, что $(x - y, h) = 0$ для любого $h \in L$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$\|x - y + \lambda h\| = \|x - (y - \lambda h)\| \geq \|x - y\|.$$

Следовательно,

$$(x - y + \lambda h, x - y + \lambda h) \geq (x - y, x - y).$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые, получаем равносильное неравенство

$$\lambda(h, x - y) + \overline{\lambda}(x - y, h) + \lambda\overline{\lambda}\|h\|^2 \geq 0.$$

В этом неравенстве положим, что $\lambda = -(x - y, h)/\|h\|^2$. Тогда получаем

$$-\frac{|(x - y, h)|^2}{\|h\|^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x - y, h) = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 1.7 (о разложении в прямую сумму). Пусть L — подпространство в полном евклидовом пространстве H. Тогда для любого $x \in H$ справедливо разложение

$$x = y + z, \quad y \in L, \ z \in L^{\perp},$$

где y и z определяются по x однозначно.

Доказательство. Выберем произвольно $x \in H$. Тогда возможны два случая. Если $x \in L$, то $y = x$ и $z = 0$. Если $x \notin L$, то по следствию из теоремы 1.5 найдется единственный элемент $y \in L$, определяемый равенством $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Тогда по теореме 1.6 элемент $z := x - y \in L^{\perp}$. Таким образом, получено разложение $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. Единственность полученного разложения легко установить методом от противного. *Проверьте!* ■

Замечание. Элемент y в разложении $x = y + z$ называется *проекцией элемента* x на подпространство L, а элемент z — *проекцией* x на подпространство $L^{\perp}$. Полученное свойство разложения единственным образом произвольного элемента из полного евклидова пространства H записывают еще так:

$$H = L \oplus L^{\perp}.$$

Здесь знак $\oplus$ как раз и означает, что любой элемент $x \in H$ единственным образом разлагается в сумму $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$.

Теоремы 1.5 – 1.7 и следствия из них часто формулируют как результаты в гильбертовых пространствах.

Упражнение 1.29. *Докажите теорему Пифагора: для любых* x, y, z *в полном евклидовом пространстве справедливо равенство* $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Упражнение 1.30. *Докажите, что линейное многообразие* M *гильбертова пространства* H *всюду плотно в* H *тогда и только тогда, когда единственным элементом в пространстве, ортогональным множеству* M, *является нулевой элемент.*

В общем случае для ЛНП (необязательно евклидова и полного) имеет место следующий результат.

Утверждение 1.4 (лемма Рисса о почти перпендикуляре). Пусть L — подпространство в ЛНП X и $L \neq X$. Тогда

$$\forall \varepsilon \in (0,1)\ \exists z_\varepsilon \notin L:\ \|z_\varepsilon\| = 1\ \&\ \rho(z_\varepsilon, L) > 1-\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $x \notin L$. Положим $\inf\limits_{u\in L} \|x-u\| = d,\ d > 0$. В силу свойств точной нижней грани имеем

$$\forall \varepsilon \in (0,1)\quad \exists u_\varepsilon \in L:\ d \le \|u_\varepsilon - x\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Теперь покажем, что элемент

$$z_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|}, \quad \|z_\varepsilon\| = 1$$

и есть искомый элемент. Действительно, $z_\varepsilon \notin L$, поскольку в противном случае мы имели бы, что $u_\varepsilon - x \in L$ и, следовательно, $x \in L$, что противоречит выбору x. Далее, для произвольного элемента $u \in L$ имеем оценку

$$\|z_\varepsilon - u\| = \left\| \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} - u \right\| = \frac{\|x - (u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\|)\|}{\|u_\varepsilon - x\|} > 1-\varepsilon,$$

так как элемент $u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\| =: y \in L$, а $\|x-y\| \ge d$ для $y \in L$. ■

Последний вопрос, который мы рассмотрим под углом проблем, связанных с приближением, — это приближение функций более гладкими, чем исходная, функциями. Для этой цели будет использована функция, называемая шапочкой, δ-образной функцией, ядром усреднения и пр., вернее, будет использована последовательность таких функций φ_n. При каждом $n \in \mathbb{N}$ функция φ_n определяется следующим образом:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} C_n \exp\left(-\frac{1}{\frac{1}{n^2} - t^2}\right) & \text{при } |t| < 1/n, \\ 0 & \text{при } |t| \ge 1/n. \end{cases}$$

Здесь константа C_n выбирается так, чтобы $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)dt = 1$. На рис. 4 представлены графики функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

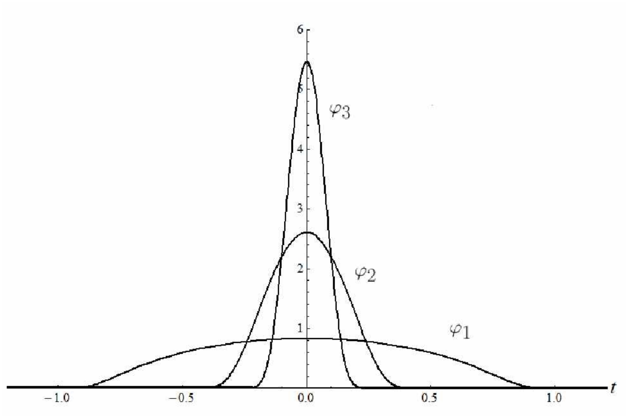


Рис. 4. Графики функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

Упражнение 1.31. *Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ функция φ_n бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.*

Начнем с приближения непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f сверткой с шапочками

$$(f * \varphi_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(x-t)dt.$$

О свертке известно, что для функций $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ *свертка*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$$

существует и тоже принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ (см., например, [3]).

Упражнение 1.32. *Проверьте, что для любых интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций f, g свертка $f * g$ коммутативна:*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt$$

и является интегрируемой на $\mathbb{R}$ функцией.

Для свертки непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f с шапочками φ_n имеем равенства

$$
\begin{aligned}
(f * \varphi_n)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) f(x-t)dt = \\
= \int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(t) f(x-t)dt = \\
= f(x-t^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

При этом из теорем о дифференцировании функций по параметру под знаком интеграла следует, что $(f * \varphi_n)(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Таким образом, мы получили поточечное приближение непрерывной на $\mathbb{R}$ функции f бесконечно дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ функциями $f * \varphi_n$.

Упражнение 1.33. *Аналитически и геометрически покажите приближение* $\chi_{[a,b]}$ *— характеристической функции отрезка* $[a,b]$ *— функциями* $\chi_{[a,b]} * \varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1.7. Ряды Фурье

Гильбертовы пространства обладают многими хорошими свойствами, которые их делают похожими на конечномерные евклидовы пространства. Одним из таких свойств является результат о разложении произвольного полного евклидова (а значит, и гильбертова) пространства в прямую сумму.

Другое важное свойство гильбертовых пространств — наличие рядов по ортогональным системам — рядов Фурье. Пусть в гильбертовом пространстве H задана ортогональная система $\{\varphi_k\}$ — множество функций, для которых скалярное произведение (φ_k, φ_j) равно нулю при $k \neq j$ и отлично от нуля при $k = j$. Множество функций $\{e_k := \varphi_k/\|\varphi_k\|\}$ образуют ортонормальную систему.

Упражнение 1.34. *Проверьте, что знакомая вам из курса математического анализа тригонометрическая система*

$$1,\ \cos n\frac{2\pi t}{b-a},\ \sin n\frac{2\pi t}{b-a}, \quad n=1,2,\ldots$$

является ортогональной в $L_2[a,b]$. *Постройте соответствующие ей*

1) ортонормальную тригонометрическую систему в $L_2[a,b]$,

2) ортогональные и ортонормальные тригонометрические системы в $L_2[-\pi,\pi]$ *и в* $L_2[0,\pi]$.

Упражнение 1.35. *Докажите, что в гильбертовом пространстве любая ортогональная система не более чем счетна.*

Определение 1.29. Ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k$ $(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k)$ называется рядом по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$ (рядом по ортонормальной системе $\{e_k\}$). Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k\varphi_k,\ \text{где } x_k=\frac{(x,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k,\ x_k=(x,e_k)\right),$$

называется *рядом Фурье* элемента x по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$ (рядом Фурье элемента x по ортонормальной системе $\{e_k\}$).

Определение 1.30. Ортогональная (ортонормальная) система $\{\varphi_k\}$ ($\{e_k\}$) называется *ортогональным (ортонормальным) базисом* в гильбертовом пространстве H, если для любого элемента $x\in H$ существует единственная последовательность чисел $\{\alpha_k\}$ такая, что имеет место представление

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k \ \left(x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k\right).$$

Из того, что любое гильбертово пространство H по определению является сепарабельным, следует, что в нем существует счетное всюду плотное множество. Из этого счетного всюду плотного множества через их линейные комбинации по правилу ортогонализации Грамма — Шмидта можно построить ортогональную (линейно независимую) систему, которая тоже будет плотной в H. Эта система является ортогональным базисом в H.

Из полученного указанным способом счетного ортогонального базиса $\{\psi_k\}$ можно построить ортонормальную систему — ортонормальный базис $\{e_k := \psi_k/\|\psi_k\|\}$. Таким образом, в любом гильбертовом пространстве существуют счетный ортогональный и счетный ортонормальный базисы.

Оказывается, что частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k=1}^{n} x_k\psi_k$ по ортогональным (ортонормальным) системам обладают замечательным свойством оптимальности: они являются наилучшим приближением к x среди всех линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\psi_k$.

Далее мы для простоты будем рассматривать ряды Фурье по ортонормальным системам. Указанное свойство оптимальности отражает следующая теорема.

Теорема 1.8. Пусть $\{e_k\}$ — бесконечная ортонормальная система в гильбертовом пространстве H, рассматриваемом для простоты над полем действительных чисел. Тогда для любого элемента $x \in H$ частичная сумма ряда Фурье $\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ минимизирует норму разности $\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|$ по всем частичным суммам $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$.

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|x - S_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \; x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) =$$

$$= (x, x) - 2 \left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - x_k)^2.$$

Из полученной цепочки равенств легко видеть, что минимум $\|x - S_n\|$ достигается при условии равенства нулю последнего слагаемого:

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - x_k)^2 = 0, \quad \text{т. е. при} \;\; \alpha_k = x_k, \; k = 1, \ldots, n.$$

В этом случае

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2. \quad \blacksquare$$

Для любого элемента $x \in H$ из неравенства $\|x - S_n\|^2 \geq 0$, справедливого для любого $n \in \mathbb{N}$, следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, частичные суммы ряда, составленного из квадратов коэффициентов Фурье, ограничены и, следовательно, этот ряд сходится, а для суммы ряда справедливо неравенство, называемое *неравенством Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leq \|x\|^2.$$

Если система $\{e_k\} \subset H$ такова, что для любого $x \in H$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|x\|^2, \tag{9}$$

называемое *равенством Парсеваля*, то данная система[4] является базисом в H. Более того, справедливо и обратное утверждение. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 1.9. Ортонормальная система $\{e_k\}$ вещественного гильбертова пространства H является базисом в H тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in H$ справедливо равенство Парсеваля (9).

Доказательство

$\Rightarrow$ Пусть $\{e_k\}$ — базис пространства H. Тогда для любого элемента x существует единственная последовательность чисел $\{\alpha_k\}$ такая, что имеет место представление $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. Покажем, что для любого номера k выполнено равенство $\alpha_k = x_k$. В силу ортонормальности системы $\{e_k\}$ для любого номера $n > m$ верно равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_m \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_m) = \alpha_m.$$

Тогда для любого номера $n \geq m$ имеем

$$x_m = (x, e_m) = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_m \right) =$$
$$= \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_m \right) + \alpha_m.$$

По определению сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ равносильна соотношению $\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда в силу неравенства

[4] Система $\{e_k\}$ в H, для которой имеет место равенство Парсеваля, называется *полной*.

Коши — Буняковского имеем

$$\left|\left(x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k, e_m\right)\right| \leq \left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Из этого соотношения следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$x_m = \lim_{n\to\infty}\left(x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k, e_m\right) + \alpha_m = \alpha_m.$$

Таким образом, для элемента x имеем представление $x = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$. Тогда в силу равенства

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

и соотношения $\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ получаем, что

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2.$$

Следовательно, для любого элемента $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля.

$\Leftarrow$ Пусть $\{e_k\}$ — ортонормальная система в H и для любого элемента $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля. Тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 0.$$

Следовательно, ряд Фурье элемента x сходится к этому элементу. Таким образом, для любого элемента $x \in H$ имеет место представление $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

Пусть существует другая последовательность чисел $\{\alpha_k\}$ такая, что имеет место представление $x = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$. Тогда с помощью рассуждений, аналогичных доказательству необходимости, получим для любого $k \in \mathbb{N}$ равенство $x_k = \alpha_k$. Следовательно, для любого элемента x существует единственная последовательность чисел $\{x_k\}$ такая, что $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, т. е. система $\{e_k\}$ — ортонормальный базис в H. ■

Упражнение 1.36. *Докажите, что система* $\{e_k\}$, *где*

$$e_k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots), \quad k \in \mathbb{N},$$

является ортонормальным базисом в пространстве l_2.

Упражнение 1.37. *Посмотрите, как изменится доказательство теоремы 1.8 в случае гильбертова пространства над полем комплексных чисел. Проверьте, что неравенство Бесселя будет иметь вид* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \|x\|^2$, *а равенство Парсеваля —*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2. \tag{10}$$

Теперь обсудим особую роль пространства l_2 среди всех гильбертовых пространств. Покажем, что всякое гильбертово пространство H можно в определенном смысле отождествить с пространством l_2. Для этого введем необходимые понятия.

Определение 1.31. Линейные нормированные пространства X и Y называются (линейно) *изоморфными*, если существует биективное отображение $f : X \to Y$ такое, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ и для любых $x, y \in X$ справедливо равенство:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Определение 1.32. Линейные нормированные пространства X и Y называются *изометричными*, если существует отображение $f : X \to Y$ такое, что для любого $x \in X$ справедливо равенство:

$$\|f(x)\|_Y = \|x\|_X.$$

Если ЛНП X и Y изоморфны и изометричны, то пишут $X \simeq Y$.

Для произвольного гильбертова пространства H, используя равенство Парсеваля (10), теорема Рисса — Фишера позволяет установить изоморфизм и изометрию между пространствами H и l_2 ($H \simeq l_2$) следующим образом: для любого $x \in H$ с коэффициентами Фурье $x_k, k \in \mathbb{N}$ по ортонормальному базису имеем

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|\tilde{x}\|_{l_2}^2, \quad \text{где} \quad \tilde{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2.$$

Теорема 1.10 (Рисса — Фишера). Пусть $\{e_k\}$ — произвольная ортонормальная система в полном евклидовом пространстве H и пусть последовательность $\{\alpha_k\}$ такова, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ сходится (т. е. $\{\alpha_k\} \in l_2$). Тогда существует такой элемент $x \in H$, что

$$\alpha_k = (x, e_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = (x, x) = \|x\|^2.$$

Доказательство. Положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Тогда

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \|\alpha_{n+1} e_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} e_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2.$$

В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ и полноты пространства H получаем, что последовательность $\{S_n\}$ сходится к некоторому элементу $x \in H$: $\|x - S_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Далее,

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (x, e_m) = (S_n, e_m) + (x - S_n, e_m),$$

причем справа первое слагаемое при $n \geq m$ равно α_m, а второе стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$\|(x - S_n, e_m)\| \leq \|x - S_n\| \|e_m\|,$$

и по определению x имеем $\|x - S_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получаем для любого $m \in \mathbb{N}$ равенство $(x, e_m) = \alpha_m$ и соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = (x, x).$$

Действительно,

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) = (x, x) - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \quad \blacksquare$$

Разложение в ряды Фурье — широко применяемая техника для решения многих конкретных прикладных задач. Особенно эта техника полезна при решении линейных операторных уравнений. Например, уравнений вида $(\lambda I - A)x = y$, если линейный оператор A имеет ортогональный базис $\{\varphi_k\}$, состоящий из собственных векторов. Следовательно, такой оператор имеет и ортонормальный базис $\{e_k\}$, состоящий из собственных векторов: $Ae_k = \lambda_k e_k$. По этой системе и составляются ряды Фурье для элемента y, определяемого исходными данными, для неизвестного элемента x и для элемента $(\lambda I - A)x$:

$$(\lambda I - A)x = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k) x_k e_k = y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{y_k}{\lambda - \lambda_k}.$$

После изучения главы «Основные пространства» перейдем к изучению второй большой темы курса — «Операторы», где, в частности, выделим операторы A, имеющие ортогональный (следовательно, ортонормальный) базис, состоящий из собственных векторов. Для уравнений с такими операторами особенно актуально применение техники разложения в ряды Фурье по собственным векторам.

1.8. Принцип сжимающих отображений

Как мы отметили в предыдущем параграфе, важной техникой, используемой для решения многих прикладных задач в гильбертовых пространствах, является разложение в ряды Фурье.

Другая важная техника связана с применением в полных пространствах метода последовательных приближений (или метода неподвижной точки, или метода итераций) для решения функциональных, дифференциальных и интегральных уравнений.

Пусть A — оператор (т. е. однозначное отображение), действующий в полном метрическом пространстве X, в частности, в банаховом пространстве.

Определение 1.33. Оператор $A : X \to X$ называется *сжимающим*, если для любых $x, y \in X$ выполняется оценка

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\, \rho(x, y), \text{ где } \alpha < 1.$$

Упражнение 1.38. *Пусть отображение $A : C[0,5] \to C[0,5]$ определяется равенством $Ax(t) = \int_0^t x^2(s)ds$. Докажите, что это отображение не является сжимающим.*

Определение 1.34. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой оператора* A, если она является решением уравнения $x = Ax$.

Теорема 1.11 (принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Доказательство теоремы основано на доказательстве того, что последовательность приближений $\{x_n\}$:

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1 = A^2x_0,\ \ldots,\ x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0,\ \ldots,$$

где точка x_0 взята произвольно, является фундаментальной и, следовательно, сходится в полном пространстве: $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Эта предельная точка x, в силу непрерывности любого сжимающего оператора, как раз и является единственной неподвижной точкой оператора A.

Доказывать, опять-таки для наглядности, будем в нормированных пространствах. Пусть $m > n$, тогда, учитывая, что

$$\forall x, y \in X \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \|A^n x - A^n y\| \le \alpha^n \|x - y\|,$$

получаем

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| = \|A^n x_0 - A^m x_0\| \le \alpha^n \|x_0 - x_{m-n}\| \le \\ \le \alpha^n \left(\|x_0 - x_1\| + \ldots + \|x_{m-n-1} - x_{m-n}\|\right) \le \\ \le \alpha^n (\|x_0 - x_1\| \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\right) \le \\ \le \alpha^n \|x_0 - x_1\| \frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Поскольку X — полное пространство, то

$$\exists\, x \in X : \ x = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

и имеет место оценка для предельного элемента

$$\|x_n - x\| \le \alpha^n \|x_0 - x_1\| \frac{1}{1-\alpha} = \alpha^n \|x_0 - Ax_0\| \frac{1}{1-\alpha}.$$

Из того, что A является сжимающим оператором: $\|Ax - Ay\| \le \le \alpha \|x - y\|$, следует, что он непрерывен, значит

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Таким образом, существование неподвижной точки доказано. Единственность докажем методом от противного. Пусть

$$x = Ax, \quad y = Ay, \quad x \ne y.$$

Тогда

$$\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \le \alpha \|x - y\| \ \Longrightarrow \ \|x - y\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y. \quad \blacksquare$$

Рассмотрим **пример**, показывающий, что для существования неподвижной точки недостаточно выполнения условия $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ при всех $x \ne y$.

Пусть $X = [1, +\infty)$, $\rho(x, y) = |x - y|$ и отображение $A : X \to X$ задано следующим образом: $Ax = x + \frac{1}{x}$. Для любых различных $x, y \in X$ имеет место оценка

$$\rho(Ax, Ay) = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| = |x-y| \left|1 - \frac{1}{xy}\right| < |x-y| = \rho(x, y).$$

Однако данное отображение не имеет неподвижной точки, поскольку уравнение $Ax = x$ не имеет решений.

Применение принципа сжимающих отображений к решению функциональных уравнений $f(x) = x$ с функцией f, удовлетворяющей условию Липшица с показателем $\alpha < 1$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|,$$

и уравнений $F(x) = 0 : \lambda F(x) = x - f(x)$, а также применение принципа сжимающих отображений к решению задачи Коши для дифференциальных уравнений можно найти в [3].

Остановимся подробно на применении принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. Начнем с применения к решению уравнений Фредгольма — важного раздела курса функционального анализа.

Уравнение вида

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds = y(t), \ t \in [a, b] \tag{11}$$

называется *интегральным уравнением Фредгольма второго рода*, а уравнение

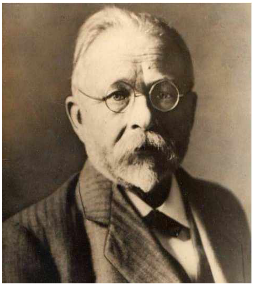
$$\int_a^b K(t, s) x(s) ds = y(t), \ t \in [a, b]$$

— *интегральным уравнением Фредгольма первого рода.* Здесь функция $K(t, s)$ задана, она называется *ядром интегрального оператора* $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} x(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds.$$

Функция y определяется исходными данными задачи, а x — неизвестная функция.

Э. И. Фредгольм в начале прошлого века впервые исследовал решение интегральных уравнений и получил результаты, которые теперь носят название теорем Фредгольма. Мы рассмотрим эти теоремы в главе 3.



Эрик Ивар Фредгольм
(7.04.1866 – 17.08.1927)

Покажем, что если выбрать параметр λ достаточно малым, то к уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром можно применять принцип сжимающих отображений, и последовательность приближений $\{x_n\}$ сходится к решению этого уравнения в пространстве $C[a,b]$ (следовательно, в $L_p[a,b]$).

Отметим, что уравнения первого рода решаются методами некорректных задач, которые мы рассмотрим позже, после того, как, используя свойства интегральных операторов, покажем, что в общем случае уравнения второго рода представляют собой корректные задачи, а уравнения первого рода — некорректные.

Итак, переходим к решению уравнений Фредгольма второго рода с малым параметром. Запишем уравнение Фредгольма второго рода (11) в форме $x = Ax$, где

$$Ax(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t).$$

Покажем, что в пространстве $C[a,b]$ оператор A является сжимающим при малых λ. Для этого оценим норму разности $\|Ax_1 - Ax_2\|$:

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \max_{t\in[a,b]} |Ax_1(t) - Ax_2(t)| \leq$$
$$\leq \max_{t\in[a,b]} |\lambda| \int_a^b |K(t,s)||x_1(s) - x_2(s)|ds \leq$$
$$\leq |\lambda| M(b-a)\|x_1 - x_2\|,$$

где $M := \max\limits_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]} |K(t,s)|$.

Отсюда следует, что при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ оператор A является сжимающим. Следовательно, при малых λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, уравнение (11) можно решать методом последовательных приближений.

Как конкретно находить степени интегрального оператора, т. е. строить приближения, мы посмотрим ниже при решении интегральных уравнений Вольтерра. Уравнения Вольтерра являются частным случаем рассмотренных уравнений Фредгольма и их можно решать указанным методом, но оказывается, что уравнения Вольтерра можно решать более эффективно (без требования малости параметра), используя обобщенный принцип сжимающих отображений.

Введем обобщенный принцип сжимающих отображений и покажем, что интегральное уравнение второго рода с переменным верхним пределом

$$x(t) - \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b], \qquad (12)$$

называемое *уравнением Вольтерра*, можно решать без каких-либо ограничений на параметр λ.

Теорема 1.12 (обобщенный принцип сжимающих отображений). Пусть оператор A, действующий в полном метрическом пространстве, обладает таким свойством, что некоторая его степень является сжимающим отображением. Тогда оператор A имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Предположим, что A^k является сжимающим. Тогда он имеет единственную неподвижную точку x: $x = A^k x$.

Покажем, что x является неподвижной точкой и оператора A. Применим к равенству $x = A^k x$ оператор A. Получим

$$Ax = AA^k x = A^k Ax.$$

Отсюда следует, что $y := Ax$ является неподвижной точкой сжимающего оператора A^k. В силу единственности неподвижной точки получаем, что Ax совпадает с x: $x = Ax$, т. е. x — это неподвижная точка и оператора A. ■

Оценка, показывающая, что некоторая степень интегрального оператора Вольтерра

$$Ax(t) := \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds + y(t)$$

является сжимающим оператором, основана на том, что оценивая первую степень интеграла с переменным верхним пределом, вместо множителя $(b-a)$ в случае уравнения Фредгольма берут $(t-a)$, тогда в оценке второй степени получается $(t-a)^2/2$ и т. д. На k-м шаге получается $(t-a)^k/k!$. Этот множитель и обеспечивает сжимаемость оператора A^k. Проведем подробные выкладки:

$$\begin{aligned}
|Ax_1(t) - Ax_2(t)| &= |\lambda| \left| \int_a^t K(t,s)(x_1(s) - x_2(s))ds \right| \le \\
&\le |\lambda| M(t-a) \max_{s\in[a,b]} |x_1(s) - x_2(s)| = \\
&= |\lambda| M(t-a)m,
\end{aligned}$$

где $m = \max\limits_{s\in[a,b]} |x_1(s) - x_2(s)| = \|x_1 - x_2\|$,
$M = \max\limits_{(t,s)\in[a,b]\times[a,t]} |K(t,s)|$.

Отсюда

$$|A^2x_1(t) - A^2x_2(t)| \le |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} m, \quad \dots,$$
$$|A^n x_1(t) - A^n x_2(t)| \le |\lambda|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} m \le |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Таким образом, получили, что некоторая степень оператора Вольтерра является сжимающим оператором. Значит, интегральные уравнения Вольтерра второго рода можно решать методом последовательных приближений.

Итак, принцип сжимающих отображений дает универсальный метод решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода — метод последовательных приближений. Сделаем замечания о применении других методов решения интегральных уравнений второго рода

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad -\infty \le a < t < b \le \infty,$$

и о корректности задач решения таких уравнений.

Интегральные уравнения второго рода с *вырожденным ядром*, т. е. с ядром вида

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)B_i(s),$$

где $\{A_i(t)\}$ и $\{B_i(s)\}$ — системы линейно независимых функций, на практике удобнее решать методом неопределенных коэффициентов: для таких уравнений решение ищется в виде $x(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i(t) + y(t)$. Подстановка указанного для x представления приводит интегральное уравнение к системе уравнений для неизвестных коэффициентов c_i, $i = 1, ..., n$.

Кроме того, для решения в гильбертовых пространствах интегральных уравнений Фредгольма с *симметричными ядрами* можно использовать метод разложения в ряды Фурье. Чтобы пояснить применение этого метода, запишем интегральное уравнение в операторной форме:

$$x - \mathcal{K}x = y, \tag{13}$$

где $\mathcal{K}x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$. Тогда, если оператор $\mathcal{K}$ имеет ортогональную систему собственных векторов (операторы, обладающие таким свойством, мы будем подробно изучать во второй главе «Операторы»), то искать решение следует, раскладывая все слагаемые уравнения (13), известные и неизвестные, в ряды Фурье по ортогональной системе собственных векторов и приравнивая коэффициенты при равных собственных векторах.

Факт существования единственного решения уравнения со сжимающим оператором можно интерпретировать как корректность задачи нахождения решения такого уравнения.

Определение 1.35. Задача нахождения неизвестного x по исходным данным y называется *корректной по Адамару*, если на некотором классе исходных данных решение существует, единственно и непрерывно зависит от y, т. е. малым изменениям исходных данных y соответствуют малые изменения решения x.

Для рассматриваемых интегральных уравнений Фредгольма второго рода, записанных в форме (13) с оператором $\mathcal{K}$, действующим в некотором нормированном пространстве X, корректность задачи (на всем X) означает существование ограниченного обратного оператора к оператору $I - \mathcal{K}$.

1.9. Пополнение пространств. Пространства Соболева

В теореме о пополнении нормированного пространства вводится очень важная операция замыкания произвольного нормированного пространства, в результате чего получается банахово пространство. Если исходное пространство было полным, то замыкание совпадает с исходным пространством.

Теорема о пополнении, во-первых, помогает лучше понять, как устроены пространства L_p, которые были введены в курсе теории функций действительной переменной (ТФДП): они являются пополнениями пространства непрерывных функций по соответствующей норме. Во-вторых, позволяет ввести новые пространства — пространства Соболева вместе с важным понятием обобщенной производной по Соболеву. Отметим, что теорема о пополнении имеет место и для метрических пространств. Для наглядности мы приводим ее для случая нормированных пространств.

Теорема 1.13 (о пополнении нормированного пространства). *Всякое нормированное пространство X можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $\hat{X}$.*

Приведем подробную **схему доказательства** этой теоремы. В ней можно выделить три основные части:

1) ввести пространство $\hat{X}$ и отождествить X с некоторым линейным многообразием X_1 в $\hat{X}$;

2) показать, что построенное линейное многообразие $X_1 \subseteq \hat{X}$, совпадающее с X в смысле первого пункта, плотно в $\hat{X}$;

3) показать, что $\hat{X}$ — банахово пространство.

Рассмотрим схему доказательства каждой из трех частей.

1. Чтобы отождествить X с X_1, сначала строится пространство $\hat{X}$, затем в нем строится некоторое линейное многообразие $X_1 \subseteq \hat{X}$, изоморфное и изометричное X.

Для конструкции $\hat{X}$ рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ в пространстве X. Поскольку пространство X в общем случае неполное (иначе оно совпадает с $\hat{X}$ и не надо строить пополнение), то следует отметить, что среди этих фундаментальных последовательностей есть сходящиеся к некоторому элементу из X и есть не имеющие предела в X. Это важный момент для понимания конструкции $\hat{X}$.

Две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ назовем эквивалентными, если

$$\|x_n - x'_n\| \to 0 \ \text{ при } n \to \infty,$$

и будем обозначать это $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$. Множество всех фундаментальных последовательностей разобьем на непересекающиеся классы эквивалентных последовательностей. Множество всех классов обозначим $\hat{X}$, а классы обозначим $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$

Превратим пространство $\hat{X}$ в нормированное. Линейные операции на классах зададим естественно через входящие в классы элементы, а норму на классах введем следующим образом: пусть $\{x_n\} \in \hat{x}$, тогда

$$\|\hat{x}\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Предел этот существует, так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, а значит, фундаментальна и последовательность из норм, и предел этой последовательности $\|x_n\|$ не зависит от представителя класса.

Теперь главный шаг: покажем, что X можно отождествить с некоторым линейным многообразием X_1 в построенном $\hat{X}$. А именно, отождествим элемент $x \in X$ с классом, содержащим стационарную последовательность $\{x_n = x\}$. Таким образом, каждый элемент x из X отождествляем с классом, содержащим (фундаментальные) последовательности, сходящиеся к x.

2. Доказывается, что такие классы всюду плотны в пространстве всех классов $\hat{X}$. Смысл построенного пополнения можно объяснить следующим образом: к пространству классов, содержащих стационарные последовательности $\{x\}$, и отождествленному с пространством X, добавили классы, содержащие фундаментальные последовательности, не имеющие предела в X (пополнили классами, содержащими фундаментальные последовательности, не имеющие предела в X).

3. Доказывается, что линейное нормированное пространство $\hat{X}$ классов, содержащих стационарные последовательно-

сти $\{x\}$, и пополненное классами, содержащими фундаментальные последовательности, не имеющие предела в X, уже является полным пространством, т. е. банаховым. ■

Рассмотрим в качестве **примеров** пополнений известные вам лебеговы пространства и новые соболевские пространства.

1. Пространства $L_p[a,b], p \geq 1$, являются пополнением пространства непрерывных функций по норме $L_p[a,b]$. Покажем это на примере пространства $L[a,b] = L_1[a,b]$.

По определению пополнения пространства $\tilde{L}[a,b]$, пространство $\widehat{\tilde{L}[a,b]}$ состоит из классов $\hat{x} = \{x_n\}$ эквивалентных фундаментальных по норме $L[a,b]$ последовательностей $\{x_n\}$ непрерывных на $[a,b]$ функций $x_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (фундаментальные (сходящиеся) по норме $L[a,b]$ последовательности называют еще фундаментальными (сходящимися) в среднем).

Из курса ТФДП известно, что из фундаментальной в среднем последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, фундаментальную почти всюду (п. в.). Эта подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится п. в. к некоторой функции x. Таким образом, появляется функция x, связанная с классом. Покажем, что $x \in L[a,b]$. Вспоминаем, что элементами пространств $L_p[a,b]$, в частности $L[a,b]$, являются целые классы совпадающих п. в. функций.

Из неравенств

$$\int_a^b |x_{n_k}(t)|dt - \int_a^b |x_{n_m}(t)|dt = \int_a^b (|x_{n_k}(t)| - |x_{n_m}(t)|)dt \leq$$
$$\leq \int_a^b |x_{n_k}(t) - x_{n_m}(t)|dt$$

следует, что подпоследовательность интегралов $\int_a^b |x_{n_k}(t)|dt$ является фундаментальной, следовательно, сходящейся. По теоремам о предельном переходе под знаком интеграла Лебега отсюда следует, что x является интегрируемой по Лебегу и

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |x_{n_k}(t)|dt = \int_a^b |x(t)|dt. \qquad (14)$$

Тот же предел имеет и вся последовательность $\int_a^b |x_n(t)|dt$.

Полученная таким образом функция $x = x(t)$ из $L[a,b]$ (точнее, класс функций, эквивалентных x) и отождествляется с классом

$$\hat{x} = \{x_n(t)\} \in \widehat{\tilde{L}[a,b]}.$$

Для доказательства возможности предельного перехода (14) сначала используем теорему Фату, потом теорему Лебега (называемую в англоязычной литературе теоремой о доминантной сходимости).

Таким образом, показано, каждый класс $\hat{x}$ из $\widehat{\tilde{L}[a,b]}$ может быть отождествлен с некоторой интегрируемой по Лебегу функцией x, т. е. с $x \in L[a,b]$. При этом $\|\hat{x}\| = \int_a^b |x(t)|dt$. В частности, если $\hat{x}$ содержит фундаментальные последовательности, сходящиеся к некоторой непрерывной функции x, то эта функция x образует класс в $L[a,b]$, с которым $\hat{x}$ отождествляется. Непрерывные функции образуют линейное многообразие в $L[a,b]$.

Отметим, что среди всех пополнений пространств непрерывных функций по норме $L_p[a,b], p \geq 1$ только пространство $L_2[a,b]$ является гильбертовым.

2. Следующий пример пополнения позволяет ввести новые важные пространства — пространства Соболева $W_p^l(\overline{G})$, в которых определены обобщенные производные, в частности, важный частный случай соболевских пространств — гильбертово пространство

$$H^1[a,b] := W_2^1[a,b].$$

Определение 1.36. *Пространство Соболева* $W_p^l(\overline{G})$, где $\overline{G} \subset \mathbb{R}^d$ определяется как пополнение линейного пространства l раз непрерывно дифференцируемых функций $x : \overline{G} \to \mathbb{R}$ по норме

$$\|x\| = \left(\int_{\overline{G}} |x(t)|^p dt + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \int_{\overline{G}} |D^\alpha x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Более подробно рассмотрим важный частный случай $\overline{G} = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $p = 2$: гильбертово пространство $H^1[a,b] = W_2^1[a,b]$.

Пространство $H^1[a,b]$ определяется как пополнение непрерывно дифференцируемых функций по норме

$$\|x\|_e = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt + \int_a^b |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

или по эквивалентной норме

$$\|x\|_1 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко видеть, что норма $\|\cdot\|_e$ порождена скалярным произведением. Норма пополнения $H^1[a,b]$ тоже порождена скалярным произведением и можно доказать, что $H^1[a,b]$ сепарабельно. Таким образом, пространство $H^1[a,b]$ является гильбертовым.

По определению классов в $H^1[a,b]$, для любых эквивалентных фундаментальных последовательностей непрерывно дифференцируемых функций $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$, принадлежащих некоторому классу $\hat{x}$ из $H^1[a,b]$, имеем

$$\int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|^2 dt + \int_a^b |x_n'(t) - x_m'(t)|^2 dt \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

и

$$\int_a^b |\tilde{x}_n(t) - \tilde{x}_m(t)|^2 dt + \int_a^b |\tilde{x}_n'(t) - \tilde{x}_m'(t)|^2 dt \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что последовательности непрерывных функций $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$ являются фундаментальными в пространстве $L_2[a,b]$ и, в силу полноты пространства $L_2[a,b]$, сходятся. (Это верно и для любой другой последовательности из класса $\hat{x}$.) Пусть предел последовательности $\{x_n\}$ есть некоторая функция $x \in L_2[a,b]$, а предел последовательности $\{x_n'\}$ — функция $y \in L_2[a,b]$.

Сергей Львович Соболев
(6.10.1908 – 3.01.1989)

В этом случае $y \in L_2[a,b]$ называется *обобщенной производной* по Соболеву функции $x \in L_2[a,b]$.

Приведем другое, более удобное для практического применения (эквивалентное) определение обобщенной производной, используя формулу интегрирования по частям.

По формуле интегрирования по частям, если x и φ — непрерывно дифференцируемые функции на $[a,b]$ и $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, то имеет место равенство

$$\int_a^b x(t)\varphi'(t)dt = -\int_a^b x'(t)\varphi(t)dt.$$

Этим равенством на множестве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций φ таких, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, производная $x' \in L_2[a,b]$ полностью определяется. Действительно, если есть еще одна функция z, удовлетворяющая этому тождеству:

$$\int_a^b x(t)\varphi'(t)dt = -\int_a^b z(t)\varphi(t)dt,$$

то

$$\int_a^b [x'(t) - z(t)]\varphi(t)dt = 0.$$

Отсюда, в силу плотности множества функций φ в пространстве $L_2[a,b]$, следует $x' = z$.

Вопрос. *Почему указанное множество функций φ плотно в пространстве $L_2[a,b]$?*

Если теперь взять $\hat{x} = \{x_n\} \in H^1[a,b]$, а функцию φ оставить из рассматриваемого класса непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю на концах отрезка, то функция φ отождествляется с элементом $\hat{\varphi}$ из $H^1[a,b]$:

$$\hat{\varphi} = \{\varphi_n\} \in H^1[a,b],$$

где $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$, в смысле сходимости в $H^1[a,b]$, и имеет место равенство

$$\int_a^b x_n(t)\varphi_n'(t)dt = -\int_a^b x_n'(t)\varphi_n(t)dt.$$

Следовательно, существует $z = \{x_n'\} \in L_2[a,b]$, для которой выполняется равенство

$$\int_a^b x(t)\varphi'(t)dt = -\int_a^b z(t)\varphi(t)dt.$$

Это равенство и берется за определение *обобщенной производной* z от функции $x \in H^1[a,b]$. Чуть ниже, через теорему вложения, мы покажем, что любая $x \in H^1[a,b]$ — это непрерывная функция.

Рассмотрим **пример** обобщенной производной.

Возьмем непрерывную функцию $x = x(t)$ — «уголок» на отрезке $[0,1]$, высоты $\frac{1}{2}$ и $x(0) = x(1) = 0$.

Классической производной у этой функции не существует. Однако проверим, что эта функция из пространства $H^1[0,1]$ и, следовательно, у нее есть обобщенная производная.

Постройте (нарисуйте) соответствующую ей последовательность $\{x_n\} \in H^1[a,b]$ такую, что

$$\{x_n'(t)\} \to z(t) := \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1/2 \quad (\text{или при } \ 0 \le t \le 1/2), \\ -1, & 1/2 \le t \le 1 \quad\ (\text{или при } \ 1/2 < t \le 1). \end{cases}$$

Проверяем, что по определению обобщенной производной, функция скачка z является обобщенной производной от функции x, т. е. для любой φ, непрерывно дифференцируемой на $[0,1]$ и равной нулю на концах отрезка, имеем

$$\int_0^1 x(t)\varphi'(t)dt = \int_0^{1/2} t\varphi'(t)dt + \int_{1/2}^1 (1-t)\varphi'(t)dt =$$
$$= -\int_0^1 z(t)\varphi(t)dt.$$

Упражнение 1.39. *Приведите другие примеры функций, у которых нет классической производной, но можете построить обобщенную производную.*

Замечание. Обратите внимание, что у функции скачка z нет ни классической производной, ни обобщенной производной по Соболеву.

Теорема 1.14 (Соболева о вложении). Пространство $H^1[a,b]$ вложено в $C[a,b]$.

Отметим, что вложение надо понимать в следующем смысле: все фундаментальные последовательности, образующие классы в $H^1[a,b]$, равномерно сходятся к непрерывным функциям, т. е. к функциям из $C[a,b]$, с которыми эти классы и отождествляются.

Доказательство основано на равенстве, которое имеет место для любой непрерывно дифференцируемой функции x:

$$x(t) = \int_\xi^t x'(s)ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds, \quad \xi \in [a,b]. \qquad (15)$$

Чтобы получить (15), сначала по теореме о среднем запишем равенство

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds = x(\xi), \quad \xi \in [a,b],$$

а затем равенство

$$\int_{\xi}^{t} x'(s)ds = x(t) - x(\xi).$$

В итоге получаем (15). Из равенства (15), полученного для любого $t \in [a,b]$, следуют оценки:

$$\begin{aligned}|x(t)| &\le \int_a^b |x'(s)|ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(s)|ds \le \\ &\le \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |x'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b |x(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le M\|x\|_1, \quad \text{где} \quad M = \max\left\{\sqrt{b-a}, \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right\}.\end{aligned}$$

Далее, поскольку полученные оценки имеют место для любого $t \in [a,b]$, получаем оценку для норм:

$$\|x\|_{C[a,b]} \le M\|x\|_1,$$

т. е. для любого элемента x из $C[a,b]$ норма в $C[a,b]$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$ и, следовательно, подчинена эквивалентной норме $\|\cdot\|_e$ в $H^1[a,b]$. Тогда для любой последовательности $\{x_n\}$, фундаментальной по норме $H^1[a,b]$, имеем

$$\|x_n - x_m\|_{C[a,b]} \le M\|x_n - x_m\|_1 \le cM\|x_n - x_m\|_{H^1[a,b]}.$$

Отсюда, в силу полноты $C[a,b]$, следует, что последовательность непрерывных функций $\{x_n\}$ сходится (равномерно) к некоторой непрерывной функции и, значит, класс $\hat{x} = \{x_n\}$ отождествляется с этой функцией. $\blacksquare$

Замечание. Наряду с пространством $H^1[a,b]$, при решении задач математической физики часто используют его подпространство $\overset{o}{H}{}^1[a,b]$ — непрерывных функций, обращающихся в ноль на границе.

Упражнение 1.40. *Приведите примеры функций из* $H^1[a,b]$, *не являющихся непрерывно дифференцируемыми. Найдите обобщенные производные от них. Можно ли найти обобщенную производную от функции* $x(t) = \mathrm{sign}(t)$?

Глава 2. Операторы

При изучении принципа сжимающих отображений, обобщенного принципа сжимающих отображений и их применения к решению функциональных уравнений, дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода мы отмечали, что метод последовательных приближений позволяет решать уравнения вида $x = Ax$ со сжимающим оператором A^k, $k \geq 1$ (необязательно линейным!). При изучении рядов Фурье мы отмечали, что методы рядов Фурье позволяют решать уравнения вида $(\lambda I - A)x = y$ с линейными операторами A, имеющими ортогональный базис из собственных векторов.

Теперь переходим к изучению свойств линейных операторов, в том числе, свойств обратных к ним операторов и других функций от операторов, а также непрерывных, вполне непрерывных и сопряженных операторов. Изученные свойства позволят строить методы решения различных операторных и дифференциально-операторных уравнений и, что не менее важно, отделять для этих уравнений корректные задачи от некорректных.

2.1. Линейные операторы. Пространство $L(X, Y)$

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$ и A — оператор (однозначное отображение), действующий из X в Y. Записывают это обычно следующим образом: $A : X \to Y$. В общем случае это означает, что A действует из $D(A) \subseteq X$ в $R(A) \subseteq Y$, где $D(A)$ — область определения, а $R(A)$ — область значения оператора A, т. е.

$$A : \ X \supseteq D(A) \to R(A) \subseteq Y.$$

Определение 2.1. Оператор $A : X \to Y$ называется *линейным*, если для любых $x, y \in D(A)$ и для любых чисел

$\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ имеет место равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Из этого определения следует, что $D(A)$ и $R(A)$ линейного оператора являются линейными многообразиями.

Приведем **примеры** линейных операторов A, действующих из $D(A) \subseteq C[a,b]$ в $R(A) \subseteq C[a,b]$.

1. Оператор умножения на функцию: $Ax(t) = f(t)x(t)$, где f — непрерывная на $[a,b]$ функция.

2. Интегральный оператор:

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

где $K(t,s)$ — непрерывная на $[a,b] \times [a,b]$ функция. Функция K называется *интегральным ядром* или ядром интегрального оператора A (не путать с ядром оператора — множеством $KerA := \{x \in D(A) :\ Ax = 0\}$).

3. Дифференциальный оператор: $Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ с областью определения $D(A)$, состоящей из непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$. Обратите внимание, что писать здесь $D(A) = C^1[a,b]$ некорректно, так как $C^1[a,b]$ — пространство непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с другой нормой, отличной от нормы пространства $C[a,b]$.

Упражнение 2.1. *Найдите области определения дифференциального оператора $Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ для случаев $A : C^1[a,b] \to C[a,b]$ и $A : C^1[a,b] \to L^2[a,b]$.*

4. В гильбертовом пространстве l_2 с ортогональным базисом $e_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots)$, $k \in \mathbb{N}$ линейные операторы $A_i, i = 1,2,3$, заданы на базисе следующим образом:

$$A_1 e_k := e_{k+1},\ k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad A_1 x = (x_2, x_3, \dots),\ x \in l_2;$$

$$A_2 e_1 = 0,\ A_2 e_{k+1} := e_k, k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad A_2 x = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

$$A_3 x = (\alpha x_1 + \beta x_2, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Вопрос. *Можно ли аналогичным образом через действие на элементы базиса задать оператор в пространствах $L_2[a,b]$ и $L_2(\mathbb{R})$?*

Упражнение 2.2. *Найдите области определения, области значения и проверьте линейность операторов A_1, A_2, A_3.*

Упражнение 2.3. *Приведите примеры линейных операторов, заданных матрицей и действующих*
а) в пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_e)$;
б) в пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_m)$.

Определение 2.2. Оператор $A : X \to Y$ (необязательно линейный) называется *непрерывным* в точке x, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$, сходящейся к точке x (т. е. $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$), последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к точке Ax (т. е. $\rho(Ax_n, Ax) \to 0$ при $n \to \infty$).

Приведенное определение непрерывности оператора в точке сформулировано на языке последовательностей (по Гейне). Из упражнения 1.5 следует эквивалентность определений непрерывности в точке отображения, действующего из одного метрического пространства в другое, на языке ε, δ (по Коши) и на языке последовательностей (по Гейне).

Для линейных операторов имеет место простое, но очень важное свойство, отличающее их от нелинейных операторов.

Утверждение 2.1. Для линейного оператора $A : X \to Y$, действующего в линейных нормированных пространствах X, Y, непрерывность оператора в нуле эквивалентна непрерывности в любой точке x.

Упражнение 2.4. *Докажите это утверждение с помощью замены $z_n = x_n - x$, из которой следует, что условие $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ равносильно условию $\|z_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Определение 2.3. Оператор A (необязательно линейный) называется *ограниченным*, если он ограниченное в X множество переводит в ограниченное в Y множество.

Нетрудно проверить, что для линейного оператора ограниченность оператора означает, что он шар радиуса единица с центром в нуле переводит в некоторый шар с центром в нуле. Этот факт, учитывая, что для линейного оператора $A0 = 0$, в нормированных пространствах можно записать следующим образом:

$$\exists M > 0 : \ \forall x \in X \ \Rightarrow \ \|Ax\| \leq M\|x\|. \tag{16}$$

Оказывается, что эта оценка является для линейного оператора удобным и часто используемым критерием ограниченности.

Теорема 2.1. Оператор $A : X \to Y$ является ограниченным, если и только если справедлива оценка (16).

Доказательство

$\Rightarrow$ Поскольку для любого линейного оператора $A0 = 0$, при $x = 0$ оценка (16) очевидна. Пусть $x \neq 0$. Положим $x' = \frac{x}{\|x\|}$, тогда $\|x'\| = 1$ и из ограниченности оператора следует $\|Ax'\| \leq M = M\|x'\|$, т. е.

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq M\|x'\|.$$

Отсюда, по свойству однородности нормы и свойству линейности оператора имеем

$$A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}Ax, \quad \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M.$$

Получили $\|Ax\| \leq M\|x\|$ для любого $x \in X$, т. е. (16).

$\Leftarrow$ Если верно (16), то для любого $x \in \overline{S_0^1}$ имеем $\|Ax\| \leq M$, т. е. A ограничен. ■

Линейность оператора — это настолько сильное условие, что для линейных операторов свойства ограниченности и непрерывности оказываются эквивалентными.

Теорема 2.2. Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор и $D(A) = X$. Оператор является непрерывным, если и только если он является ограниченным.

Доказательство

$\Rightarrow$ От противного. Пусть оператор A является непрерывным, но не является ограниченным. Тогда образ единичного шара не является ограниченным множеством. Следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X: \ \|x_n\| \le 1 \ \&\ \|Ax_n\| > n.$$

Построим последовательность $\{x'_n\} = \{x_n/n\}$. Тогда в силу оценки $\|x'_n\| = \|x_n\|/n \le \frac{1}{n}$ получаем, что $\|x'_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. По непрерывности оператора A отсюда следует, что $Ax'_n \to 0$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем соотношение $\|Ax'_n\| = \frac{1}{n}\|Ax_n\| \ge 1$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

$\Leftarrow$ Доказательство следует из оценки (16). ■

Упражнение 2.5. *Докажите, что операторы из примеров 1, 2, 4 являются линейными, ограниченными, непрерывными.*

Введем в пространстве $L(\mathbb{R})$ важные для приложений *операторы преобразования Фурье*, прямого и обратного:

$$Af(x) = \mathcal{F}[f](x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$Af(x) = \mathcal{F}^{-1}[f](x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

и *оператор свертки* с заданной функцией $g \in L(\mathbb{R})$:

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)f(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Упражнение 2.6. *Докажите, что операторы преобразования Фурье являются линейными ограниченными. Опишите множества значений этих операторов.*

Упражнение 2.7. *Докажите, что оператор свертки с ограниченной функцией g является линейным ограниченным оператором. Опишите множество значений этого оператора.*

Рассмотрим еще один пример линейного интегрального оператора, равного преобразованию Фурье от $f' \in L(\mathbb{R})$ — производной функции $f \in L(\mathbb{R})$ и принадлежащей пространству Соболева $H^1(\mathbb{R})$ (пространству функций из $L(\mathbb{R})$, имеющих обобщенные производные первого порядка):

$$Af(x) = \mathcal{F}[f'](x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f'(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Применяя к интегралу Фурье интегрирование по частям, получаем знаменитое равенство для преобразования Фурье от производной:

$$\mathcal{F}[f'](x) = (ix)\mathcal{F}[f](x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Это равенство лежит в основе применения преобразования Фурье к решению уравнений математической физики. А именно, преобразованное по Фурье уравнение в частных производных становится обыкновенным дифференциальным, решение которого находится с помощью методов теории ОДУ. После этого к найденному решению преобразованного уравнения применяется обратное преобразование Фурье.

Для линейных ограниченных операторов вводится важная характеристика — *норма оператора*, равная нижней грани всех M в оценке условия (16):

$$\|A\| := \inf\{M > 0 : \ \|Ax\| \le M\|x\| \ \forall x \in X\}. \tag{18}$$

Покажем, что для нормы оператора можно дать еще несколько (эквивалентных) определений. Всеми этими определениями, как мы увидим на примерах, пользуются при вычислении норм конкретных операторов.

Теорема 2.3. Пусть $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор, тогда

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Доказательство. Обозначим

$$a := \inf\{M > 0 : \ \|Ax\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}.$$

Тогда по определению точных граней множества имеем

$$a = \inf\left\{M > 0 : \ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M \ \forall x \in X \setminus \{0\}\right\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Далее, обозначим $y = x/\|x\|$. Тогда $\|y\| = 1$ и

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ay\|.$$

Последнее равенство верно, так как супремум не может достигаться во внутренней точке. ■

Практически, для нахождения нормы оператора обычно получают сначала оценку нормы сверху, используя определение нормы через инфимум, а потом оценку снизу, используя определение нормы через супремум. Если оценки сделаны аккуратно, то таким образом можно получить равенство для нормы.

Продемонстрируем этот характерный прием вычисления нормы оператора на **примерах** важных для приложений операторов — оператора умножения на непрерывную функцию f в пространстве $C[a, b]$ и интегральных операторов $A : C[a, b] \to C[a, b]$ и $A : L[a, b] \to C[a, b]$.

1. Рассмотрим оператор $Ax(t) = f(t)x(t)$. Имеем оценку сверху:

$$\|Ax\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)||x(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = M\|x\|,$$

где $M = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Отсюда, по определению нормы следует, что $\|A\| \le M$. С другой стороны, возьмем $x_0(t) \equiv 1$, тогда $Ax_0(t) = f(t)$. Отсюда следует оценка снизу:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \ge \|Ax_0\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| = M.$$

Следовательно, $\|A\| = M$.

В этом примере для доказательства оценки снизу мы нашли элемент x_0 такой, что $\|x_0\| = 1$ и $\|Ax_0\| = M$, откуда получили оценку снизу. В общем случае такого элемента может не существовать. При этом, если найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $\|Ax_n\| \to M$ при $n \to \infty$, то этого достаточно для оценки снизу. Покажем это на примере нахождения нормы интегрального оператора.

2. Рассмотрим оператор

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \qquad Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b],$$

где функция $K(\cdot,\cdot) \in C([a,b]\times[a,b])$. Имеем оценку сверху:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le$$

$$\le \max_{s\in[a,b]} |x(s)| \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|ds = M\|x\|,$$

где

$$M = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|ds = \int_a^b |K(t_0,s)|ds,$$

t_0 — точка, в которой достигается максимум интеграла от модуля функции K. Чтобы получить оценку снизу и показать, что M и есть норма A, возьмем последовательность непрерывных функций x_n с нормами, равными единице, такую, что последовательность значений интеграла $\int_a^b K(t_0,s)x_n(s)ds$ при $n \to \infty$ сходится к числу $\int_a^b |K(t_0,s)|ds$. Отсюда по теореме 2.3 получим оценку снизу и, следовательно, равенство $\|A\| = M$.

Вопрос. *Как практически построить такую последовательность* $\{x_n\}$*? Можно ли использовать последовательность функций, приближающих* $\mathrm{sign}(K(t_0, \cdot))$*?*

3. Рассмоторим оператор

$$A : L[a, b] \to C[a, b], \qquad Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds, \ t \in [a, b],$$

где по-прежнему $K(\cdot, \cdot) \in C([a, b] \times [a, b])$. Имеем оценку сверху

$$\|Ax\| = \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^b K(t, s)x(s)ds \right| \le$$

$$\le \max_{s,t \in [a,b]} |K(t, s)| \int_a^b |x(s)|ds = M\|x\|,$$

где

$$M = \max_{t,s \in [a,b]} |K(t, s)| = |K(t_0, s_0)|,$$

(t_0, s_0) — точка, в которой достигается максимум модуля функции K.

Упражнение 2.8. *Построить последовательность функций* $x_n \in L[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ *с нормами, равными единице, такую, чтобы получить оценку снизу и показать, что* $\|A\| = M$.

Указание. В качестве $\{x_n\}$ можно взять последовательность шапочек, сдвинутых в точку s_0.

С введенной нормой оператора множество всех линейных ограниченных операторов становится линейным нормированным пространством. Обычно его обозначают $L(X, Y)$. Если $X = Y$, то используют обозначение $L(X)$.

Сходимость последовательности операторов A_n к оператору A в пространстве $L(X, Y)$, как обычно в нормированном пространстве, означает сходимость по норме:

$$\|A_n - A\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

В отличие от *поточечной сходимости*[5], которая определяется как сходимость в каждой точке пространства:

$$\|A_n x - Ax\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in X,$$

сходимость по норме называют *равномерной*, так как имеет место следующий результат.

Утверждение 2.2. Сходимость по норме эквивалентна равномерной сходимости на любом ограниченном множестве, в частности, на единичном шаре.

Доказательство

$\Rightarrow$ $\qquad \|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\|\|x\|.$

$\Leftarrow$ Следует из определения нормы оператора:

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A_n - A)x\|. \quad \blacksquare$$

Рассмотрим **пример**, который показывает, что из поточечной сходимости равномерная не следует. Пусть задана последовательность $\{A_n\}$ операторов $A_n : l_2 \to l_2$, определяемых следующим образом:

$$A_n x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots), \ n \in \mathbb{N}.$$

Так как остаток сходящегося ряда является бесконечно малой величиной при $n \to \infty$, то в силу соотношения

$$\|A_n x - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

заключаем, что последовательность $\{A_n\}$ поточечно сходится к тождественному оператору. При этом без особых затруднений можно показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|A_n - I\| = 1$. Таким образом, последовательность $\{A_n\}$ сходится неравномерно к тождественному оператору.

[5] В литературе поточечную сходимость также называют сильной сходимостью.

2.2. Первый принцип линейного анализа — принцип ограниченности

В предыдущем параграфе мы ввели пространство $L(X,Y)$ и для последовательности операторов $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ определили два вида сходимости: поточечную и равномерную. Критерий поточечной сходимости дает теорема Банаха–Штейнгауза, доказательству которой мы предпошлем первый из принципов линейного анализа — принцип равномерной ограниченности.

Теорема 2.4 (принцип равномерной ограниченности). Если последовательность $\{A_n x\}$ ограничена при каждом фиксированном $x \in X$, то последовательность норм $\{\|A_n\|\}$ ограничена.

Доказательство этого принципа, как и двух других принципов линейного анализа — базовых теорем линейного функционального анализа, состоит из двух частей. Первую, вспомогательную часть формулируем как утверждение, а во второй части доказываем сам принцип.

Утверждение 2.3. Пусть $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ и пусть

$$\exists c > 0\ \exists \overline{S}^r_{x_0} :\ \forall x \in \overline{S}^r_{x_0} \ \Rightarrow\ \|A_n x\| \leq c,$$

тогда последовательность норм операторов A_n ограничена.

Доказательство. Возьмем любое $x \in X, x \neq 0$, тогда элемент

$$x_0 + r\,\frac{x}{\|x\|} \in \overline{S}^r_{x_0}.$$

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\left\| A_n \left(r\frac{x}{\|x\|} + x_0 \right) \right\| \leq c.$$

С другой стороны, в силу соотношений

$$c \geq \left\| A_n \left(r\frac{x}{\|x\|} + x_0 \right) \right\| = \left\| \frac{r}{\|x\|} A_n x + A_n x_0 \right\| \geq$$

$$\geq \frac{r}{\|x\|}\|A_n x\| - \|A_n x_0\| \geq \frac{r}{\|x\|}\|A_n x\| - c$$

получаем, что

$$\frac{r}{\|x\|}\|A_n x\| \leq 2c \quad \Rightarrow \quad \|A_n x\| \leq \frac{2c}{r}\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|A_n\| \leq \frac{2c}{r}. \quad \blacksquare$$

Доказательство принципа равномерной ограниченности проведем методом от противного. Предположим, что теорема не верна. Тогда последовательность $\{\|A_n\|\}$ не ограничена ни в одном замкнутом шаре, иначе по лемме она была бы ограничена.

Зафиксируем шар $\overline{S}_0$. В нем последовательность $\{\|A_n\|\}$ не ограничена. Следовательно, найдется точка $x_1 \in \overline{S}_0$ и номер n_1 такие, что $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. По непрерывности оператора A_{n_1} найдется целый шар $\overline{S}_1 \subset \overline{S}_0$ с центром в точке x_1 такой, что $\|A_{n_1} x\| > 1$ для любого $x \in \overline{S}_1$.

Далее, в $\overline{S}_1$, как по предположению в любом шаре, последовательность $\{\|A_n\|\}$ не ограничена. Следовательно, найдется точка $x_2 \in \overline{S}_1$ и номер $n_2 > n_1$ такие, что $\|A_{n_2} x_2\| > 2$ и т. д.

В результате получим последовательность точек x_k и последовательность вложенных замкнутых шаров $\overline{S}_k$ с центрами в x_k таких, что $\overline{S}_{k+1} \subset \overline{S}_k$ и $\|A_{n_k} x\| > k$ для любого $x \in \overline{S}_k$. Отметим, что радиусы вложенных замкнутых шаров можно считать стремящимися к нулю.

По лемме о вложенных замкнутых шарах найдется точка x, принадлежащая всем шарам. Следовательно, в этой точке $\|A_{n_k} x\| > k$ для любого k, т. е. нашлась такая точка x, что последовательность $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена. Пришли к противоречию. $\blacksquare$

Следующая теорема — критерий поточечной сходимости — может быть доказана как следствие принципа равномерной ограниченности, но может быть доказана независимо, и нередко эту теорему называют первым принципом анализа.

Теорема 2.5 (Банаха — Штейнгауза). Пусть задана последовательность $\{A_n\} \subset L(X,Y)$. Для того, чтобы $A_n \to A \in L(X,Y)$ при $n \to \infty$ поточечно (сильно), необходимо и достаточно, чтобы

1) последовательность $\{\|A_n\|\}$ была ограничена;

2) $A_n \to A$ при $n \to \infty$ поточечно на некотором линейном многообразии X', плотном в X.

Доказательство

$\Rightarrow$ Из условия поточечной (сильной) сходимости последовательности операторов A_n к A, т. е. сходимости $\|A_n x - Ax\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x \in X$, следует, что $\|A_n x\| \to \|Ax\|$, а потому последовательность $\{\|A_n x\|\}$ ограничена. Из принципа равномерной ограниченности следует, что $\{\|A_n\|\}$ ограничена. В качестве X' можно взять само X.

$\Leftarrow$ Пусть $x \notin X'$. Зададим $\varepsilon > 0$ и в силу плотности X' найдем $x' \in X'$ такое, что $\|x - x'\| < \varepsilon$.

Далее, пусть

$$c = \sup_{n=0,1,2,\ldots} \|A_n\|, \quad \text{где } A_0 = A.$$

Покажем, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$ поточечно. Для любого $x \in X$ имеем

$$\begin{aligned}\|A_n x - Ax\| &= \|A_n(x - x') + (A_n x' - Ax') + A(x' - x)\| \leq \\ &\leq \|A_n\|\|x - x'\| + \|A_n x' - Ax'\| + \|A\|\|x - x'\| \leq \\ &\leq 2\,c\,\varepsilon + \|A_n x' - Ax'\|.\end{aligned}$$

Воспользуемся сходимостью $A_n x'$ к Ax'. Найдем номер N такой, что при любых $n > N$ будет $\|A_n x' - Ax'\| < \varepsilon$. Тогда для всех $n > N$ справедливо неравенство

$$\|A_n x - Ax\| < (2c + 1)\varepsilon$$

и, следовательно, достаточность доказана. ■

Примеры

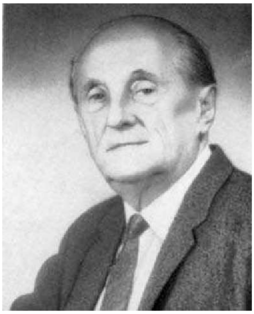
1. Последовательность дробно-разностных операторов A_n, заданных на пространстве $C(\mathbb{R})$:

$$A_n x(t) = \frac{x(t+\Delta_n) - x(t)}{\Delta_n}, \text{ где } \Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

не сходится поточечно к $\frac{dx}{dt}$ при $n \to \infty$. *Почему?*

2. Последовательность дробно-разностных операторов A_n, заданных на множестве непрерывно дифференцируемых функций, сходится в $C(\mathbb{R})$ поточечно к $\frac{dx}{dt}$. *Почему?*

Вопрос. *Какова связь этих двух примеров с теоремой Банаха — Штейнгауза?*



Гуго Дионисий Штейнгауз
(14.01.1887 – 25.02.1972)

В заключение этого параграфа сформулируем без доказательства еще два полезных утверждения о свойствах ограниченных операторов и пространства $L(X, Y)$. Доказательство полезно провести в качестве упражнения или посмотреть в [2].

Утверждение 2.4. Если X — линейное нормированное пространство, а Y — банахово, то $L(X, Y)$ является банаховым.

Утверждение 2.5 (продолжение по непрерывности). Пусть X — нормированное пространство, Y — банахово.

$A : X \to Y$ — линейный оператор с $\overline{D(A)} = X$ и на $D(A)$ оператор A ограничен. Тогда существует ограниченный оператор $\overline{A}$ — продолжение A на все пространство X такой, что

1) $\overline{A} = A$ на $D(A)$,

2) $\|\overline{A}\| = \|A\| := \sup\limits_{x \in D(A), \|x\|=1} \|Ax\|$.

Вопрос. *Возможно ли с помощью результата о продолжении по непрерывности исследовать вопрос о сходимости дробно-разностного оператора к оператору дифференцирования в $C(\mathbb{R})$? $C^1(\mathbb{R})$?*

2.3. Функционалы. Сопряженные пространства

Продолжаем изучать свойства пространства $L(X, Y)$ — пространства линейных ограниченных операторов $A : X \to Y$. Важный частный случай линейных ограниченных операторов, называемых *функционалами*, — это операторы с областью значений на действительной оси $\mathbb{R}$ или на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Как можно видеть из приведенных в предыдущем параграфе примеров, существует множество разнообразных линейных ограниченных операторов, действующих из ЛНП X в ЛНП Y. Однако, ввиду чрезвычайно большого разнообразия, их нельзя записать в какой-то общей форме для произвольной пары пространств X и Y. Оказывается, что в случае функционалов, действующих на конкретных пространствах X, это сделать можно.

Пространство линейных ограниченных функционалов $L(X, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ обозначают X^* и называют пространством, сопряженным к X. Функционалы, в отличие от операторов, обычно обозначают малыми буквами: $f(x)$ (как функции) или $\langle x, f \rangle$. Последнее обозначение возникло вследствие результата теоремы Рисса о представлении функционалов, заданных на гильбертовом пространстве, в форме скалярного произведения, которую мы докажем чуть ниже. Из этой же теоремы следует и определение линейной комбинации функционалов:

$$\langle x, \alpha f_1 + \beta f_2 \rangle := \overline{\alpha}\langle x, f_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, f_2\rangle, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Для ограниченных операторов, как вы помните, вводится важная характеристика — *норма оператора*, равная точной нижней грани множества всех констант M в оценке (16):

$$\|A\| := \inf\{\, M > 0 : \ \|Ax\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X \,\}.$$

В предыдущем параграфе было доказано, что для нормы оператора можно дать несколько (эквивалентных) определений:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

С введенной нормой пространство линейных ограниченных операторов $L(X, Y)$ становится линейным нормированным пространством. Следовательно, для любого функционала $f \in X^*$, как линейного ограниченного оператора, действующего из X в $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, норма может быть найдена с помощью следующих (эквивалентных) определений:

$$\|f\| = \inf\{\, M > 0 : \ |f(x)| \leq M\|x\| \ \forall x \in X \,\} =$$
$$= \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Упражнение 2.9. *Найдите норму функционала*

$$\langle x, f \rangle = \int_{-1}^{1} K(s)x(s)ds,$$

если

а) $f : C[-1, 1] \to \mathbb{R}$ *и* $K(s) = s^2$*;*

б) $f : L[-1, 1] \to \mathbb{R}$ *и* $K(s) = s$.

Большое число примеров линейных непрерывных функционалов можно будет построить после того, как мы покажем общий вид линейных непрерывных функционалов, заданных на разных линейных нормированных пространствах, в частности, на пространствах с базисом и на гильбертовом пространстве, — теорему Рисса, одну из самых знаменитых теорем линейного функционального анализа.

Прежде чем переходить к этим результатам, покажем, что для нормы функционала можно дать геометрическую интерпретацию.

Определение 2.4. Для любого линейного непрерывного функционала f, заданного на ЛНП, множество точек, удовлетворяющих равенству $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, называется *гиперплоскостью.*

Упражнение 2.10. *Нарисуйте на нормированном пространстве* $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_e)$ *гиперплоскости* $f(x) = 1$ *с различными параметрами, определяющими функционал* f. *Проследите норму* f *и расстояние от нуля до гиперплоскости в зависимости от этих параметров.*

Покажем, что расстояние от нуля до гиперплоскости $f(x) = 1$ обратно пропорционально $\|f\|$.

Утверждение 2.6. Пусть d — расстояние от нуля до гиперплоскости, определяемой равенством $f(x) = 1$. Тогда $d = \frac{1}{\|f\|}$.

Доказательство. По определению нормы и расстояния имеем

$$\|f\| = \sup_{y \neq 0} \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{|f(y)| \,/\, |f(y)|}{\|y\| \,/\, |f(y)|} = \sup_{y \neq 0} \frac{1}{\|y \,/\, f(y)\,\|} =$$

$$= \sup_{x\colon\ f(x)=1} \frac{1}{\|x\|} = \frac{1}{\inf\limits_{x\colon\ f(x)=1} \|x\|} = \frac{1}{d}. \quad \blacksquare$$

Теперь мы готовы перейти сначала к доказательству теоремы Рисса об общем виде функционала на гильбертовом пространстве, а затем к конструкции функционалов на конкретных пространствах с базисом.

Теорема 2.6 (Рисса). Пусть H — гильбертово пространство (комплексное или вещественное), тогда для любого $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что $\langle x, f \rangle = (x, y)$. При этом $\|f\| = \|y\|$.

Доказательство. Рассмотрим $Kerf$ — ядро функционала f, определяемое как множество всех таких элементов $z \in H$, что $\langle z, f \rangle = 0$. Без особых затруденений можно показать, что $Kerf$ — это подпространство в H. *Проверьте!*

Если $Kerf = H$, то доказательство тривиально: в качестве $y \in H$ можно взять ноль. Если $Kerf \neq H$, то $H = Kerf \oplus Kerf^{\perp}$. Следовательно, существует ненулевой элемент $z \in Kerf^{\perp}$. Будем считать, что $\langle z, f \rangle = 1$, иначе вместо z возьмем $z_0 = z/\langle z, f \rangle$. Пусть x — произвольный элемент из H, тогда

$$\langle x - \langle x, f \rangle z,\ f \rangle = \langle x, f \rangle - \langle x, f \rangle = 0\,,$$

следовательно, $x - \langle x, f \rangle z \in Kerf$, и поскольку $z \in Kerf^{\perp}$, имеем

$$(x - \langle x, f \rangle z,\ z) = (x, z) - \langle x, f \rangle\, \|z\|^2 = 0\,.$$

Отсюда получаем требуемое равенство:

$$\langle x, f \rangle = (x, z/\|z\|^2) =: (x, y).$$

Проверим, что $\|f\| = \|y\|$. По неравенству Коши — Буняковского

$$|\langle x, f \rangle| = |(x, y)| \le \|x\|\|y\| \ \Rightarrow\ \|f\| \le \|y\|$$

по определению нормы f. Опять же по неравенству Коши — Буняковского

$$|\langle y, f \rangle| = |(y, y)| = \|y\|^2 \le \|f\|\|y\|,$$

откуда $\|y\| \le \|f\|$ и, следовательно, $\|f\| = \|y\|$.

Единственность доказывается от противного. ■

Упражнение 2.11. *Докажите единственность.*

Таким образом, теорема Рисса указывает на то, что между пространствами H и H^* существует биективное отображение, сохраняющее норму. В случае вещественного гильбертова пространства это отображение обладает свойством линейности, т. е. пространства H и H^* изоморфны и изометричны ($H \simeq H^*$). В случае комплексного гильбертова пространства установленное биективное отображение не обладает свойством линейности: если для элементов $f_1, f_2 \in H^*$ имеем $f_1 \leftrightarrow y_1$, $f_2 \leftrightarrow y_2$, $y_1, y_2 \in H$, то для линейной комбинации $\alpha f_1 + \beta f_2$ получаем, что

$$\alpha f_1 + \beta f_2 \ \leftrightarrow \ \overline{\alpha} y_1 + \overline{\beta} y_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{P}.$$

Условно факт наличия биективного отображения, сохраняющего норму, часто записывают как равенство: $H = H^*$. Множества H и H^*, конечно, разной природы, но с точки зрения важных свойств ЛНП они тождественны.

Фридьеш Рисс
(22.01.1880 – 28.02.1956)

Упражнение 2.12. *С помощью теоремы Рисса постройте примеры функционалов, заданных на различных гильбертовых пространствах.*

Теперь, в качестве характерного примера нахождения общего вида функционала на пространстве со счетным базисом, найдем общий вид элементов из c_0^*.

Вопрос. *Является ли пространство c_0 гильбертовым?*

Покажем, что $(c_0)^* = l_1$. Напомним, что c_0 — это пространство последовательностей $x = \{\xi_n\}$, сходящихся к нулю, с нормой $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, а пространство l_1 — это пространство последовательностей $y = \{y_n\}$ с нормой $\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$.

Начнем с того, что проверим вложение: $(c_0)^* \subseteq l_1$. Знакомая вам система

$$e_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots), \quad k \in \mathbb{N}$$

образует базис в пространстве c_0, т. е. для любого $x = \{\xi_n\}$ из пространства c_0 имеет место разложение $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$.

Действительно, для $x = \{\xi_n\}$ из пространства c_0 имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \xi_n e_n - \sum_{n=1}^{k} \xi_n e_n \right\|_{c_0} \leq \sup_{n:\, k\geq n\geq m+1} |\xi_n| \, \|e_n\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Применим (почленно) линейный непрерывный функционал f к элементу $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \, e_n$ и получим

$$\langle x,\, f\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \, e_n,\, f \right\rangle =: \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \, y_n, \quad \text{где} \quad y_n = \langle e_n,\, f\rangle.$$

Проверим, что $\{y_n\} = \{\langle e_n, f\rangle\} \in l_1$. Положим

$$x^m = \sum_{n=1}^{m} \operatorname{sign}(y_n) \, e_n \in c_0,$$

тогда $\|x^m\| = 1$ и, с одной стороны,

$$\langle x^m, f\rangle = \sum_{n=1}^{m} |y_n| \leq \|f\| \|x^m\| = \|f\| \;\Rightarrow\; \|y\| \leq \|f\|,$$

с другой стороны,

$$|\langle x,f\rangle| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\,|y_n| \le \|x\|\,\|y\| \;\Rightarrow\; \|f\| \le \|y\| \;\;\Rightarrow\; \|y\| = \|f\|.$$

Таким образом, каждому элементу $f \in c_0^*$ мы поставили в соответствие элемент y из пространства l_1 такой, что $\|f\| = \|y\|$, т. е. показали изометричное вложение $(c_0)^* \subseteq l_1$.

Докажем теперь, что имеет место изоморфное и изометричное соответствие между пространствами l_1 и c_0^*, показав вложение в другую сторону: $l_1 \subseteq (c_0)^*$. Для этого каждому элементу $y \in l_1$ поставим в соответствие линейный ограниченный функционал f на пространстве c_0 такой, что $\|f\| = \|y\|$.

Возьмем произвольный элемент $y = \{y_n\}$ из l_1. На пространстве c_0 определим функционал f по формуле

$$\langle x,f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\,y_n.$$

Этот ряд сходится, так как

$$|\langle x,\ f\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\,y_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\,|y_n| \le \|x\|\,\|y\|.$$

Следовательно, $\|f\| \le \|y\|$. Покажем, что имеет место равенство $\|f\| = \|y\|$.

Система $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots)$, $k \in \mathbb{N}$, как мы проверили, образует базис в пространстве c_0. Возьмем теперь

$$x^k = \sum_{n=1}^{k}\operatorname{sign}(y_n)\,e_n \in c_0.$$

Имеем $\|x^k\| = 1$ и $\langle x^k,f\rangle = \sum_{n=1}^{k}|y_n|$. Отсюда следует, что $\|f\| \ge \|y\|$. В итоге получаем $\|f\| = \|y\|$.

Таким образом, каждому элементу $y \in l_1$ мы поставили в соответствие линейный ограниченный функционал f на пространстве c_0 такой, что $\|f\| = \|y\|$, т. е. показали изометричное вложение $l_1 \subseteq (c_0)^*$. Поскольку обратное к $l_1 \subseteq (c_0)^*$ вложение $(c_0)^* \subseteq l_1$ уже доказано, мы получили, что пространства l_1 и $(c_0)^*$ изоморфны и изометричны.

Как и в случае гильбертовых пространств, полученное соответствие между пространствами l_1 и $(c_0)^*$ коротко записывают как равенство: $l_1 = (c_0)^*$, хотя реально получено соответствие $l_1 \simeq (c_0)^*$.

Упражнение 2.13. *Докажите, что* $l_1^* = m$.

2.4. Второй принцип линейного анализа — принцип продолжимости

В этом параграфе докажем теорему Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов (второй принцип линейного анализа — принцип продолжимости) и следствия из нее. В следующем параграфе, используя эту теорему, покажем вид функционалов над пространством $C[a,b]$ — еще одну теорему Рисса. Далее, на базе изученных свойств сопряженных пространств X^*, введем сопряженные операторы — операторы на сопряженных пространствах. Затем определим замкнутые, компактные, обратные операторы и их роль в решении операторных уравнений.

Теорема 2.7 (Хана — Банаха). Пусть в вещественном нормированном пространстве X задан линейный ограниченный функционал f с областью определения $D(f) \subset X$. Тогда существует на всем X линейный ограниченный функционал $\hat{f}$ такой, что $\langle x, f\rangle = \langle x, \hat{f}\rangle$ для всех $x \in D(f)$, и $\|f\| = \|\hat{f}\|$.

Другими словами, существует продолжение f с линейного многообразия $D(f)$ на все X с сохранением нормы.

Доказательство второго принципа линейного анализа — теоремы Хана — Банаха, как и в случае доказательства первого принципа (принципа ограниченности), состоит из двух частей.

Утверждение 2.7 (лемма об элементарном продолжении). Пусть X — вещественное нормированное пространство и L — линейное многообразие в X. Пусть на L задан вещественный линейный ограниченный функционал f. Пусть $x_0 \notin L$ и L_1 — линейное многообразие всевозможных элементов вида $x = y + tx_0$, $y \in L$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда существует на всем L_1 линейный ограниченный функционал $\hat{f}$ такой, что $\|f\| = \|\hat{f}\|$ и $\langle x, f\rangle = \langle x, \hat{f}\rangle$ для всех $x \in L$.

Доказательство. Проверим сначала, что каждый элемент $x \in L_1$ представим в виде $y + tx_0$, где $t \in \mathbb{R}, y \in L$, единственным образом. Действительно, если

$$y + tx_0 = y' + t'x_0,$$

то при $t = t'$ представление единственно, если $t \neq t'$, то $y - y' = (t - t')x_0$, следовательно, $x_0 \in L$, что невозможно.

Рассмотрим теперь пару произвольных элементов $y_1, y_2 \in L$, тогда вследствие ограниченности f на L имеем

$$\langle y_1, f\rangle - \langle y_2, f\rangle = \langle y_1 - y_2, f\rangle \leq \|f\|\,\|y_1 - y_2\| \leq$$
$$\leq \|f\|\,\|y_1 + x_0\| + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|.$$

Полученное неравенство можно записать следующим образом:

$$\langle y_1, f\rangle - \|f\|\,\|y_1 + x_0\| \leq \langle y_2, f\rangle + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|.$$

Если зафиксировать y_2, а y_1 менять на L, то можно видеть, что левая часть ограничена сверху. Если зафиксировать y_1, а y_2 менять на L, то можно видеть, что правая часть ограничена снизу.

Положим

$$\alpha = \sup_{y_1 \in L} \{\langle y_1, f\rangle - \|f\|\,\|y_2 + x_0\|\},$$

$$\beta = \inf_{y_2 \in L} \{\langle y_2, f\rangle + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|\}.$$

Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\langle y_1, f\rangle - \|f\|\,\|y_1 + x_0\| \le \alpha \le \beta \le \langle y_2, f\rangle + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|.$$

Возьмем число γ такое, что $\alpha \le \gamma \le \beta$. Теперь для любых $y_1,\ y_2 \in L$ имеем

$$\langle y_1, f\rangle - \|f\|\,\|y_1 + x_0\| \le \gamma \le \langle y_2, f\rangle + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|. \qquad (19)$$

Определим функционал f_1 для $x \in L_1$ по формуле

$$\langle x,\ f_1\rangle = \langle y + tx_0,\ f_1\rangle = \langle y,\ f\rangle - \gamma t.$$

Тогда построенный функционал f_1 совпадает с f на L. *Проверьте!* Покажем теперь, что $\|f\| = \|f_1\|$. В силу свойств точной верхней грани имеем

$$\|f_1\| = \sup_{x\in L_1,\,\|x\|\le 1} |\langle x,\ f_1\rangle| \ge \sup_{x\in L,\,\|x\|\le 1} |\langle x,\ f_1\rangle| = \|f\|.$$

Таким образом, осталось показать, что для $x = y + tx_0$, где $t \in \mathbb{R}, y \in L$,

$$|\langle x,\ f_1\rangle| \le \|f\|\,\|x\|.$$

При $t = 0$ это неравенство справедливо. Проверим при $t \ne 0$. Из неравенства (19) для любого $y_1 \in L$ имеем

$$\langle y_1,\ f\rangle - \gamma \le \|f\|\,\|y_1 + x_0\|.$$

Полагая $y_1 = y/t$, получим

$$\langle y/t,\ f\rangle - \gamma \le \|f\|\,\|y/t + x_0\|.$$

С помощью этой оценки получаем

$$|\langle x,\ f_1\rangle| = |\langle y,\ f\rangle - \gamma t| = |t|\,|\langle y/t,\ f\rangle - \gamma| \le |t|\|f\|\ \|y/t + x_0\|.$$

Из полученного неравенства при $t > 0$ ($|t| = t$) получаем оценку

$$|\langle x,\ f_1\rangle| \le \|f\|\,\|x\| \ \Rightarrow \langle x,\ f_1\rangle \le \|f\|\,\|x\|.$$

При $t < 0$ ($|t| = -t$) получаем оценку

$$\langle x,\, f_1\rangle \geq -\|f\|\,\|x\|.$$

Следовательно,

$$|\langle x,\, f_1\rangle| \leq \|f\|\,\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|f_1\| \leq \|f\|\,.$$

В итоге, с учетом полученной выше оценки $\|f_1\| \geq \|f\|$, имеем равенство $\|f_1\| = \|f\|$. ■

Вопрос. *Где в доказательстве был использован тот факт, что X — вещественное нормированное пространство?*

Доказательство теоремы Хана — Банаха в сепарабельном случае. Предположим, что пространство X сепарабельно. Тогда в X существует X' — счетное всюду плотное подмножество. Занумеруем в последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ те элементы X', которые не попали в $D(f)$ — область определения функционала f.

Далее, обозначим $X_0 = L$ и по лемме об элементарном продолжении продолжим f с X_0 на $X_1 := X_0 + \{x_0\}$. Затем продолжим f на $X_2 := X_1 + \{x_1\}$ и т. д. В результате получим линейный ограниченный функционал $\hat{f}$ на $\hat{X} = \cup X_i$ — плотном в X подмножестве. *Почему $\hat{X}$ плотно в X?*

Доказательство завершаем применением леммы о продолжении линейного непрерывного оператора (функционала) со всюду плотного множества с сохранением нормы. ■

Замечание. В общем случае, когда X не является сепарабельным, доказательство теоремы завершается с использованием леммы Цорна. Кроме того, существует вариант теоремы на случай комплексного пространства — теорема Сухомлинова. В доказательстве этой теоремы отдельно строится продолжение действительной и мнимой частей функционала. Доказательства этих обобщений можно найти в [2].

При доказательстве различных фактов и решении задач чаще используются следствия из теоремы Хана — Банаха, чем сама теорема в чистом виде. Приведем эти следствия. Отметим важный факт конструктивности доказательств этих следствий.

Следствие 1. Пусть X — нормированное пространство и $x \in X, x \neq 0$. Тогда существует заданный на всем X линейный ограниченный функционал f такой, что $\|f\| = 1$ и $\langle x, f \rangle = \|x\|$.

Доказательство этого, как и всех остальных следствий, является конструктивным: будем строить функционалы с требуемыми свойствами сначала на некотором линейном многообразии, а потом продолжать их с сохранением нормы на все пространство.

Рассмотрим линейное многообразие $L = \{tx\}, t \in \mathbb{R}$. На L определим f следующим образом:

$$\langle tx, f \rangle = t\|x\|.$$

На L, как и требуется следствием 1, имеем $\langle x, f \rangle = \|x\|$ и для $y = tx$

$$|\langle y, f \rangle| = |\langle tx, f \rangle| = |t|\|x\| = \|tx\| = \|y\| \;\Rightarrow \|f\| = 1.$$

Осталось применить теорему Хана — Банаха (или Хана — Банаха — Сухомлинова) и продолжить построенный функционал на все пространство с сохранением нормы. ■

Следствие 2. Пусть в нормированном пространстве X задано линейное многообразие L и элемент $x_0 \notin L$ на расстоянии $d > 0$ от L. Тогда существует заданный на всем X линейный ограниченный функционал f такой, что

1) $\langle x, f \rangle = 0$ для любых $x \in L$;

2) $\langle x_0, f \rangle = 1$;

3) $\|f\| = 1/d$.

Доказательство. Возьмем $L_1 = L + \{x_0\}$. Любой элемент $y \in L_1$ по лемме об элементарном представлении однозначно представим в виде $y = x + tx_0$, где $x \in L$, $t \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$.

Определим f на элементах $y = x + tx_0 \in L_1$ следующим образом:

$$\langle y, f \rangle = t.$$

Выполнение условий 1), 2) легко проверяется. Теперь проверим выполнение условия 3):

$$|\langle y, f\rangle| = |t| = \frac{|t|\|y\|}{\|y\|} = \frac{\|y\|}{\|x/t + x_0\|} = \frac{\|y\|}{\|x_0 - (-x/t)\|} \le \frac{\|y\|}{d},$$

так как

$$\|x/t + x_0\| = \|x_0 - (-x/t)\| \ge d, \quad -x/t \in L.$$

Следовательно, $\|f\| \le \frac{1}{d}$.

Теперь, как обычно, чтобы доказать $\|f\| = 1/d$, надо проверить неравенство в другую сторону: $\|f\| \ge 1/d$. Проверим.

По определению расстояния найдутся такие $x_n \in L$, что

$$d = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|.$$

Тогда

$$1 = |\langle x_n - x_0, f\rangle| \le \|x_n - x_0\| \, \|f\|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем $1 \le d\|f\|$.

В итоге получили $\|f\| = 1/d$, и все условия следствия 2 выполняются на $L_1 = L + \{x_0\}$. Остается продолжить построенный функционал на все X с сохранением нормы. ■

Следствие 3. Линейное многообразие L не является плотным в банаховом пространстве X, если и только если найдется функционал $f \in X^*, f \ne 0$, такой, что $\langle x, f\rangle = 0$ для любых $x \in L$.

Доказательство

$\Rightarrow$ Пусть $\overline{L} \ne X$. Тогда найдется элемент $x_0 \in X$ такой, что $\rho(x_0, L) = d > 0$. По следствию 2 найдется функционал f такой, что $\langle x_0, f\rangle = 1$ (т. е. $f \ne 0$) и $\langle x, f\rangle = 0$ для всех $x \in L$.

$\Leftarrow$ Пусть существует функционал $f \ne 0$ и равный нулю на L. Если $\overline{L} = X$, то f равен нулю на всем $X = \overline{L}$. Следовательно, $\overline{L} \ne X$. ■

Следствие 4. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — линейно независимая система элементов в линейном нормированном пространстве X. Тогда найдется система всюду на X определенных линейных ограниченных функционалов $\{f_l\}_{l=1}^n$ такая, что $\langle x_k, f_l\rangle = \delta_{kl},\ k, l = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Возьмем x_1 и через L_1 обозначим линейную оболочку векторов $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Тогда в силу независимости векторов системы $\{x_k\}_{k=1}^n$ расстояние от x_1 до L_1, $\rho(x_1, L_1) > 0$. По следствию 2 найдем функцонал f_1 такой, что $\langle x_1, f_l\rangle = 1$ и $\langle x_i, f_l\rangle = 0$ для любого x_i, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Так же построим функционал f_2 такой, что $\langle x_2, f_2\rangle = 1$ и $\langle x_i, f_l\rangle = 0$ для любого x_i, $i = 1, 3, 4, \ldots, n$.

Затем построим функционалы f_3, f_4, $\ldots, f_n$ с требуемым свойством. ■

Систему $\{f_l\}_1^n$ со свойством $\langle x_k, f_l\rangle = \delta_{kl},\ k, l = 1, \ldots, n$ называют *ортогональной* к системе $\{x_k\}_1^n$, хотя пространство X необязательно является пространством со скалярным произведением.

В заключение этого параграфа сформулируем результат, двойственный по формулировке, но не по доказательству к следствию 4.

Утверждение 2.8. Пусть X — нормированное пространство и пусть $\{f_l\}_1^n$ — линейно независимая система ограниченных функционалов в линейном нормированном пространстве X^*. Тогда в X существует система $\{x_k\}_1^n$, к которой система $\{f_l\}_1^n$ ортогональна.

Смысл утверждения легко воспринимается в частном случае $X = X^{**}$, его справедливость в этом случае вытекает из следствия 4. Доказательство в общем случае можно найти в [2].

Определение 2.5. Пространство X с условием $X = X^{**}$ называется *рефлексивным*.

В этом определении равенство означает, что между пространствами X и X^{**} существует изоморфное и изометричное соответствие.

Упражнение 2.14. *Постройте с сохранением нормы продолжение функционала $f(x) = x_2$, заданного на прямой $L = \{x : x_2 = a\,x_1\}$, на все пространство $\left(\mathbb{R}^2, \|x\|_s\right)$.*

Упражнение 2.15. *С помощью функционалов, построенных на пространствах H и c_0, проверьте, что H является рефлексивным, а c_0 — нет.*

2.5. Функционалы на пространстве $C[a, b]$

После того, как мы изучили сопряженные пространства, вполне естественно было бы перейти к изучению сопряженных операторов, определяемых в сопряженных пространствах. Но сначала, используя теорему Хана — Банаха, мы докажем еще один полезный результат — теорему Рисса об общем виде функционала на пространстве $C[a, b]$ и, как следствие, получим важный для приложений функционал — знаменитую δ-функцию. Для этого напомним определение функций ограниченной вариации.

Определение 2.6. Функция $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ является функцией ограниченной вариации, если ограничена величина

$$\sup \sum_{k=1}^{n} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| =: V_a^b\,[\Phi],$$

где точная верхняя грань берется по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Множество всех функций $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации образует линейное пространство. На этом линейном пространстве норму можно определить слудующим образом:

$$\|\Phi\| = V_a^b\,[\Phi].$$

Полученное ЛНП обозначается $V[a, b]$.

Упражнение 2.16. *Проверьте, что отображение $\|\Phi\| = V_a^b\,[\Phi]$ удовлетворяет аксиомам нормы.*

Для ограниченной на $[a, b]$ функции f по функции ограниченной вариации Φ можно определить интеграл Римана — Стилтьеса:

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) := \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})),$$

где Δ — диаметр разбиения, т. е. $\Delta = \max\limits_{k=1,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$.

Теперь можем сформулировать и доказать теорему Рисса об общем виде функционалов на пространстве $C[a, b]$.

Теорема 2.8. Всякий линейный непрерывный функционал F на пространстве $C[a, b]$ представим в виде интеграла Римана — Стилтьеса по некоторой функции ограниченной вариации Φ:

$$\langle f,\, F\rangle = \int_a^b f(x) d\Phi(x), \quad f \in C[a, b]. \tag{20}$$

При этом $\|F\| = \|\Phi\|$.

Другими словами, для каждого линейного непрерывного функционала F, заданного на пространстве $C[a, b]$, найдется функция ограниченной вариации Φ, с помощью которой функционал задается в форме интеграла Стилтьеса и

$$\|F\| = V_a^b\,[\Phi].$$

Доказательство. Здесь мы фактически, как в других примерах по нахождению общего вида функционалов, займемся упражнениями по вычислению норм, но в новых для вас пространствах $M[a,b]$ и $V[a,b]$.

Пространство $C[a,b]$ можно рассматривать как подпространство $M[a,b]$ — всех ограниченных на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Тогда по теореме Хана — Банаха линейный непрерывный функционал F, заданный на пространстве $C[a,b]$, можно с сохранением нормы продолжить на пространство $M[a,b]$. В частности, продолженный на $M[a,b]$ функционал будет определен на «ступеньках» — функциях $h_\tau, \tau \in [a,b]$, вида

$$\tau = a \Rightarrow h_a(x) \equiv 2, \qquad \tau \in (a,b] \Rightarrow h_\tau(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,\tau], \\ 0, & x \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Определим

$$F(h_\tau) =: \Phi(\tau)$$

и сначала проверим, что Φ — функция ограниченной вариации, а потом покажем, что эта Φ и есть требуемая в теореме функция.

Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ точками x_k и положим

$$\alpha_k := \operatorname{sign}(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, F\left(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}\right) = \\ &= F\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}\right)\right) \le \\ &\le \|F\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}\right)\right\|.\end{aligned}$$

Функция $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(h_{x_k}-h_{x_{k-1}}\right)$ принимает значения ±1 или 0, следовательно, ее норма равна 1 и

$$\sum_{k=1}^{n}|\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})|\le\|F\|\;\Rightarrow\;V_a^b[\,\Phi\,]\le\|F\|.$$

Итак, мы построили Φ — функцию ограниченной вариации, определяемую функционалом F на «ступеньках». Кроме того, доказали одно из требуемых неравенств для норм.

Покажем, что именно с помощью этой функции Φ функционал задается в виде интеграла Римана — Стилтьеса. Пусть f — произвольная непрерывная на $[a,b]$ функция. Возьмем $\varepsilon>0$ и выберем $\delta>0$ так, чтобы $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ при $|x'-x''|<\delta$.

Выберем теперь разбиение так, чтобы было $\Delta<\delta$, и рассмотрим ступенчатую функцию f_ε:

$$f_\varepsilon(x)=f(x_k)\text{ при }x\in(x_{k-1},x_k),\;k=1,2,\ldots,n,\quad f_\varepsilon(a)=f(a).$$

Эту функцию можно записать так:

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)[h_{x_k}-h_{x_{k-1}}].$$

Ясно, что при всех $x\in[a,b]$ справедливо неравенство $|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon$, следовательно, имеем $\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|<\varepsilon$. Найдем $F(f_\varepsilon)$:

$$F(f_\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\left[F\left(h_{x_k}\right)-F\left(h_{x_{k-1}}\right)\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\left[\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})\right].$$

Следовательно, $F(f_\varepsilon)$ представляет собой интегральную сумму для

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Поэтому при достаточно мелком разбиении отрезка

$$\left|F(f_\varepsilon) - \int_a^b f(x)d\Phi(x)\right| < \varepsilon.$$

Но в то же время

$$|F(f_\varepsilon) - F(f)| \le \|F\|\|f_\varepsilon - f\| \le \|F\|\,\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|F(f) - \int_a^b f(x)d\Phi(x)\right| < \varepsilon(1+\|F\|) \quad \Rightarrow \quad F(f) = \int_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Мы уже получили неравенство

$$V_a^b\,[\,\Phi\,] \le \|F\|.$$

Неравенство в противоположную сторону: $\|F\| \le V_a^b\,[\,\Phi\,]$ получается из теоремы о среднем для интеграла Римана — Стилтьеса:

$$|F(f)| = \left|\int_a^b f(x)d\Phi(x)\right| \le \max_{t\in[a,b]} |f(x)|\, V_a^b\,[\,\Phi\,]. \quad \blacksquare$$

Определение 2.7. Функционал $F_\tau(f) = f(\tau) =: \delta_\tau$ называется *δ-функцией*, сосредоточенной в точке τ (*δ-функцией*, сдвинутой в точку τ), в частности, просто *δ-функцией* в случае $\tau = 0$.

На функциях $f \in C[a,b]$ функционал δ-функция — это функционал, порождаемый функцией $\Phi(x) = -h_\tau(x)$:

$$F_\tau(f) = \int_a^b f(x)d\Phi(x) = -\int_a^b f(x)dh_\tau(x) = f(\tau).$$

Вопрос. *Как выглядит график функции $-h_\tau(x)$?*

В частности, на функции $f(x) = 1$ функционал $F_\tau =: \delta_\tau$ равен единице. Физическая интерпретация такого функционала — плотность точечной массы, равной единице, сосредоточенной в точке τ. С интегралами вида (20) вы будете встречаться в курсе уравнений математической физики и, наверное, уже встречались в теории вероятностей.

Упражнение 2.17. *Приведите примеры функционалов с кусочно-непрерывными функциями* $\Phi(x)$.

Упражнение 2.18. *Приведите примеры функционалов над пространством* $C[a,b]$ *в теории вероятностей (например, связанные с моментами случайной величины).*

2.6. Сопряженные операторы

При исследовании свойств операторов важное значение имеет поведение сопряженных к ним операторов.

Определение 2.8. Пусть A — линейный ограниченный оператор в нормированных пространствах X, Y: $A \in L(X,Y)$. Тогда сопряженный оператор $A^* \in L(Y^*, X^*)$ определяется следующим равенством:

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle, \quad x \in X, \ f \in Y^*.$$

Разберемся с этим определением и покажем, что такой оператор A^* действительно существует, что $A^* \in L(Y^*, X^*)$ и, более того, $\|A\| = \|A^*\|$. Для этого определим функционал φ на пространстве X:

$$\varphi(x) = \langle x, \varphi\rangle := \langle Ax, f\rangle.$$

Сначала проверим, что функционал φ определен на всем X и что он линеен (благодаря линейности A и f):

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \langle A(\alpha x + \beta y), f\rangle = \alpha\langle A(x), f\rangle + \beta\langle A(y), f\rangle = \\ = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Теперь проверим, что функционал φ ограничен. Имеем

$$|\langle x, \varphi\rangle| = |\langle Ax, f\rangle| \le \|f\|\|Ax\| \le \|f\|\|A\|\|x\|. \tag{21}$$

Отсюда следует, что на элементах $f \in Y^*$ равенство

$$\langle x, \varphi \rangle = \langle Ax, f \rangle =: \langle x, A^* f \rangle$$

задает линейный ограниченный оператор A^*: $A^* f := \varphi$.

Проверим, что $\|A^*\| = \|A\|$. Из оценки (21) следует, что

$$|\langle Ax, f \rangle| = |\langle x, A^* f \rangle| \le \|f\| \|A\| \|x\| \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \|A^* f\| \le \|A\| \|f\| \;\Rightarrow\; \|A^*\| \le \|A\|.$$

Чтобы доказать неравенство в другую сторону, используем следствие 1 из теоремы Хана — Банаха. Пусть $A \in L(X, Y)$, тогда для каждого x_0 такого, что $Ax_0 \ne 0$, существует функционал $f_0 \in Y^*$ такой, что $\|f_0\| = 1$ и $\langle Ax_0, f_0 \rangle = \|Ax_0\|$. Из этого следствия имеем

$$\|Ax_0\| = |\langle Ax_0, f_0 \rangle| = |\langle x_0, A^* f_0 \rangle| \le \|A^*\| \|f_0\| \|x_0\| = \|A^*\| \|x_0\|.$$

Отсюда $\|A\| \le \|A^*\|$. Значит, $|A^*\| = \|A\|$.

Чтобы на практике пользоваться определением 2.8 для построения сопряженного оператора A^*, надо начать с того, что построить $\langle Ax, f \rangle$, а потом перекомпоновать это выражение так, чтобы преобразованное выражение определяло действие некоторого функционала на x: $\langle x, A^* f \rangle$.

Рассмотрим **пример**. Используя смену порядка суммирования, построим оператор, сопряженный к матричному оператору $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$:

$$Ax = y : x = \{x_1, x_1, \ldots, x_n\},$$
$$y = \{y_1, y_1, \ldots, y_m\},\; y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j,\; k = 1, \ldots, m.$$

$$\langle Ax, f \rangle = \sum_{k=1}^{m} y_k f_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right) f_k =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k \right) x_j = \langle x, A^* f \rangle \;\;\Rightarrow\;\; A^* f = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k.$$

В качестве второго **примера** рассмотрим интегральный оператор с непрерывным ядром и с помощью изменения порядка интегрирования построим сопряженный к нему оператор.

Сначала рассмотрим случай пространства $L_2[a,b]$ над полем действительных чисел:

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \ \ A : L_2[a,b] \to L_2[a,b].$$

Тогда из цепочки равенств

$$\begin{aligned}\langle Ax, f\rangle = (Ax, f) &= \int_a^b f(t)dt \int_a^b K(t,s)x(s)ds = \\ &= \int_a^b \int_a^b x(s)K(t,s)f(t)dtds = \\ &= (x, A^*f) = \int_a^b x(s)ds \int_a^b K(t,s)f(t)dt\end{aligned}$$

следует, что сопряженный оператор определяется равенством

$$A^*f(s) = \int_a^b K(t,s)f(t)dt.$$

Теперь рассмотрим случай пространства $L_2[a,b]$ над полем комплексных чисел:

$$\begin{aligned}\langle Ax, f\rangle = (Ax, f) &= \int_a^b \overline{f(t)}dt \int_a^b K(t,s)x(s)ds = \\ &= \int_a^b \int_a^b x(s)K(t,s)\overline{f(t)}dtds = \\ &= (x, A^*f) = \int_a^b x(s)ds \int_a^b \overline{\overline{K(t,s)}f(t)}dt.\end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае

$$A^*f(s) = \int_a^b \overline{K(t,s)}f(t)dt.$$

Упражнение 2.19. *Задайте ограниченный оператор в пространстве l_1 и постройте к нему сопряженный.*

Определение 2.9. Если для операторов $A \in L(X, Y)$ и $A^* \in L(Y^*, X^*)$ выполняется условие $A = A^*$ и, значит, $X = Y^*$, $Y = X^*$, то такой оператор называется *самосопряженным.*

Обычно самосопряженные операторы рассматривают в гильбертовых пространствах H.

Определение 2.10. Оператор $A \in L(H)$ называется *эрмитово самосопряженным,* если выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых $x, y \in H$.

Упражнение 2.20. *Укажите условия, при которых заданные матричный и интегральный операторы являются самосопряженными.*

Теорема 2.9 (о свойствах эрмитово самосопряженных операторов). Пусть $A, B \in L(H)$ — эрмитово самосопряженные операторы. Тогда

1. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ оператор $\alpha A + \beta B$ является эрмитово самосопряженным.

Доказательство

$$((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) = \\ = \alpha(x, Ay) + \beta(x, By) = (x, \alpha Ay) + (x, \beta By) = \\ = (x, \alpha Ay + \beta By) = (x, (\alpha A + \beta B)y). \quad \blacksquare$$

2. Оператор AB является эрмитово самосопряженным, если и только если операторы A и B перестановочны.

Доказательство

$$(ABx, y) = (Bx, Ay) = (x, BAy). \quad \blacksquare$$

3. Если оператор A является эрмитово самосопряженным, то (Ax, x) — вещественное число и

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. (Ax, x) — вещественное число, так как

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}.$$

Пусть $c_A := \sup\limits_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)|$. По неравенству Коши — Буняковского и по свойству нормы оператора имеем

$$c_A := \sup_{\|x\| \le 1} |(Ax, x)| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \, \|x\| \le \|A\| \quad \Rightarrow \quad c_A \le \|A\|.$$

Доказательство неравенства $c_A \ge \|A\|$ можно посмотреть в [2]. ■

Определение 2.11. Среди эрмитово самосопряженных операторов выделяют такие, что $(Ax, x) > 0$ ($(Ax, x) \ge 0$). Такие операторы называют *положительными (неотрицательными)* и обозначают $A > 0$ ($A \ge 0$). Если для эрмитово самосопряженных операторов A, B выполняется условие $A - B > 0$ ($A - B \ge 0$), то это обозначают $A > B$ ($A \ge B$).

Упражнение 2.21. *Докажите, что если $A \ge 0$, то для любых $x, y \in H$ справедливо обобщенное неравенство Коши — Буняковского:*

$$|(Ax, y)| \le \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{(Ay, y)}.$$

Упражнение 2.22. *Пусть A, B, C — эрмитово самосопряженные операторы. Докажите*

1) $A \ge A$;
2) $A \ge B,\ B \ge C \quad \Rightarrow \quad A \ge C$;
3) $A \ge B,\ B \ge A \quad \Rightarrow \quad A = B$;
4) $A \ge B, \alpha \ge 0 \ \Rightarrow \ \alpha A \ge \alpha B$; $A \ge B, \alpha \le 0 \ \Rightarrow \ \alpha A \le \alpha B$.

Покажем, как понятие сопряженного оператора можно перенести на случай неограниченных операторов.

Пусть заданы X, Y — ЛНП (оба над полем вещественных или комплексных чисел), оператор A с областью определения $D(A) \subset X$ и $f \in Y^*$. Для заданного $f \in Y^*$ и для $x \in D(A)$ образуем выражение $\langle x, \varphi \rangle = \langle Ax, f \rangle$. По x оно линейно на $D(A)$. Разберемся, когда это выражение определяет единственный функционал $\varphi \in X^*$.

Утверждение 2.9. Для того, чтобы представление было единственным, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{D(A)} = X$.

Доказательство

$\Rightarrow$ Допустим, что $\overline{D(A)} \neq X$. По следствию 3 из теоремы Хана — Банаха найдется $\varphi_0 \in X^*, \varphi_0 \neq 0$ такой, что $\langle x, \varphi_0 \rangle = 0$ для всех $x \in \overline{D(A)}$. Тогда

$$\langle x, \varphi \rangle + \langle x, \varphi_0 \rangle = \langle Ax, f \rangle.$$

Это противоречит единственности представления.

$\Leftarrow$ Пусть $\overline{D(A)} = X$. Если

$$\langle Ax, f \rangle = \langle x, \varphi_1 \rangle = \langle x, \varphi_2 \rangle,$$

то $\langle x, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$ для всех x, принадлежащих плотному в X множеству $D(A)$. Тогда, в силу продолжения по непрерывности $\langle x, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$ для всех $x \in X$, т. е. $\langle x, \varphi_1 \rangle = \langle x, \varphi_2 \rangle$ и продолжение единственно. $\blacksquare$

Итак, мы показали, что если $D(A)$ плотно в X, то функционал, задающий сопряженный оператор, определяется единственным образом, но остается вопрос.

Вопрос. *Существует ли $\varphi \in X^*$ такой, что имеет место равенство*

$$\varphi(x) = \langle Ax, f \rangle? \tag{22}$$

Введем множество $D^* \subset Y^*$ тех f, для которых существует такой $\varphi \in X^*$, что это равенство выполняется. Тем самым для $f \in D^* \subset Y^*$ задан оператор A^* формально той же формулой (22), что и в случае ограниченных операторов:

$$\langle Ax, f \rangle = \langle x, A^* f \rangle.$$

Отметим, что множество D^* не пусто, в нем, по крайней мере, содержится нулевой элемент.

Рассмотрим важный **пример**. Построим оператор, сопряженный к оператору $A = \frac{d}{dt}$ в пространстве $L_2[a, b]$ с областью определения $D(A) = H_0^1[a,b]$ — множеством функций из пространства Соболева $H^1[a,b]$, равных нулю на концах отрезка. Оператор A является неограниченным в пространстве $L_2[a,b]$. В силу равенства $\overline{D(A)} = L_2[a,b]$ существует множество D^* такое, что для $f \in D^*$ по определению сопряженнного оператора имеем

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle.$$

Для оператора $A = \frac{d}{dt}$ в пространстве $L_2[a,b]$ это равенство по теореме Рисса запишется так:

$$(Ax, f) = \int_a^b \frac{dx(t)}{dt}\,\overline{f(t)}dt.$$

Для $x \in H_0^1 \subset H^1$ $(\overline{H_0^1} = H)$ имеет место равенство

$$(Ax, f) = \int_a^b \frac{dx(t)}{dt}\,\overline{f(t)}dt = -\int_a^b x(t)\,\overline{\frac{df(t)}{dt}} =: (x, A^* f).$$

Следовательно, $A^* f = -\frac{d}{dt}$.

Упражнение 2.23. *Постройте оператор, сопряженный к оператору $A = \frac{d^2}{dt^2}$, действующему в пространстве $L_2[0,1]$, предварительно задав его область определения $D(A)$.*

2.7. Обратные операторы

Обратные операторы — это центральная тема главы «Операторы». Многочисленные модели в различных областях приводят к операторным уравнениям вида $Ax = y$. Решить такое уравнение означает найти обратный оператор A^{-1}.

Определение 2.12. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. Пусть линейный оператор $A : X \to Y$ осуществляет взаимно-однозначное отображение $D(A) \subseteq X$ на $R(A) \subseteq Y$. Тогда обратное (однозначное) отображение $A^{-1} : R(A) \to D(A)$ называется *обратным оператором.*

Эквивалентным образом обратный оператор A^{-1} можно определить как оператор, для которого выполняются равенства

$$A^{-1}Ax = x,\ x \in D(A), \qquad AA^{-1}y = y,\ y \in R(A),$$

коротко:

$$A^{-1}A = I_{[D(A)]}, \qquad AA^{-1} = I_{[R(A)]},$$

где $I_{[D(A)]}$, $I_{[R(A)]}$ — это единичные операторы на замыкании линейных многообразий $D(A)$, $R(A)$, соответственно.

Докажем несколько простых полезных утверждений про обратные операторы.

Утверждение 2.10. Линейный оператор $A : X \to Y$ переводит $D(A)$ в $R(A)$ взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда ядро оператора $N(A) = \{0\}$.

Доказательство

$\Rightarrow$ Пусть линейный оператор $A : X \to Y$ переводит $D(A)$ в $R(A)$ взаимно-однозначно. Это означает, что для любого элемента $y \in R(A)$ существует единственный $x \in D(A)$ такой, что $Ax = y$. Предположим, что, однако, $N(A) \neq \{0\}$. Возьмем $z \in N(A)$, $z \neq 0$. Тогда $A(x + z) = Ax = y$, т. е. нет взаимно-однозначности отображения.

$\Leftarrow$ Доказательство от противного. ■

Упражнение 2.24. *Проверьте, что для линейного оператора оператор $A^{-1} : R(A) \to D(A)$ является линейным оператором.*

Утверждение 2.11. Оператор A^{-1} существует и одновременно является ограниченным тогда и только тогда, когда существует $m > 0$ такое, что

$$\forall x \in D(A) \ \Rightarrow \ \|Ax\| \geq m\|x\|.$$

Доказательство

$\Rightarrow$ Пусть $A^{-1} : D(A^{-1}) = R(A) \to D(A)$ существует и ограничен. Это означает, что

$$\exists c > 0 : \ \forall y \in R(A) \ \Rightarrow \ \overline{R(A)} = Y \ \& \ \|A^{-1}y\| \le c\|y\|.$$

Полагая $y = Ax$, $x = A^{-1}y$, получаем требуемую оценку с $m^{-1} := c$.

$\Leftarrow$ Пусть выполнена требуемая оценка. Тогда, если $Ax = 0$, т. е. $x \in N(A)$, то из этой оценки следует, что $x = 0$, т. е. $N(A) = \{0\}$. Тогда по утверждению 2.10 следует, что A^{-1} существует. Полагая $y = Ax$, $x = A^{-1}y$ и заменяя m^{-1} на c, из данной оценки получаем ограниченность оператора A^{-1}: $\|y\| \ge m\|A^{-1}y\| \ \Leftrightarrow \ \|A^{-1}y\| \le c\|y\|$. ■

Определение 2.13. Если оператор A^{-1} является ограниченным, то линейный оператор A называют *непрерывно обратимым.*

Утверждение 2.11 в этих терминах можно сформулировать следующим образом.

Утверждение 2.12. Линейный оператор A является непрерывно обратимым тогда и только тогда, когда существует $m > 0$ такое, что

$$\forall x \in D(A) \ \Rightarrow \ \|Ax\| \ge m\|x\|.$$

Сформулируем здесь, пока без доказательства, теорему Банаха об ограниченности обратного оператора — третий принцип линейного анализа. Докажем ее в следующих параграфах для замкнутых операторов — более широкого класса операторов, чем ограниченные, предварительно изучив замкнутые операторы.

Теорема 2.10 (Банаха об обратном операторе). Если A — линейный ограниченный оператор, взаимно-однозначно отображающий $D(A) \subseteq X$ на все банахово пространство Y, то обратный оператор ограничен.

В качестве **примеров** нахождения обратного оператора рассмотрим решение интегрального уравнения и задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Решение задач для уравнений в частных производных и более общих уравнений методами функционального анализа рассмотрим в последних параграфах.

1. Рассмотрим в $C[0,1]$ интегральное уравнение:

$$Ax(t) := x(t) - \int_0^1 ts\, x(s)ds = y(t), \quad y \in C[0,1].$$

Вопрос. *Какие методы решения интегральных уравнений на данном этапе вы уже знаете?*

Поскольку в данном примере интегральный оператор имеет вырожденное ядро, то проще всего применять метод вырожденных ядер для решения этого уравнения, т. е. искать x в форме $x(t) = y(t) + ct$ с неизвестной константой $c = \int_0^1 s\, x(s)ds$. Подставляем $x(t) = y(t) + ct$ в уравнение, получаем равенство для c:

$$y(t) + ct - \int_0^1 ts\,(y(s) + cs)ds = y(t).$$

Отсюда

$$c = \int_0^1 s\, y(s)\, ds + c/3 \;\Rightarrow\; c = \frac{3}{2}\int_0^1 s\, y(s)\, ds \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x(t) = y(t) + \frac{3t}{2}\int_0^1 s\, y(s)\, ds =: A^{-1}y(t).$$

Мы такие операторы на предмет ограниченности изучали: оператор A^{-1} является ограниченным в $C[0,1]$.

2. Рассмотрим в $C[0,T]$ задачу Коши для ОДУ:

$$D_n x(t) = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = y(t), \quad t \in [0,T],$$

$$x(0) = x'(0) = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Другими словами, рассмотрим дифференциальный оператор D_n, областью определения которого является множество n раз непрерывно дифференцируемых функций из $C[0,T]$ с заданными граничными условиями.

Решая методом вариации произвольных постоянных:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, x_k(t),$$

находим

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) \int_0^t \frac{W_k(s)}{W(s)}\, y(s)\, ds = D_n^{-1} y(t),$$

где $x_k = ?$, $W = ?$, $W_k = ?$

Зная свойства интегральных операторов, вновь получаем, что обратный оператор D_n^{-1} является ограниченным на пространстве функций из $C[0,T]$.

Рассмотрим важный в приложениях оператор, обратный к оператору $(I - A)$. Следующая теорема дает конструктивное доказательство существования и ограниченности оператора $(I - A)^{-1}$ при условии $\|A\| < 1$.

Теорема 2.11. Пусть $A \in L(X)$ и $\|A\| < 1$, пространство X — банахово. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим. При этом справедлива оценка

$$\|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим в $L(X)$ ряд

$$I + A + A^2 + A^3 + \ldots$$

Ряд сходится: $S_n \to S$ при $n \to \infty$, так как он сходится абсолютно (критерий полноты пространства). Далее имеем

$$(I - A)\, S_n = I - A^{n+1}, \quad S_n\, (I - A) = I - A^{n+1}.$$

При $n \to \infty$ имеем $\|A^{n+1}\| \le \|A\|^{n+1} \to 0$. Следовательно, пользуясь определением обратного оператора через правый и левый обратный, получаем

$$S = I + A + A^2 + A^3 + \ldots \ = (I - A)^{-1}.$$

Оценка получается с использованием оценки для суммы геометрической прогрессии. ■

Обратите внимание, что с конструкцией операторов, обратных к операторам вида $I - A$, мы уже встречались в первой главе, когда рассматривали уравнения со сжимающими операторами A. В третьей главе мы снова будем рассматривать обратные операторы к операторам вида $I - A$, на этот раз с вполне непрерывным оператором A. Покажем, что в отличие от обратных к вполне непрерывным операторам A, обратные к операторам вида $I - A$ являются ограниченными.

На полученную важную для приложений теорему 2.11 можно посмотреть еще и с другой стороны: функция $f(z) = \frac{1}{1-z}$ является аналитической в круге $|z| < 1$ и, следовательно, раскладывается в ряд Лорана (который совпадает с рядом Тейлора) в этом круге:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

Тогда соответствующая функции $f(z) = \frac{1}{1-z}$, аналитической в круге $|z| < 1$, функция $f(A) = (I - A)^{-1}$ от оператора A определяется через ряд

$$I + A + A^2 + A^3 + \ldots \ =: (I - A)^{-1},$$

сходящийся при условии $\|A\| < 1$.

С помощью идеи построения функций от операторов через разложение в сходящийся ряд можно определять различные аналитические функции от операторов.

Упражнение 2.25. *Для линейного ограниченного оператора A, действующего в банаховом пространстве X, постройте линейные ограниченные операторы* $\sin(tA)$, $\cos(tA)$, $\exp(tA)$, $t \ge 0$.

Эти операторы будут использованы в последней главе курса для построения решений задач Коши для дифференциально-операторных уравнений — дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами.

2.8. Спектр оператора. Резольвента

В этом параграфе мы переходим к изучению спектра линейного оператора A, определяемого через поведение оператора, обратного к $\lambda I - A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Для оператора $\lambda I - A$ часто используют другое обозначение: $\lambda - A$.

Определение 2.14. Пусть X — линейное нормированное пространство и линейный оператор $A : X \to X$. Рассмотрим три возможности поведения оператора $\lambda - A$:

1) Оператор $\lambda - A$ имеет ограниченный обратный $(\lambda - A)^{-1} =: R_A(\lambda)$. В этом случае оператор $R_A(\lambda)$ называется *резольвентой* (разрешающим оператором, от англ. *resolve*) и точка λ называется регулярной. Множество всех регулярных точек называют *резольвентным множеством* и обозначают $\rho(A)$.

2) Обратный к $\lambda - A$ существует, но не ограничен. В этом случае λ называется точкой непрерывного спектра. Множество точек непрерывного спектра обозначают $\sigma_c(A)$ (c от англ. *continuous*).

3) Не существует оператора, обратного к $\lambda - A$. Это эквивалентно тому, что уравнение $(\lambda - A)x = 0$ имеет ненулевое решение, т. е. $\exists x \neq 0 : \ \lambda x = Ax$. Как вы знаете из алгебры, такие λ называются собственными значениями оператора A, а ненулевые решения x — соответствующими собственными векторами (или собственными функциями). Множество собственных значений $\sigma_d(A)$ называют дискретным спектром, а множество

$$\sigma_c(A) \cup \sigma_d(A) =: \sigma(A)$$

называют *спектром* оператора A.

Замечание. Из определения следует, что спектр $\sigma(A)$ — это дополнение множества $\rho(A)$ до всей комплексной плоскости.

Вспомним некоторые спектральные свойства линейных операторов в конечномерных пространствах, знакомые вам из алгебры: собственных значений и собственных векторов у таких операторов не более конечного числа, собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

В общем случае в бесконечномерных пространствах спектр операторов, даже ограниченных, может быть устроен достаточно сложно.

Начнем изучение спектра с геометрически наглядных результатов о положении в комплексной плоскости спектра и множества регулярных точек линейного ограниченного оператора.

Утверждение 2.13. Пусть $A \in L(X)$, X — банахово пространство. Тогда

$$\Lambda = \{\lambda : \ |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A).$$

Доказательство. Для оператора $\lambda - A$ при $\lambda \in \Lambda$ имеет место следующее равенство $\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$, где $\|\lambda^{-1}A\| = |\lambda|^{-1}\|A\| < 1$.

Используем доказанную выше теорему об обратимости таких операторов: если $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, то для оператора $I - \lambda^{-1}A$ существует ограниченный обратный

$$(I - \lambda^{-1}A)^{-1} := I + \lambda^{-1}A + (\lambda^{-1}A)^2 + \dots$$

Этот ряд сходится в пространстве $L(X)$, так как сходится ряд из норм операторов, образующих ряд.

Отсюда следует, что при условии $|\lambda|^{-1}\|A\| < 1$ оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ является ограниченным. Это эквивалентно тому, что оператор $\lambda I - A$ является непрерывно обратимым. ■

Утверждение 2.14. Резольвентное множество открыто, эквивалентно, спектр — дополнение комплексной плоскости до резольвентного множества — замкнутое множество.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Это означает, что оператор $\lambda_0 I - A$ непрерывно обратим. Для оператора $\lambda I - A$ имеем следующую цепочку равенств:

$$\lambda I - A = \lambda I - \lambda_0 I + (\lambda_0 I - A) = (\lambda_0 I - A)\,[\,I + (\lambda I - \lambda_0 I) R_{\lambda_0}(A)\,]\,.$$

Отсюда следует, что при условии

$$|\lambda - \lambda_0|\, \|R_{\lambda_0}(A)\| < 1,$$

т. е. при $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(A)\|$, оператор $\lambda I - A$ непрерывно обратим и

$$(\lambda I - A)^{-1} = [\,I + (\lambda - \lambda_0)\; R_{\lambda_0}(A)\,]^{-1}\; R_{\lambda_0}(A),$$

где использовано равенство для обратного оператора от произведения операторов: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Таким образом, мы доказали, что для точки λ_0 существует целая окрестность точек

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(A)\|\},$$

которые тоже являются регулярными. Это по определению означает, что множество регулярных точек (резольвентное множество) является открытым. ■

Пример

Рассмотрим оператор A умножения на непрерывную функцию f в пространстве $C[a,b]$. Обычно исследование спектра начинают с того, что записывают оператор $\lambda I - A$. Далее, в соответствии с определением спектра, смотрят, в какую из трех возможностей поведения обратного к нему этот оператор попадает.

В нашем случае

$$(\lambda I - A)x(t) = (\lambda - f(t))x(t).$$

Посмотрим, есть ли у этого оператора обратный, т. е. посмотрим, имеет ли уравнение $(\lambda I - A)x(t) = (\lambda - f(t))x(t) = 0$ ненулевые решения. Это зависит от поведения множителя $(\lambda - f(t))$. Тут может быть три возможности (i)–(iii).

(i) $\lambda - f(t) \neq 0$ при любом $t \in [a, b]$, т. е. $\lambda \notin R(f)$. В этом случае обратный оператор определяется следующим образом:

$$(\lambda I - A)^{-1} y(t) = \frac{y(t)}{\lambda - f(t)}.$$

Упражнение 2.26. *Покажите, что этот оператор ограничен.*

Следовательно, $\lambda \notin R(f)$ принадлежит множеству $\rho(A)$.

(ii) Значение $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что $\lambda - f(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$, а в остальных точках отрезка $[a, b]$ имеем $\lambda - f(t) \neq 0$.

Упражнение 2.27. *Проверьте, что в этом случае оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует (т.е. оператор $\lambda I - A$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие), но он не ограничен.*

Следовательно, данная точка $\lambda = f(t_0)$ является точкой непрерывного спектра.

(iii) Если функция f принимает значение λ на некотором отрезке из $[a, b]$, то обратный к оператору $(\lambda - A)$ не существует и, следовательно, данная точка λ является собственным значением.

Упражнение 2.28. *Найдите соответствующую собственную функцию. Дайте геометрическую интерпретацию для случаев (i) – (iii). Приведите примеры функций f, реализующих случаи (i) – (iii).*

Упражнение 2.29. *Найдите спектр для случая $[a, b] = [2, 3]$ и $f(t) = 1 + t^2$.*

Упражнение 2.30. *Найдите спектр для случая $f(t_1 + it_2) = 1 + t_1^2 + t_2$, $t_1, t_2 \in [a, b] = [2, 3]$.*

Упражнение 2.31. *Найдите спектр оператора $A : l_2 \to l_2$, определяемого следующим образом:*

1. $Ax = \{x_1 - x_2, 0, \alpha x_3, x_4, x_5, \dots\}$, $\alpha \leq 0$;

2*. $Ax = \{x_1 - x_2, \alpha x_3, x_4, x_5, \dots\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Упражнение 2.32. *Найдите собственные значения и собственные векторы интегрального оператора с ядром e^{2x+y} в пространстве $C[-1,1]$, используя вырожденность ядра.*

В последней главе мы будем изучать операторные уравнения первого и второго рода на основе свойств обратных операторов к операторам первого рода $B = A$ и операторам второго рода $B = I - A$, где A — вполне непрерывный оператор. Но прежде чем перейти к изучению операторных уравнений первого и второго рода, нам необходимо, во-первых, доказать теорему Банаха об обратном операторе (вернее, эквивалентную ей теорему Банаха о замкнутом операторе, предварительно изучив замкнутые операторы). Во-вторых, изучить свойства вполне непрерывных операторов, позволяющих отделить уравнения второго рода от уравнений первого рода.

2.9. Замкнутые операторы

При изучении ограниченных операторов мы приводили примеры дифференциальных операторов, не являющихся ограниченными. Оказывается, что эти важные для приложений операторы, не являясь ограниченными, обладают полезным свойством *замкнутости*, выделяющим их среди других неограниченных операторов.

Чтобы ввести понятие замкнутого оператора, полезно сначала ввести понятие прямой суммы двух пространств и понятие графика оператора в этой сумме пространств.

Определение 2.15. Прямой суммой $X \dot{+} Y$ двух линейных нормированных пространств X, Y называется совокупность пар $z = \{x, y\}$, $x \in X$, $y \in Y$, для которых

$$\alpha z_1 + \beta z_2 := \{\alpha x_1 + \beta x_2,\, \alpha y_1 + \beta y_2\}.$$

Упражнение 2.33. *Проверьте, что на $X \dot{+} Y$ можно ввести норму*

$$\|z\| = \|x\| + \|y\|$$

и что, если X, Y являются банаховыми пространствами, то пространство $X \dot{+} Y$ является банаховым. Введите эквивалентные нормы на $X \dot{+} Y$.

Определение 2.16. Пусть $F(x) : D(f) \to R(f)$ — оператор (необязательно линейный), действующий из пространства X в пространство Y. *Графиком* оператора F называется совокупность пар $\{x, F(x)\}$ в пространстве $X \dot{+} Y$.

Определение 2.17. Оператор A называется *замкнутым*, если замкнут график оператора A в пространстве $X \dot{+} Y$.

Упражнение 2.34. *Докажите, что линейный оператор A является замкнутым, если и только если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$ из условий $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ и $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ следует, что $x \in D(A)$ и $Ax = y$.*

Замечание. Из определения замкнутого оператора следует, что линейный ограниченный оператор является замкнутым.

Хорошо известно, что если исходный оператор ограничен, то обратный необязательно ограничен. Простой пример: интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^t x(s)\, ds,\ \ t \in [a, b]$$

является ограниченным в пространстве $C[a, b]$, а обратный к нему дифференциальный — нет. Для замкнутых операторов имеет место следующий очень важный факт.

Теорема 2.12. Если оператор A замкнут и существует обратный к нему, то оператор A^{-1} тоже замкнут.

Доказательство. Рассмотрим графики операторов A и A^{-1}:

$$\{x, Ax\},\ x \in D(A), \qquad \{y, A^{-1}y\},\ y \in R(A).$$

Сделав замену $y = Ax$, график обратного оператора мы можем записать следующим образом:

$$\{Ax,\, x\},\ x \in D(A).$$

По определению нормы в пространстве $X \dot{+} Y$, норма элемента $\{x, y)\}$ из $X \dot{+} Y$ не изменится, если x и y поменять местами. Таким образом, нормы элементов $\{x, Ax\}$ и $\{Ax, x\} = \{y, A^{-1}y\}$ совпадают. Следовательно, прямой и обратный операторы одновременно замкнуты. ■

Следствие. Если оператор A ограничен и существует A^{-1}, то A^{-1} является замкнутым оператором.

Примеры замкнутых операторов. Поскольку примеров ограниченных операторов мы приводили достаточно много, то здесь представляет интерес привести примеры неограниченных, но замкнутых операторов.

1. Начнем с наиболее важных для приложений дифференциальных операторов. Рассмотрим оператор $Ax(t) = dx(t)/dt$ в пространстве $C[a, b]$, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Неограниченность этого оператора мы доказывали. Покажем, что оператор A замкнут. По определению замкнутости надо проверить

$$\forall \{x_n\} \subset D(A)\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \ \&\ Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x \in D(A)\ \&\ Ax = x' = y.$$

Сходимость в $C[a, b]$ равномерная. По известным из анализа теоремам вы знаете, что из равномерной сходимости последовательности самих функций и их производных следует, что производная от предела равна пределу производных, т. е. $Ax = x' = y$.

2. Рассмотрим еще пример, где для доказательства замкнутости используется тот факт, что прямой и обратный операторы являются замкнутыми одновременно. В гильбертовом пространстве l_2 зададим линейный оператор следующими формулами:

$$A\,e_k = \lambda_k e_k.$$

Если $x \in l_2$, то $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,e_k$, где ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2$ сходится. Тогда формально

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,x_k\,e_k.$$

Этот ряд может не сходиться. Он сходится, если и только если

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2\,|x_k|^2 < \infty.$$

Возможны два случая:

- $\{|\lambda_k|\}$ ограничена.
  Тогда, как нетрудно проверить, оператор A ограничен и, следовательно, замкнут;

- $\{|\lambda_k|\}$ не ограничена.
  В этом случае оператор A не ограничен, так как $\|A\,e_k\| = |\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, хотя $\|e_k\| = 1$.

Если при том условии, что $\{|\lambda_k|\}$ не ограничена, выполняется условие $\inf_k |\lambda_k| =: c_A > 0$, можно построить обратный оператор:

$$A^{-1}y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\,y_k\,e_k.$$

Этот оператор является ограниченным, следовательно, замкнутым. Следовательно, замкнутым является исходный оператор.

Если условие $\inf_k |\lambda_k| =: c_A > 0$ не выполняется, то оператор можно разложить в сумму двух операторов, один из которых ограничен, а к другому можно построить ограниченный обратный, следовательно, он замкнут. *Каким образом можно построить такое разложение?* Тогда исходный оператор, как сумма ограниченного и замкнутого, является замкнутым.

2.10. Третий принцип линейного анализа — принцип обратимости

После изучения замкнутых операторов переходим к доказательству третьего принципа линейного анализа — принципа обратимости для замкнутых операторов. Начнем с доказательства эквивалентного принципу обратимости утверждения.

Теорема 2.13 (Банаха о замкнутом операторе). Пусть A — замкнутый линейный оператор, определенный на всем пространстве X со значениями в банаховом пространстве Y. Тогда оператор A ограничен.

Как и предыдущие два принципа линейного анализа, доказательство теоремы разбивается на две части: собственно доказательству теоремы предшествует

Утверждение 2.15. Пусть A — замкнутый линейный оператор, определенный на всем пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y. Пусть существует плотное в X подмножество M и константа $c > 0$ такая, что

$$\forall x \in M, \quad \|Ax\| \le c\|x\|.$$

Тогда оператор A ограничен.

Доказательство. Множество M здесь не является линейным многообразием, поэтому нельзя использовать продолжение по непрерывности и приходится строить линейную комбинацию элементов из M, приближающих произвольный элемент $x_0 \in X$. Возьмем элемент x_0 и покажем, что найдется $x_1 \in M$ такой, что

$$\|x_1\| \leq \|x_0\|, \quad \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1}{2}\|x_1\|.$$

Действительно, в силу плотности M в X, для $x_\varepsilon = (1-\varepsilon)x_0$, $\varepsilon \in (0,1)$, найдется элемент $x_1 \in M$ такой, что

$$\|x_1 - x_0\| \leq \varepsilon\|x_0\|.$$

Оказывается, ε можно подобрать так, чтобы удовлетворял требуемой оценке:

$$\|x_1\| \leq \|x_1 - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon\|\varepsilon\|x_0\| + (1-\varepsilon)\|x_0\| = \|x_0\|,$$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1 - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x_0\| \leq \varepsilon\|x_0\| + \varepsilon\|x_0\| = 2\varepsilon\|x_0\|.$$

Возьмем $\varepsilon = 1/4$ и получим требуемое неравенство. Точно так же можно показать (*проверьте!*), что для элемента $\|x_1 - x_0\|$ найдется $x_2 \in M$ такой, что

$$\|x_0 - x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{2}\|x_0 - x_1\| \leq \frac{1}{2^2}\|x_0\|,$$

$$\|x_2\| \leq \|x_0 - x_1\| \leq \frac{1}{2}\|x_0\|.$$

Повторяя эти рассуждения, можно показать, что найдутся x_1, x_2, $\ldots, x_n$ такие, что

$$\|x_0 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\| \leq \frac{1}{2^n}\|x_0\|,$$

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x_0\|.$$

Отсюда следует, что

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad \text{где} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Далее, так как

$$\|A\,x_k\| \le c\|x_k\| \le \frac{c}{2^{k-1}}\|x_0\|,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{n} A\,x_k$ сходится абсолютно. Пусть y — его сумма. Поскольку при $n \to \infty$

$$A\,s_n \to y, \quad s_n \to x_0,$$

то вследствие замкнутости оператора A

$$A\,x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A\,x_k.$$

Тогда имеем оценку

$$\|A\,x_0\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|A\,x_k\| \le c\sum_{k=1}^{\infty} \|\,x_k\| \le 2c\,\|x_0\|.$$

Вследствие произвольности x_0 доказана ограниченность оператора A. ■

Доказательство теоремы Банаха. Для каждого натурального n рассмотрим множество

$$X_n = \{\, x \in X : \ \|Ax\| \le n\,\|x\|\,\}.$$

Поскольку оператор A определен на всем пространстве X и, следовательно, каждый x попадет в какой-то из X_n, имеем

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

По теореме Бэра полное пространство X является множеством второй категории и, следовательно, не может быть представлено как счетное объединение нигде не плотных множеств. Тогда существует номер n_0 такой, что X_{n_0} является плотным в некотором шаре $S \subset X$.

Следовательно, имеем

$$\overline{S \cap X_{n_0}} = \overline{S}. \tag{23}$$

Пусть далее $x_0 \in S \cap X_{n_0}$, а S_0 — шар с центром x_0 столь малого радиуса r_0, что $S_0 \in S$. Тогда

$$\overline{S_0 \cap X_{n_0}} = \overline{S_0}.$$

Возьмем теперь элемент $u_0 \in X$ с нормой $\|u_0\| = r_0$ и элемент $y_0 = x_0 + u_0$. Имеем $y_0 \in \overline{S_0}$, так как $\|y_0 - x_0\| = \|u_0\| = r_0$.

Вследствие равенства (23) найдется последовательность

$$\{y_n\} \in S_0 \cap X_{n_0}: \quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0 = x_0 + u_0.$$

Вспоминаем определение X_n и, пользуясь тем, что $y_n \in X_{n_0}$, $x_{n_0} \in X_{n_0}$, получаем оценки:

$$\begin{aligned}\|Au_n\| = \|A(y_n - x_0)\| \le \|Ay_n\| + \|Ax_{n_0}\| \le \\ \le n_0(\|y_n\| + \|x_{n_0}\|) = n_0(\|u_n + x_0\| + \|x_0\|) \le \\ \le n_0(\|u_n\| + 2\|x_0\|) \le n_0(r_0 + 2\|x_0\|).\end{aligned}$$

Далее, так как

$$\|u_n\| = \|y_n - x_0\| \to r_0\,,$$

то найдется номер N такой, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\|u_n\| > \frac{1}{2}r_0 \quad \text{или} \quad 1 < \frac{2}{r_0}\|u_n\|.$$

Отсюда и из полученной цепочки оценок при $n > N$ приходим к оценке

$$\|Au_n\| \le \frac{2n_0}{r_0}\|u_n\|(r_0 + 2\|x_0\|).$$

Отсюда при всех $n > N$ имеем $u_n \in X_{n_1}$, где $n_1 = 2n_0 + \frac{4n_0\|x_0\|}{r_0}$. При $n \to \infty$ получаем $u_n \to u_0$, где u_0 — любой элемент с нормой $\|u_0\| = r_0$. Но из определения X_{n_1} следует, что вместе с элементом x, принадлежащим X_{n_1}, элемент λx с любым λ тоже принадлежит X_{n_1}.

Таким образом, X_{n_1} плотно в X и так как на X_{n_1}

$$\|Ax\| \leq n_1 \|x\|,$$

то по утверждению 2.15 оператор ограничен и, следовательно, теорема о замкнутом графике доказана. ■

Следствие 1 (теорема Банаха об обратном операторе). Пусть X, Y — банаховы пространства. Если A — линейный замкнутый оператор, взаимно-однозначно отображающий $D(A) \subset X$ на все пространство Y, то обратный оператор ограничен.

Следствие 2 (теорема об эквивалентных нормах). Пусть на линейном многообразии E заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, по отношению к которым пространства $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ и $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$ являются банаховыми. Если одна из этих норм подчинена другой, то эти нормы эквивалентны.

Упражнение 2.35. *Докажите следствие 2.*

Указание. Рассмотрите оператор $Ix = x : E_1 \to E_2$ или оператор $Ix = x : E_2 \to E_1$ в зависимости от связи между нормами.

Пусть X, Y, как и выше, — банаховы пространства и A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$. Введем на $D(A)$ новую норму, называемую *нормой графика*:

$$\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Линейное многообразие $D(A)$ в новой норме становится нормированным пространством, обозначим его X_A: если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в X_A, то она сходится. *Почему?* Следовательно, X_A — банахово пространство.

Следствие 3. X, Y — банаховы пространства и A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A) \subset X$. Тогда оператор $A: \ X_A \to Y$ ограничен.

Доказательство. Рассматривая A как оператор, действующий из банахова пространства X_A в Y, имеем

$$\|Ax\|_Y \leq \|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|x\|_A.$$

Следовательно, оператор $A: \ X_A \to Y$ ограничен. ■

Теорему Банаха об обратном операторе можно доказать независимо от теоремы о замкнутом графике. Доказательство похоже на доказательство теоремы о замкнутом графике, тоже состоит из двух соответствующих частей [3].

Теперь покажем, что имея теорему Банаха об обратном операторе, мы получаем теорему Банаха о замкнутом графике. Из этого утверждения и следствия 1 получаем доказательство эквивалентности теорем об обратном операторе и о замкнутом графике.

Пусть $A : X \to Y$ — замкнутый оператор, определенный на всем банаховом пространстве X. Тогда оператор

$$P_A x = x : \ X_A \to X$$

ограничен по следствию 3. Применяя теорему Банаха об обратном операторе к оператору P_A, получаем ограниченность оператора

$$A : X \to Y : \ \|x\| + \|Ax\| \leq C\|x\|,$$

следовательно, теорему о замкнутом графике.

2.11. Компактные множества и компактные операторы

В предыдущих параграфах мы изучили спектральные свойства операторов, свойства некоторых специальных обратных операторов и других аналитических (в области) функций от операторов, связанных с решением операторных уравнений. Доказали теорему Банаха о замкнутом графике и эквивалентную ей теорему об обратном операторе.

Прежде чем переходить к обсуждению компактных операторов (операторы A, переводящие ограниченные множества в компактные), важной для решения операторных уравнений вида $(I - A)x = y$ и $Ax = y$, вспомним уже изученные методы решения операторных уравнений достаточно общего вида: $Bx = y$.

В первой главе пособия мы изучили принцип сжимающих отображений и основанный на нем метод последовательных приближений для решения уравнений вида $Bx = x$ со сжимающими (как исключение для курса, необязательно линейными) операторами B.

Кроме того, мы показали, что к решению линейных операторных уравнений $Bx = y$ в гильбертовых пространствах можно применять метод разложения в ряды Фурье. Ряды Фурье — широко применяемая техника для решения многих конкретных прикладных задач. Особенно эта техника полезна при решении уравнений $Bx = y$ и $(\lambda - B)x = y$, если линейный оператор B имеет ортогональный базис $\{e_k\}$, состоящий из собственных векторов: $Be_k = \lambda_k e_k$. По этой системе и составляются ряды Фурье для элемента y, определяемого исходными данными, и неизвестного элемента x. Таким ортогональным базисом обладают вполне непрерывные (линейные компактные) самосопряженнные операторы, к изучению которых мы переходим.

Чтобы изучать компактные операторы, вспомним известные свойства компактных множеств и рассмотрим некоторые новые свойства, в частности, критерии компактности множеств в нормированных пространствах.

Известная теорема Больцано — Вейерштрасса гласит: из любой ограниченной последовательности действительных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Эта теорема легко переносится и на конечномерные пространства, но в бесконечномерных пространствах она в общем случае не верна. Действительно, возьмем в гильбертовом пространстве l_2 ортонормальный базис из векторов $\{e_k\}$ с единичной k-й координатой и нулевыми остальными координатами. Эта последовательность ограничена: $\|e_k\| = 1$, но из нее нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, так как расстояние между разными e_k равно $\sqrt{2}$.

Чтобы выделить случаи в бесконечномерных пространствах, когда этот важный результат все-таки имеет место, дадим (или напомним) следующие определения.

Определение 2.18. Множество Q банахова пространства X называется *бикомпактным* (*бикомпактом*), если из любой его последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит Q. Множество Q банахова пространства X называется *компактным* (*компактом*), если из любой его последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность (которая необязательно сходится к элементу из Q).

Замечание. В некоторых учебниках такую пару называют, соответственно, компактом и предкомпактом. Мы будем использовать терминологию, указанную в определении.

Из определения 2.18 и теоремы Больцано — Вейерштрасса следует, что в конечномерном пространстве любое ограниченное множество является компактом, а любое замкнутое ограниченное множество является бикомпактом. В бесконечномерных пространствах имеет место следующий результат.

Утверждение 2.16. Всякий бикомпакт Q является ограниченным и замкнутым.

Доказательство. Для начала установим ограниченность методом от противного. Предположим, что множество Q не является ограниченным. Зафиксируем элемент $x_0 \in X$. Тогда для любого натурального числа n найдется элемент $x_n \in Q$ такой, что справедливо неравенство $\|x_0 - x_n\| > n$. Из бикомпактности множества Q следует существование подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к некоторому элементу $y \in Q$. Из этого следует, что

$$\|x_0 - y\| = \lim_{k\to\infty} \|x_0 - x_{n_k}\| \geq \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty.$$

Полученное противоречие означает, что предположение ложно, т. е. множество Q является ограниченным.

Докажем замкнутость множества Q. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset Q$, сходящуюся к элементу $z \in X$. Из бикомпактности множества Q следует существование подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к некоторому элементу $y \in Q$. Поскольку подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, то $z = y \in Q$. Следовательно, множество Q замкнуто. ■

Следующий факт, являясь аналогом хорошо известных из матанализа теорем о поведении непрерывных функций на отрезке на случай непрерывных функционалов на бикомпактах, говорит о важности изучения таких множеств.

Утверждение 2.17. Пусть $f = f(x)$ — вещественный непрерывный функционал на бикомпакте Q. Тогда f ограничен на Q и достигает своих верхней и нижней границ.

Доказательство полностью аналогично доказательству соответствующих теорем для непрерывных функций на отрезке. Проведем его для случая ограниченности сверху.

Покажем, что $f = f(x)$ ограничен сверху, т. е. существует такая $c \in \mathbb{R}$, что $f(x) \leq c$. От противного: найдется элемент $x_1 \in Q$ такой, что $f(x_1) > 1$, затем найдется элемент $x_2 \in Q$ такой, что $f(x_2) > 2$ и т. д. В итоге получим в Q последовательность $\{x_n\}$ со свойством $f(x_n) > n$. В силу бикомпактности множества Q для последовательности $\{x_n\}$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \to x \in Q$. Отсюда, в силу непрерывности функционала следует, что $f(x_{n_k}) \to f(x)$, значит, подпоследовательность $\{f(x_{n_k})\}$ ограничена. С другой стороны, $f(x_{n_k}) > n_k$, т. е. $f(x_{n_k}) \to \infty$, и мы пришли к противоречию. ■

На основе этого предложения приведем **пример** ограниченного замкнутого, но не бикомпактного в бесконечномерном пространстве X множества. Пусть $X = C[0,1]$. Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ множество

$$M = \{x(t) \in C[0,1] : \ x(0) = 0, \ x(1) = 1, \ \|x\| \leq 1\}.$$

Это множество является ограниченным и замкнутым в пространстве $C[0,1]$. Рассмотрим на M функционал $f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$.

Упражнение 2.36. *Докажите, что функционал f непрерывен.*

Покажем, что функционал f не достигает на M точной нижней грани и, следовательно, по утверждению 2.17, множество M не является бикомпактом. Для этого возьмем последовательность $x_n(t) = t^n \in M$, тогда

$$f(x_n) = \int_0^1 t^{2n}dt = \frac{1}{2n+1},$$

следовательно, $\inf\limits_{x \in M} f(x) = 0$. Если допустить, что нижняя грань достигается на элементе $x_0 = x_0(t)$, то $\int_0^1 x_0^2(t)dt = 0 \Rightarrow \Rightarrow x_0(t) = 0$ на $[0,1]$. Но тогда $x_0(1) \neq 1$ и, следовательно, $x_0 \notin M$.

Введем геометрически наглядное, важное для исследования компактных множеств понятие ε-сети.

Определение 2.19. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество M_ε в нормированном пространстве X называется ε-сетью множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется точка $\tilde{x} \in M_\varepsilon$ такая, что $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$.

Вопрос. *Как геометрически можно интерпретировать понятие ε-сети?*

С помощью понятия ε-сети формулируется следующий критерий компактности.

Теорема 2.14 (Хаусдорфа). Множество M в банаховом пространстве X является компактным тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть.

Эту теорему примем без доказательства, которое можно найти в [2, 3].

Теорема Хаусдорфа редко используется для проверки, является ли конкретное множество в некотором пространстве компактным, но, как мы увидим ниже, она оказывается полезной для получения критериев компактности множеств в конкретных пространствах, в частности, при доказательстве знаменитого критерия компактности в $C[a, b]$ — теоремы Арцела.

Следствие 1. Замкнутое множество M в банаховом пространстве X является бикомпактным тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ для M существует конечная ε-сеть.

Следствие 2. Пусть X — банахово пространство. Если для любого $\varepsilon > 0$ для множества $M \subset X$ существует компактная ε-сеть, то M компактно.

Доказательство проводится методом «последовательных приближений множеств». Пусть M_ε — компактная ε-сеть для M. По теореме Хаусдорфа для компактного множества M_ε существует конечная ε-сеть M'_ε. Тогда M'_ε является конечной 2ε-сетью для M:

$$\|x-x''\| \leq \|x-x'\|+\|x'-x''\|, \text{ где } \quad x \in M,\ x' \in M_\varepsilon,\ x'' \in M'_\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Следствие 3. Всякое компактное множество в ЛНП ограничено.

Доказательство. Пусть M компактно. Построим для M конечную 1-сеть: $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда для любого $x \in M$ существует элемент x_i из 1-сети такой, что $\|x-x_i\| < 1$, и для любого $x \in M$ получаем оценку:

$$\|x\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i\| < 1 + \|x_i\| \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|,$$

т. е. M ограничено. $\blacksquare$

Определение 2.20. Неограниченное множество M в ЛНП X, в частности само X, является *локально компактным* (*локально бикомпактным*), если пересечение M с любым замкнутым шаром в X компактно (бикомпактно).

Теорема 2.15 (Рисса). Для того, чтобы нормированное пространство X было локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было конечномерным.

Доказательство

$\Leftarrow$ Пусть X конечномерно. Возьмем в X произвольный замкнутый шар $\overline{S}$. Тогда множество $\overline{S}$ ограничено и по теореме Больцано — Вейерштрасса любая последовательность из $\overline{S}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, X локально компактно.

$\Rightarrow$ Пусть X локально компактно, т. е. любой замкнутый шар $\overline{S}_a^r$ в X компактен. Чтобы доказать, что X конечномерное пространство, предположим противное, т. е. что X бесконечномерно. Возьмем $x_1 \in X$ с $\|x_1\| = 1$, положим $z = a + rx_1$ и рассмотрим множество M_1 элементов вида λx_1 — линейную оболочку элемента x_1. Очевидно, множество M_1 является замкнутым линейным многообразием. Тогда по лемме Рисса о почти перпендикуляре существует x_2 такой, что

$$\|x_2\| = 1,\ \rho(x_2, M_1) > \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \|z_2 - z_1\| = r\|x_2 - x_1\| > \frac{r}{2},$$

где $z_{1(2)} = a + rx_{1(2)}$ — это точки, лежащие на границе шара с центром в точке a радиуса r.

Продолжая этот процесс, построим $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, соответствующие $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ и соответствующие M_n — (замкнутые) линейные оболочки элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Тогда найдется элемент x_{n+1} такой, что $\|x_k - x_{n+1}\| > \frac{1}{2}$ для любого $x_k \in M_n$, и соответствующий элемент z_{n+1} такой, что $\|z_{n+1} - z_k\| > \frac{r}{2}$ для $k < n + 1$. Из последовательности $\{z_k\}$, точек, лежащих на сфере с центром a радиуса r, нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность. Следовательно, пространство X не является локально компактным. $\blacksquare$

Прежде чем формулировать теорему Арцела о компактности множеств в пространстве $C[a,b]$, дадим определение равностепенной непрерывности множества непрерывных функций, естественным образом обобщающее понятие равномерной непрерывности отдельной непрерывной функции.

Определение 2.21. Семейство M непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $t_1,\ t_2 \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$, для любой функции $x \in M$ имеет место оценка

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 2.16 (Арцела). Для того, чтобы множество $M \subset C[a,b]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы множество M было

1) равномерно ограниченным, т. е.

$$\exists c > 0 : \forall x \in M \Rightarrow \|x\| \le c;$$

2) равностепенно непрерывным.

Доказательство

$\Rightarrow$ Пусть M — компактное множество. Тогда множество $\overline{M}$ в силу бикомпактности является ограниченным, и в силу вложения $M \subset \overline{M}$ множество M также ограничено. Докажем, что M является равностепенно непрерывным. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим конечную $\varepsilon/3$-сеть $M_{\varepsilon/3} = \{y_k\}_{k=1}^{n} \subset C[a,b]$ для множества M. По теореме Кантора каждая функция $y_k \in M_{\varepsilon/3}$ является равномерно непрерывной на $[a,b]$, т. е. для каждого $k \in 1,\ldots,n$ существует $\delta_k > 0$ такое, что для любых точек $t_1, t_2 \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta_k$, справедливо неравенство $|y_k(t_1) - y_k(t_2)| < \varepsilon/3$. Определим величину $\delta = \min\limits_{1 \le k \le n} \delta_k$. Тогда из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta$ следует, что

$$|y_k(t_1) - y_k(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \in 1, \dots, n.$$

Далее, для произвольного элемента $x \in M$ по определению $\varepsilon/3$-сети найдется элемент $y_{k_0} \in M_{\varepsilon/3}$ такой, что

$$\max_{t \in [a,b]} |x(t) - y_{k_0}(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу полученных оценок и неравнства треугольника заключаем, что для произвольного элемента $x \in M$ и любых точек $t_1, t_2 \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$, справедливо соотношение

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le |x(t_1) - y_{k_0}(t_1)| + |y_{k_0}(t_1) - y_{k_0}(t_2)| + \\ + |y_{k_0}(t_2) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Таким образом, множество M является равностепенно непрерывным.

$\Leftarrow$ Пусть множество M является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ и покажем, что из нее можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по определению равностепенной непрерывности множества M найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы для любого номера n и для любых двух точек $t_1, t_2 \in [a, b]$ из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ следовало неравенство

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{24}$$

Поскольку отрезок $[a, b]$ является компактным множеством, то по теореме Хаусдорфа существует конечная $\delta(\varepsilon)$-сеть — набор точек $P_\delta = \{t_i\}_{i=1}^{m} \subset [a, b]$ таких, что любая точка этого отрезка удалена от одной из точек множества P_δ на расстояние, не превышающее $\delta(\varepsilon)$.

Далее, рассмотрим числовую поледовательность $\{x_n(t_1)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу равномерной ограниченности множества M данная числовая последовательность также является ограниченной. Тогда по теореме Больцано — Вейерштрасса из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n'}(t_1)\}_{n'=1}^{\infty}$. После этого перейдем к последовательности функций $\{x_{n'}\}_{n'=1}^{\infty}$ и рассмотрим эту последовательность в точке t_2. Получим вновь ограниченную числовую последовательность $\{x_{n'}(t_2)\}_{n'=1}^{\infty}$, из которой выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n''}(t_2)\}_{n''=1}^{\infty}$. В результате проведенных в каждой точке конечного набора P_δ построений получим подпоследовательность функций $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся в каждой точке $\delta(\varepsilon)$-сети, т. е.

$$\forall t \in P_\delta \ \exists N(\varepsilon) \ \ \forall k > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_k}(t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (25)$$

Для произвольной точки $t \in [a, b]$ найдем точку $t_{i_0} \in P_\delta$ такую, что $|t - t_{i_0}| < \delta(\varepsilon)$. Тогда в силу соотношений (24) и (25) для любого номера $k > N(\varepsilon)$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} |x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_k}(t)| \le {} & |x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_{k+p}}(t_{i_0})| + \\ & + |x_{n_{k+p}}(t_{i_0}) - x_{n_k}(t_{i_0})| + \\ & + |x_{n_k}(t_{i_0}) - x_{n_k}(t)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности точки $t \in [a, b]$ из этого неравенства следует, что для любого номера $k > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\|x_{n_{k+p}} - x_{n_k}\| < \varepsilon$, т. е. последовательность является фундаментальной. В силу полноты пространства $C[a, b]$ отсюда следует, что множество M является компактным. ■

В силу полноты пространства $C[a, b]$ доказательство достаточности в этой теореме можно провести с помощью теоремы Хаусдорфа, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ построить конечную ε-сеть для множества M с помощью приближения равностепенно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций ступенчатыми (см., например, [3]).

Доказательство для более общего случая множества M из полного нормированного пространства $X = C(\overline{\Omega})$ — функций, непрерывных на бикомпакте $\overline{\Omega}$, можно посмотреть в [2].

В качестве **примера,** иллюстрирующего применение теоремы (критерия) Арцела, докажем, что в пространстве $C[0,2]$ множество M непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,2]$ функций x, удовлетворяющих условию

$$\exists c > 0 : \int_0^2 \left(|x(t)|^m + |x'(t)|^n\right) dt \leq c, \qquad m, n \geq 1,$$

является компактным. Поскольку любая функция $x \in M$ является непрерывной на отрезке $[0,2]$, то существует точка $t_0 \in [0,2]$ такая, что $|x(t_0)| = \min\limits_{t\in[0,2]} |x(t)|$. Тогда по формуле Ньютона — Лейбница в любой точке $t \in [0,2]$ получаем оценку

$$|x(t)| = \left| x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s)ds \right| \leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |x'(s)|ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^2 |x(s)|ds + \int_0^2 |x'(s)|ds.$$

Далее, с помощью неравенства Гельдера оценим каждый интеграл правой части:

$$\int_0^2 |x(s)| \cdot 1 ds \leq \left(\int_0^2 |x(s)|^m ds\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_0^2 dt\right)^{\frac{m-1}{m}} =$$
$$= 2^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_0^2 |x(s)|^m ds\right)^{\frac{1}{m}},$$
$$\int_0^2 |x'(s)| \cdot 1 ds \leq \left(\int_0^2 |x'(s)|^n ds\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\int_0^2 dt\right)^{\frac{n-1}{n}} =$$
$$= 2^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_0^2 |x'(s)|^n ds\right)^{\frac{1}{n}}.$$

С учетом этих оценок в любой точке $t \in [0,2]$ имеем

$$|x(t)| \le 2^{-\frac{1}{m}} \left(\int_0^2 |x(s)|^m ds \right)^{\frac{1}{m}} + 2^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_0^2 |x'(s)|^n ds \right)^{\frac{1}{n}} \le$$
$$\le \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{m}} + 2\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

В силу произвольности функции $x \in M$ это означает, что множество M является равномерно ограниченным. Далее, выберем $t_1, t_2 \in [0,2]$ так, чтобы $t_1 < t_2$. Равностепенная непрерывность множества M следует из оценок:

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x'(s) ds \right| \le \int_{t_1}^{t_2} |x'(s)| ds \le$$
$$\le \left(\int_{t_1}^{t_2} |x'(s)|^n ds \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{t_1}^{t_2} dt \right)^{\frac{n-1}{n}} \le$$
$$\le \left(\int_0^2 |x'(s)|^n ds \right)^{\frac{1}{n}} (t_2 - t_1)^{\frac{n-1}{n}} \le \sqrt[n]{c}(t_2 - t_1)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Таким образом, по теореме Арцела заключаем, что множество M является компактным.

Упражнение 2.37. *Докажите, что множество всех ограниченных на $[a,b]$ функций, удовлетворяющих условию Липшица с одной и той же константой, в частности, имеющих ограниченную производную, образует компактное множество в пространстве $C[a,b]$.*

2.12. Вполне непрерывные операторы

Определение 2.22. Оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если он любое ограниченное множество переводит в компактное.

Определение 2.23. Линейный компактный оператор $A : X \to Y$ называется *вполне непрерывным* (иногда, вполне ограниченным). Множество всех вполне непрерывных операторов $A : X \to Y$ обозначают $\sigma(X, Y)$.

Упражнение 2.38. *Докажите, что линейный оператор является вполне непрерывным, если и только если он переводит единичный шар в компактное множество.*

Название для линейных операторов «вполне непрерывный оператор» сразу наводит на мысль сравнить вполне непрерывные операторы с (линейными) непрерывными.

Линейные непрерывные операторы, как вы знаете, совпадают с линейными ограниченными операторами. Ограниченные операторы — это операторы, которые переводят ограниченные множества в ограниченные. Отсюда следует связь: множество вполне непрерывных операторов является подмножеством линейных ограниченных операторов и, следовательно, подмножеством линейных непрерывных операторов: $\sigma(X, Y) \subset L(X, Y)$. Более того, оно является замкнутым линейным многообразием, т. е. подпространством.

Теорема 2.17. Множество $\sigma(X, Y)$ является подпространством в $L(X, Y)$.

Доказательство. По определению, подпространство — это замкнутое линейное многообразие. Поэтому начинаем с доказательства того, что $\sigma(X, Y)$ — линейное многообразие. Покажем, что если $A_1, A_2 \in \sigma(X, Y)$, то и $A := \alpha A_1 + \beta A_2 \in \sigma(X, Y)$.

Пусть S — единичный шар в X и AS — образ этого шара в пространстве X. Покажем, что из любой последовательности $y_n = \alpha A_1 x_n + \beta A_2 x_n \in AS$ можно извлечь фундаментальную подпоследовательность $y_{n_p} \in AS$. Действительно, в силу вполне непрерывности A_1 можно сначала извлечь фундаментальную подпоследовательность из $\alpha A_1 x_{n_k}$, а потом, в силу вполне непрерывности A_2, из $\beta A_2 x_{n_k}$ извлечь фундаментальную подпоследовательность. В результате получится требуемая фундаментальная подпоследовательность для $y_n = \alpha A_1 x_n + \beta A_2 x_n$.

Теперь покажем, что $\sigma(X,Y)$ — замкнутое многообразие в $L(X,Y)$. Пусть $A_n \in \sigma(X,Y)$ и $A_n \to A$ в $L(X,Y)$. Докажем, что предельный оператор $A \in \sigma(X,Y)$. Пусть S — единичный шар в X, тогда $A_n S$ компактно при каждом n. Положим $\varepsilon = \|A_n - A\|$, тогда для $x \in S$ имеем $\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \leq \varepsilon$. Это означает, что $A_n x$ является компактной ε-сетью для Ax. По следствию из теоремы Хаусдорфа получаем, что Ax — компактное множество. Таким образом, оператор A переводит единичный шар в компактное множество, следовательно, A вполне непрерывен. ■

Следствие 1. Если X или Y конечномерно, то $\sigma(X,Y) = L(X,Y)$.

Следствие 2. Любой линейный функционал $f \in X^*$ вполне непрерывен.

Следствие 3. Если $\|A_n - A\| \to 0$ в пространстве $L(X,Y)$, где A_n — вполне непрерывные или конечномерные (переводящие ограниченные множества в конечномерные) операторы, то $A \in \sigma(X,Y)$.

Упражнение 2.39. *Докажите следствия.*

Следующая теорема оказывается чрезвычайно важной при исследовании обратного оператора к вполне непрерывному.

Теорема 2.18. Пусть X, Y, Z — линейные нормированные пространства, $A \in L(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$. Если хотя бы один из операторов A, B является вполне непрерывным, то $AB \in \sigma(X,Z)$.

Доказательство. Пусть S — единичный шар в X. Если оператор A вполне непрерывен, то множество AS компактно, но тогда и BAS компактно, так как ограниченный оператор B переводит компактное множество в компактное. Следовательно, оператор BA вполне непрерывен.

Если B вполне непрерывен и A ограничен, то множество AS ограничено, следовательно, BAS компактно, т. е. опять BA вполне непрерывен. $\blacksquare$

Следствие. Пусть X — бесконечномерное линейное нормированное пространство, Y — линейное нормированное пространство и $A \in \sigma(X,Y)$. Тогда, если на $R(A)$ существует обратный оператор A^{-1}, то он является неограниченным на $R(A)$.

Упражнение 2.40. *Докажите следствие.*

Примеры вполне непрерывных операторов.

1. Рассмотрим интегральный оператор $K : C[a,b] \to C[a,b]$

$$Kx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \ t \in [a,b],$$

с ядром $K(t,s)$ — непрерывной функцией двух переменных в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Линейность оператора очевидна. Чтобы доказать вполне непрерывность оператора K, возьмем в $C[a,b]$ единичную сферу S и проверим, что ее образ является компактным множеством.

Для проверки компактности множества KS воспользуемся теоремой Арцела: проверим, что функции из KS образуют ограниченное и равностепенно непрерывное семейство. Для $x \in KS$ имеем

$$\begin{aligned}\|Kx\| = \max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le \max_{t\in[a,b]}\int_a^b |K(t,s)||x(s)|ds \le \\ \le (b-a)M\max_{t\in[a,b]}|x(t)| = (b-a)M\|x\| \le \\ \le (b-a)M, \quad M := \max_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]}|K(t,s)|.\end{aligned}$$

Таким образом, множество KS ограничено. Теперь проверим, что функции из KS образуют равностепенно непрерывное семейство. Имеем

$$|Kx(t_1) - Kx(t_2)| = \left| \int_a^b K(t_1,s)x(s)ds - \int_a^b K(t_2,s)x(s)ds \right| \le$$
$$\le \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)||x(s)|ds.$$

Из равномерной непрерывности функции $K(t,s)$ на множестве $[a,b] \times [a,b]$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых t_1 и $t_2 \in [a,b]$ и любого $s \in [a,b]$, как только имеем $|t_1 - t_2| < \delta$, так сразу же $|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \varepsilon$. Отсюда следует равностепенная непрерывность образов единичного шара.

2. Доказательство вполне непрерывности интегрального оператора $K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ с ядром, называемым ядром Гильберта — Шмидта: $K(t,s) \in L_2([a,b] \times [a,b])$, можно найти в [2]. В доказательстве сначала используется теорема Арцела для случая непрерывного ядра, а затем ядро из $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$ приближается непрерывными ядрами.

3. Рассмотрим в l_2 матричный оператор $A\{x_l\} = \{y_k\}$, где $y_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}x_l$ и матрица удовлетворяет условию $\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 < \infty$. Операторы такого типа называют матричными операторами Гильберта — Шмидта. Линейность оператора A очевидна. Докажем ограниченность оператора A. По неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\|\{y_k\}\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} |y_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}x_l \right|^2 \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \sum_{l=1}^{\infty} |x_l|^2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \|x\|^2.$$

Это означает ограниченность оператора $A : l_2 \to l_2$. Докажем вполне непрерывность оператора A, пользуясь доказанным свойством замкнутости множества вполне непрерывных операторов в пространстве непрерывных операторов: в данном примере $\sigma(l_2)$ замкнуто в $L(l_2)$.

Введем последовательность операторов A_n, переводящих вектор $\{x_l\}$ в вектор $\{y_l, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots\}$. Эти линейные ограниченные операторы переводят пространство l_2 в конечномерное пространство, следовательно, в силу следствия 1 они являются вполне непрерывными. Покажем, что оператор A — это предел вполне непрерывных операторов A_n:

$$\|A_n - A\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \|x\|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно, и A — вполне непрерывен.

Сформулируем теперь без доказательства теорему о вполне непрерывности сопряженного оператора. Формулируется она очень просто, чего нельзя сказать о доказательстве, которое можно найти в [2].

Теорема 2.19 (Шаудер). Пусть оператор $A \in L(X, Y)$, где X — ЛНП, Y — банахово. Тогда оператор A вполне непрерывен, если и только если $A^* : Y^* \to X^*$ вполне непрерывен.

2.13. Спектральные свойства вполне непрерывных операторов

В этом параграфе мы рассмотрим спектральные свойства вполне непрерывных и вполне непрерывных эрмитово самосопряженных операторов. Покажем, что из собственных векторов вполне непрерывного эрмитово самосопряженного оператора (с нулевым ядром) в гильбертовом пространстве можно составить ортонормированный базис. Техника разложения в ряды Фурье по этому базису является рабочей для решения операторных уравнений первого и второго рода.

При изучении спектральных свойств данного класса операторов полезно их сравнивать с аналогичными свойствами других классов операторов, в частности, операторов, действующих в конечномерных пространствах. Напомним известные из курса алгебры факты. Во-первых, в конечномерных пространствах у линейных операторов собственных значений и собственных векторов не более конечного числа. Во-вторых, собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям линейного оператора в конечномерном пространстве, линейно независимы.

Отметим, что в общем случае в бесконечномерных пространствах спектр операторов, даже ограниченных, может быть устроен достаточно сложно.

Упражнение 2.41. *В пространстве $C[0,l]$ найдите полезные для задач математической физики собственные значения и собственные векторы дифференциального оператора второго порядка D^2 с различными граничными условиями:*

- $dom(D^2) = \{x:\ x''(t) \in C[0,l], x(0) = x(l) = 0\}$,
- $dom(D^2) = \{x:\ x''(t) \in C[0,l], x'(0) = x'(l) = 0\}$.

Заметим, что сами эти дифференциальные операторы вполне непрерывными, конечно, не являются, но обратные к ним — вполне непрерывны и собственные векторы у них общие.

Как следует из свойств вполне непрерывных операторов, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе, вполне непрерывные операторы чем-то близки к конечномерным. Для их собственных значений имеют место следующие утверждения.

Утверждение 2.18. Если оператор A вполне непрерывен, то его собственное подпространство X_λ, отвечающее $\lambda \neq 0$, конечномерно.

Доказательство. Пусть $\overline{S_0^1}$ — единичный шар с центром в нуле, замкнутый в подпространстве X_λ. Возьмем произвольную последовательность элементов $\{x_n\}$ из $\overline{S_0^1}$. Из вполне непрерывности оператора A следует, что последовательность $\{Ax_n\}$ компактна, но $\{x_n = \frac{1}{\lambda}Ax_n\}$, откуда следует, что и $\{x_n\}$

компактна. Значит, шар $\overline{S_0^1}$ компактен. Отсюда легко видеть, что и любой шар компактен. Следовательно, подпространство X_λ конечномерно. ■

Утверждение 2.19. Для любого $\varepsilon > 0$ вне круга $|\lambda| \leq \varepsilon$ комплексной плоскости может быть лишь конечное число собственных значений вполне непрерывного оператора.

Упражнение 2.42. *Докажите это утверждение.*

В качестве **примера** рассмотрим, как устроено множество собственных значений интегрального оператора A с непрерывным ядром K в пространстве $C[a, b]$:

$$\int_a^b K(t, s)x(s)ds = \lambda x(t), \quad t \in [a, b].$$

Было доказано, что такой оператор является вполне непрерывным. Из утверждения 2.19 следует, что существуют три возможности поведения собственных значений оператора A:

• оператор A не имеет собственных значений, отличных от нуля, т. е. из равенства $Ax(t) = \lambda x(t)$ при $\lambda \neq 0$ следует, что $x(t) = 0$;

• существует лишь конечное число собственных значений, отличных от нуля;

• существует последовательность собственных значений λ_n, отличных от нуля, при этом $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

До сих пор мы рассматривали свойства спектра различных операторов, в частности, вполне непрерывных. Для вполне непрерывного эрмитово самосопряженного оператора имеет место теорема существования собственных значений:

Теорема 2.20. Пусть $A \neq 0$ — вполне непрерывный эрмитово самосопряженный в H оператор. Тогда A имеет, по крайней мере, одно собственное значение, отличное от нуля. Все собственные значения расположены на отрезке $[m, M]$, где

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

При этом, если $M \neq 0$, то M — наибольшее собственное значение, если $m \neq 0$, то m — наименьшее собственное значение.

Доказательство этого результата можно посмотреть в [2].

Теорема 2.21. Все собственные значения вполне непрерывного эрмитово самосопряженного оператора A действительны. Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Если оператор $A \neq 0$ является вполне непрерывным и эрмитово самосопряженным в H, то у него существует собственное значение $\lambda \neq 0$. Пусть x — соответствующий ему собственный вектор: $Ax = \lambda x$. Покажем, что λ — действительное число. В силу самосопряженности имеем $(Ax, x) = (x, Ax)$. Отсюда

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) \;\Rightarrow\; \lambda = \overline{\lambda}.$$

Теперь пусть $x_{1,2}$ — собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям $\lambda_{1,2}$. Тогда

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = \lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Отсюда следует, что $(x_1, x_2) = 0$. ■

Завершаем этот параграф теоремой, подводящей итог свойствам спектра вполне непрерывного эрмитово самосопряженного оператора и часто используемой при решении операторных уравнений методом разложения в ряды Фурье.

Теорема 2.22 (Гильберта — Шмидта). Если A — вполне непрерывный эрмитово самосопряженный оператор в H, то при любом $x \in H$ элемент Ax разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортонормальной системе собственных векторов оператора A.

Доказательство. Пусть e_1 — нормированный собственный вектор, отвечающий наибольшему по модулю собственному значению λ_1. Такое собственное значение в силу теоремы 2.20

существует. Рассмотрим подпространство H_1 элементов, ортогональных e_1. Оператор A переводит элементы из H_1 в H_1:

$$(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0.$$

Следовательно, если x ортогонален e_1, то и Ax ортогонален e_1.

Таким образом, A можно рассматривать как вполне непрерывный эрмитово самосопряженный оператор, действующий в H_1. Пусть e_2 — нормированный собственный вектор, отвечающий наибольшему по модулю собственному значению λ_2 оператора A в пространстве H_1 ($|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$). Продолжая этот процесс, можно построить подпространство H_2 пространства H_1 и т. д. Получим последовательность ортонормированных собственных векторов $e_k \in H_{k-1}$, отвечающих последовательности собственных значений $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_k|, \ldots$

Есть две возможности: либо этот процесс оборвется, либо будет бесконечным. Если оборвется, скажем, на n-м шаге, тогда на пространстве H_n будем иметь $A = 0$. В этом случае для любого x рассмотрим элемент

$$y = x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k.$$

Нетрудно проверить, что $(y, e_k) = 0$ для $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $y \in H_n$. Значит, $Ay = 0$, т. е.

$$Ax = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\lambda_k e_k,$$

и для этого случая теорема доказана.

Другая возможность — процесс продолжается неограниченно. Значит, мы получим последовательность e_k, отвечающих собственным значениям $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n| \geq \ \ldots$

Далее, известно, что для нормы эрмитово самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве имеет место следующее равенство: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$. Тогда в силу теоремы 2.20 имеем равенство

$$\|A\|_{L(H_n)} = |\lambda_{n+1}|.$$

Отсюда получаем оценки:

$$\left\|A[x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k]\right\|^2 \le |\lambda_{n+1}|^2\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\|^2 =$$

$$= |\lambda_{n+1}|^2\left[\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2\right] \le$$

$$\le |\lambda_{n+1}|^2\|x\|^2.$$

Поскольку $|\lambda_n| \to 0$ при $n \to \infty$, то $\|A[x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k]\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е.

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\lambda_k e_k. \quad \blacksquare$$

Следствие. Если оператор A обратим, т. е. осуществляет взаимно-однозначное отображение H на $R(A)$, то любой элемент $x \in H$ разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортонормальной системе $\{e_k\}$ собственных векторов оператора A:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k.$$

Доказательство. По теореме 1.7 пространство H представимо в виде прямой суммы подпространств $\overline{R(A)}$ и $\overline{R(A)}^{\perp}$:

$$H = \overline{R(A)} \oplus \overline{R(A)}^{\perp}.$$

Используя непрерывность скалярного произведения, получаем соотношение $\overline{R(A)}^{\perp} = R(A)^{\perp}$. В силу определения оператора, сопряженного к оператору $A : H \to H$, следует равенство $R(A)^{\perp} = N(A^*)$. В случае самосопряженного оператора получаем, что $N(A^*) = N(A)$. В свою очередь, обратимость оператора A влечет соотношение $N(A) = \{0\}$. Таким образом, получаем равенство $R(A)^{\perp} = \{0\}$ и, следовательно, пространство H совпадает с подпространством $\overline{R(A)}$.

Рассмотрим элемент $x \in H \setminus R(A)$. В силу равенства $H = \overline{R(A)}$ и представления элементов из $R(A)$ в виде суммы ряда по системе $\{e_k\}$ следует, что элемент x с любой точностью можно приблизить конечной линейной комбинацией элементов системы $\{e_k\}$. Тогда по теореме 1.8 в силу минимизирующего свойства частичных сумм ряда Фурье получаем представление элемента x в виде суммы его ряда Фурье. Из этого факта и теоремы Гильберта — Шмидта получаем искомое представление произвольного элемента $x \in H$. ■

Заметим, что в общем случае, когда $N(A) \neq \{0\}$, базис составляется из элементов множеств $N(A)$ и $R(A)$.

Разложением по ортонормальному базису, состоящему из собственных векторов вполне непрерывного оператора A, мы воспользуемся в следующей главе при исследовании и решении операторных уравнений.

Глава 3. Операторные уравнения

После изучения свойств пространств и операторов переходим к третьей главе нашего пособия — к операторным уравнениям.

Начнем с операторных уравнений второго рода, которые при достаточно общих условиях порождают корректные задачи. Теория корректности уравнений второго рода носит название теории Фредгольма — основателя теории для интегральных уравнений второго рода, или теории Рисса — Шаудера для операторных уравнений. С методами решения операторных уравнений второго рода, в частности, интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода, мы знакомились на протяжении всего курса: метод сжимающих отображений, метод разложения в ряды Фурье, решение интегральных уравнений с вырожденными ядрами, методы, основанные на построении обратных операторов.

После изучения операторных уравнений второго рода коротко рассмотрим уравнения первого рода, приводящие к некорректным задачам, и простейшие методы их (приближенного) решения — методы регуляризации.

Последние параграфы этой главы будут посвящены дифференциально-операторным уравнениям — дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами и функциям от операторов, позволяющим строить решение таких уравнений и задач Коши для них.

3.1. Уравнения второго рода. Теория Фредгольма (Рисса — Шаудера)

Общее определение операторных уравнений второго рода — это уравнения вида
$$(I - A)x = y,$$

где A — вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Уравнения первого рода — это уравнения вида

$$Ax = y,$$

где A — вполне непрерывный оператор, действующий в паре линейных нормированных пространств X, Y.

Почему уравнения первого рода порождают некорректные задачи, вы уже знаете: оператор, обратный к вполне непрерывному в бесконечномерном пространстве, не может быть ограниченным.

Изучение операторных уравнений второго рода начнем с важных предварительных результатов об операторах вида $\lambda - A, A \in \sigma(X)$ (или $\lambda I - A$), на основе которых доказываются знаменитые теоремы Фредгольма. Покажем, что такие операторы являются нормально разрешимыми.

Определение 3.1. Оператор B называется *нормально разрешимым*, если $R(B) = \overline{R(B)}$.

Для нормально разрешимых операторов уравнение $Bx = y$ разрешимо для y из замкнутого множества $R(B)$, следовательно, в случае линейного оператора B из множества, являющегося подпространством.

Замкнутость области значений чрезвычайно важна, так как в силу теоремы Банаха об обратном операторе оказывается, что нормально разрешимые операторы вида $I - A$, в отличие от вполне непрерывных операторов A, имеют ограниченный обратный оператор.

Утверждение 3.1. Пусть X — банахово пространство и $A : X \to X$ — вполне непрерывный оператор. Тогда области значений операторов $I - A$ и $I - A^*$ являются подпространствами в X и X^*, соответственно.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{y_n\} \subset R(I - A)$, сходящуюся к точке y_0. Тогда найдется последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что

$$(I - A)x_n = y_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что предельная точка $y_0 \in R(I - A)$. Для этого рассмотрим несколько возможностей для $\{x_n\}$.

1) Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, тогда последовательность $\{Ax_n\}$ компактна. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n = y_n + Ax_n\}$ тоже компактна. Значит, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся в банаховом пространстве X к точке x_0 при $k \to \infty$. Отметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $x_{n_k} = y_{n_k} + Ax_{n_k}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем $x_0 = y_0 + Ax_0$. Следовательно, $y_0 = x_0 - Ax_0$, т. е. $y_0 \in R(I - A)$.

2) Пусть последовательность $\{x_n\}$ не ограничена и N — ядро оператора $I - A$. Для любого натурального n введем ρ_n — расстояние от x_n до N. Согласно определению ρ_n как нижней грани расстояний от x_n до элементов из N найдется $z_n \in N$ такое, что

$$\rho_n \leq \|x_n - z_n\| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\rho_n, \quad (I - A)(x_n - z_n) = y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если последовательность $\{\rho_n\}$ ограничена, то, как в первом случае, заменяя x_n на $x_n - z_n$, получаем $y_0 \in R(I - A)$.

Оказывается, что случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ является неограниченной, невозможен. Доказательство этого факта можно посмотреть в [2]. Таким образом, доказано, что любая предельная точка множества $R(I - A)$ ему принадлежит, следовательно, область значений оператора $I - A$ является замкнутым множеством. ■

Для доказательства теорем Фредгольма, наряду с замкнутостью области значений нормально разрешимого оператора $B = I - A$, важную роль играет ядро оператора B^*:

$$N(B^*) = \{y \in Y^* : B^*y = 0\}$$

и множества, ортогональные к нему. Введем два типа ортогональных дополнений в банаховых пространствах.

Определение 3.2. Пусть X — банахово пространство. Ортогональное дополнение $M^{\perp}$ к линейному многообразию $M \subset X$ определяется равенством

$$M^{\perp} := \{f \in X^* : \langle x, f\rangle = 0 \ \forall x \in M\}.$$

Ортогональное дополнение ${}^{\perp}N$ к линейному многообразию $N \subset X^*$ определяется равенством

$${}^{\perp}N := \{x \in X : \langle x, f\rangle = 0 \ \forall f \in N\}.$$

Упражнение 3.1. *Докажите, что множество $M^{\perp}$ является подпространством в X, а множество ${}^{\perp}N$ — подпространством в X^*.*

Утверждение 3.2. Пусть $\overline{D(B)} = X$. Тогда справедливы равенства

$$N(B^*) = R(B)^{\perp}, \quad \overline{R(B)} = {}^{\perp}N(B^*). \tag{26}$$

Доказательство. Отметим, что условие $\overline{D(B)} = X$ обеспечивает существование сопряженного к B оператора и докажем первое равенство. Пусть $f \in N(B^*)$, тогда по определению сопряженного к B оператора имеем

$$\langle Bx, f\rangle = \langle x, B^*f\rangle = 0.$$

Это означает, что $f \in R(B)^{\perp}$, т. е. доказано включение $N(B^*) \subset R(B)^{\perp}$. Чтобы доказать обратное включение $R(B)^{\perp} \subset N(B^*)$, возьмем $f \in R(B)^{\perp}$, т. е. такой, что $\langle Bx, f\rangle = 0$ для $x \in D(B)$. Тогда из условия $\overline{D(B)} = X$ получаем равенство $\langle x, B^*f\rangle = 0$ для всех $x \in X$, т. е. $f \in N(B^*)$.

Таким образом, доказано обратное включение и, следовательно, равенство $N(B^*) = R(B)^\perp$.

Докажем второе равенство $\overline{R(B)} = {}^\perp N(B^*)$. Применим ортогональное дополнение к равенству $N(B^*) = R(B)^\perp$, получим

$$^\perp N(B^*) =^\perp \left(R(B)^\perp\right) \supset R(B).$$

Поскольку, как мы отмечали, любое ортогональное дополнение — это замкнутое множество, отсюда следует, что и замыкание $R(B)$ принадлежит ${}^\perp N(B^*)$: $\overline{R(B)} \subset^\perp N(B^*)$.

Если докажем обратное к этому включению, эквивалентное следующему включению для дополнений:

$$X \setminus \overline{R(B)} \subset X \setminus^\perp N(B^*),$$

то будет доказано второе из соотношений (26).

Пусть $y_0 \in X \setminus \overline{R(B)}$. Покажем, что в этом случае $y_0 \in X \setminus^\perp N(B^*)$. По второму следствию из теоремы Хана — Банаха существует функционал f_0 такой, что

$$f_0(\overline{R(B)}) = 0 \ \&\ f_0(y_0) = 1.$$

Тогда для f_0 имеем $f_0 \in N(B^*)$ & $f_0(y_0) \neq 0$. Следовательно, $y_0 \in X \setminus^\perp N(B^*)$. ■

Следствие. Для гильбертова пространства H имеет место равенство

$$H = N(B^*) \oplus \overline{R(B)}.$$

В случае нормально разрешимого оператора B это равенство принимает вид:

$$H = N(B^*) \oplus R(B),$$

в случае эрмитово самосопряженного оператора B:

$$H = N(B) \oplus \overline{R(B)}.$$

Теперь мы готовы перейти к обсуждению теории Фредгольма (Рисса — Шаудера). Рассмотрим уравнения, лежащие в основе теории Фредгольма:

(F1) $(I - A)x = y$,

(F2) $(I - A)x = 0$,

(F3) $(I - A^*)u = v$,

(F4) $(I - A^*)u = 0$,

и сформулируем три теоремы, составляющие теорию.

Теорема 3.1 (первая теорема Фредгольма). Пусть X — банахово пространство и $A : X \to X$ — вполне непрерывный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) уравнение (F1) имеет решение для любого $y \in X$;

2) уравнение (F2) имеет единственное нулевое решение;

3) уравнение (F3) имеет решение для любого $v \in X^*$;

4) уравнение (F4) имеет единственное нулевое решение.

При любом из этих условий операторы $(I-A)^{-1}$, $(I-A^*)^{-1}$ существуют и ограничены.

Теорема 3.2 (вторая теорема Фредгольма). Пусть X — банахово пространство и $A : X \to X$ — вполне непрерывный оператор. Тогда размерности ядер операторов $I - A$ и $I - A^*$ конечны и совпадают.

Теорема 3.3 (третья теорема Фредгольма). Пусть X — рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X$ — вполне непрерывный оператор. Тогда для того, чтобы уравнение (F1) имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы любое решение уравнения (F4) было ортогонально правой части уравнения (F1):

$$(I - A)x = y \;\Leftrightarrow\; \forall u : (I - A^*)u = 0,\ \langle y, u\rangle = 0.$$

Доказательство третьей теоремы Фредгольма сразу следует из соотношений, полученных нами в утверждении 3.2 для случая нормально разрешимого оператора $B = I - A$: $R(I - A) =^{\perp} N((I - A)^*)$.

Доказательство второй теоремы Фредгольма проводится в два этапа. На первом этапе устанавливается конечная размерность ядер операторов $I - A$ и $I - A^*$ с помощью теоремы 2.15. А именно, пусть M — произвольное ограниченное множество, лежащее в $N(I - A)$. Поскольку оператор A является вполне непрерывным и отображает множество M на себя, заключаем, что ядро $N(I - A)$ является локально компактным. В силу теоремы 2.15 это означает, что ядро оператора $I - A$ имеет конечную размерность. Аналогичным образом устанавливается конечная размерность ядра оператора $I - A^*$.

Доказательство второго этапа — совпадения размерностей ядер операторов $I-A$ и $I-A^*$ — можно найти в [2, 3]. Важность этой теоремы состоит в том, что надо проверять лишь конечное число условий теоремы 3.3.

Доказательство первой теоремы Фредгольма проведем для случая, когда X — банахово рефлексивное пространство, по круговой схеме:

$$1) \Rightarrow 2), \quad 2) \Rightarrow 3), \quad 3) \Rightarrow 4), \quad 4) \Rightarrow 1).$$

(Приведенное в [2] доказательство без требования рефлексивности X не проходит для импликации 2) $\Rightarrow$ 3).)

1) $\Rightarrow$ 2). Дано $R(I - A) = X$. Доказывать 2) будем от противного: допустим, что ядро оператора $(I - A)$ ненулевое, т. е.

$$N_1 := \{x \in X : x - Ax = 0\} \neq \{0\}.$$

Пусть $x_1 \in N_1$ и $x_1 \neq 0$. Рассмотрим уравнение $(I - A)x = x_1$. По условию, оно имеет решение. Пусть x_2 — решение этого уравнения. Тогда в силу равенств $(I - A)^2 x_2 = (I - A)x_1 = 0$ получаем, что

$$x_2 \in N_2 := \{x \in X : (I - A)^2 x = 0\}, \ N_1 \subset N_2.$$

Указанное включение строгое, так как $x_2 \in N_2$, но $x_2 \notin N_1$, иначе оказалось бы, что $x_1 = 0$.

Продолжая этот процесс, получим

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots \subset N_n \subset N_{n+1} \subset \dots$$

По лемме Рисса о почти перпендикуляре в каждом N_n найдется элемент z_n такой, что $\|z_n\| = 1$ и $\|x - z_n\| \geq 1/2$ для любого $x \in N_{n-1}$.

Рассмотрим последовательность $\{Az_n\}$, она компактна, так как A вполне непрерывен. Однако можно провести оценки и показать, что $\|Az_n - Az_m\| > 1/2$ для $m > n$ (см. [2]), и таким образом прийти к противоречию.

2) $\Rightarrow$ 3). Учитывая рефлексивность пространства: $X^{**} = X$ (как понимать такое равенство, мы много раз обсуждали), можем уравнение (F2) записать как $(I - A^{**})x = 0$. Тогда рассматриваемая импликация следует из равенства

$$R((I-A)^*) =^{\perp} N((I-A)^{**}),$$

поскольку в случае $N((I-A)^{**}) = \{0\}$ имеем $R((I-A)^*) = X$.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) доказывается аналогично 1) $\Rightarrow$ 2), а импликация 3) $\Rightarrow$ 4) — аналогично 2) $\Rightarrow$ 3). По теореме Шаудера оператор, сопряженный к вполне непрерывному, тоже вполне непрерывный.

Переходим к заключительной, очень важной с точки зрения корректности задачи, части доказательства. Ограниченность обратных операторов $(I - A)^{-1}$ и $(I - A^*)^{-1}$ следует из замкнутости области значений прямых операторов $(I - A)$ и $(I - A^*)$ и теоремы Банаха об обратном операторе. ■

Упражнение 3.2. *Проверьте, существует ли решение уравнения*

$$x(t) - \int_{-1}^{2} (s + t^2)x(s)ds = t, \quad t \in [-1, 2]$$

в пространстве $L_2[-1, 2]$. Если существует, то решите уравнение с заданной правой частью $y(t) = t$, если нет, то замените y так, чтобы существовало решение уравнения и найдите его.

Упражнение 3.3. *Запишите конкретное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с самосопряженным оператором и решите его, используя теорию Фредгольма и теорему Гильберта — Шмидта (раскладывая правую часть и неизвестное в ряд Фурье по собственным функциям интегрального оператора).*

3.2. Уравнения первого рода. Регуляризация некорректных задач

Пусть X, Y — ЛНП. Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{27}$$

с вполне непрерывным оператором $A : X \to Y$. Если у оператора A не существует обратного, то задача (27) является некорректной. Если обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ существует, то он является неограниченным, так как единичный оператор $I_X = A^{-1}A$, $I_Y = AA^{-1}$ не является вполне непрерывным в бесконечномерном пространстве, т. е. и в случае существования обратного оператора задача (27) является некорректной.

Для задачи (27), если при некоторой правой части y_0 существует решение x_0, но задана правая часть с погрешностью: $\|y_0 - y_\delta\| \le \delta$, то если и существует x_δ — решение уравнения $Ax_\delta = y_\delta$, то при стремлении δ к нулю в общем случае оно не стремится к x_0.

Вместо оператора $A^{-1} : Y \to X$ здесь вводится семейство ограниченных операторов $R_\alpha : Y \to X$, зависящих, как правило, от положительного параметра α и регуляризующих задачу.

Определение 3.3. Пусть $A : X \to Y$ — вполне непрерывный оператор и параметр $\alpha > 0$. Семейство $\{R_\alpha\}$ зависящих от параметра α операторов $R_\alpha : Y \to X$ называется *регуляризующим семейством задачи (27)*, если

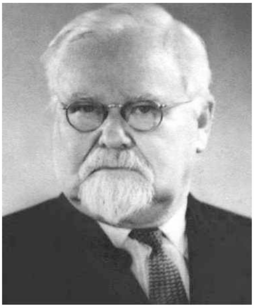
1) $R_\alpha \in L(Y, X), \quad \alpha > 0;$

2) существует такая зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$: $\alpha(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$, что

$$R_{\alpha(\delta)} y_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} x_0.$$

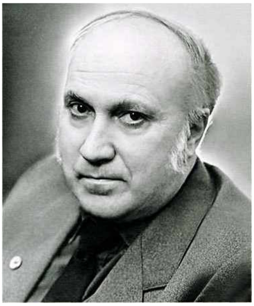
Каждый оператор семейства R_α (при конкретном значении параметра α) называется *регуляризующим оператором.*

Смысл регуляризующего оператора $R_\alpha, \alpha > 0$, понятен: он на приближенных значениях y_δ стремится к оператору A^{-1}, но не просто при условии $\alpha \to 0$, а только при определенном согласовании параметра регуляризации α с параметром погрешности δ: $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.



Андрей Николаевич Тихонов (17.10.1906 – 8.11.1993)

Валентин Константинович Иванов (18.09.1908 – 30.10.1992)



Михаил Михайлович Лаврентьев (21.07.1932 – 16.07.2010)

Основоположниками теории и методов решения некорректных задач в 60–70-е годы прошлого века были российские математики А. Н. Тихонов, В. К. Иванов и М. М. Лаврентьев. Один из них — член-корреспондент АН СССР В. К. Иванов, внесший важный вклад в развитие разных областей математики, долгое время работал в Уральском государственном университете им. А. М. Горького и заведовал кафедрой математического анализа. Методы регуляризации некорректных задач позволили решить многие практически важные задачи, для которых не было устойчивых методов решения. Среди наиболее известных методов — метод регуляризации Тихонова, метод квазирешений Иванова и метод Лаврентьева — сведения уравнений первого рода к уравнениям второго рода.

Достаточно подробно изучив уравнения второго рода, мы рассмотрим метод регуляризации Лаврентьева в его простейшем варианте. При этом покажем использование техники разложения в ряды Фурье по собственным функциям оператора, о которой мы не раз говорили ранее.

Теорема 3.4. Пусть A — эрмитово самосопряженный, вполне непрерывный, положительный оператор в гильбертовом пространстве H, имеющий обратный. Пусть известно, что уравнение (27) имеет решение x при правой части y, но задана правая часть с погрешностью: $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Тогда $R_\alpha = (\alpha I + A)^{-1}, \alpha > 0$, является регуляризующим оператором.

Доказательство. В соответствии с выбранным методом будем строить регуляризованное решение $x_{\alpha,\delta}$ как решение уравнения второго рода:

$$(\alpha I + A)x_{\alpha,\delta} = y_\delta. \tag{28}$$

В силу наложенных на оператор A условий в H существует ортонормированный базис $\{e_k\}$, состоящий из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям $\lambda_k > 0$: $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, запишем разложение в ряды Фурье элементов x, y (неизвестных) и заданного y_δ:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k, \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \quad y_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} (y_\delta)_k e_k.$$

Тогда уравнение (28) записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha + \lambda_k)(x_{\alpha,\delta})_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (y_\delta)_k e_k.$$

Чтобы получить оценку для нормы $\|x - x_{\alpha,\delta}\|$, ее традиционно разбивают на два слагаемых:

$$\|x - x_{\alpha,\delta}\| \le \|x - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_{\alpha,\delta}\|, \quad x_\alpha := x_{\alpha,0},\ x_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} (x_\alpha)_k e_k.$$

Кроме того, как обычно в гильбертовом пространстве, удобнее получать оценки для квадратов норм. Имеем

$$\|x_\alpha - x_{\alpha,\delta}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} [(x_\alpha)_k - (x_{\alpha,\delta})_k]^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + \lambda_k)^2} (y_k - (y_\delta)_k)^2 \le \frac{1}{\alpha^2}\delta^2.$$

Отсюда сразу видно, как надо согласовать параметры α и δ, чтобы норма разности $\|x_\alpha - x_{\alpha,\delta}\|^2$ стремилась к нулю при $\delta \to 0$. Для этого достаточно, чтобы $\frac{\delta}{\alpha} \to 0$.

С оценкой второй нормы разности

$$\|x - x_\alpha\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - (x_\alpha)_k)^2$$

сложнее: чтобы показать, что она стремится к нулю, эту сумму придется разбить на две суммы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [x_k - (x_\alpha)_k]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\alpha + \lambda_k}\right]^2 y_k^2 \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\alpha}{\lambda_N(\alpha + \lambda_N)}\right)^2 y_k^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} y_k^2.$$

Сначала выбирается номер N так, чтобы вторая сумма, равная остатку сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 = \|y\|^2$, была меньше заданного $\varepsilon/2$, затем при выбранном N параметр α выбирается настолько малым, чтобы первая сумма была меньше $\varepsilon/2$.

В итоге мы показали, что норма разности $\|x - x_\alpha\|$ может быть сделана как угодно малой за счет выбора малого параметра α, а норма разности $\|x_\alpha - x_{\alpha,\delta}\|$ — за счет согласования параметра α с параметром δ таким образом, чтобы дробь $\frac{\delta}{\alpha}$ стремилась к нулю при $\delta \to 0$. Следовательно, при выбранном согласовании параметров α и δ имеем $\|x - x_{\alpha,\delta}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, показано, что операторы R_α, определяемые соотношением $R_\alpha y_\delta = (\alpha + A)^{-1} y_\delta = x_{\alpha\delta}$, являются регуляризующими для задачи (27). ■

3.3. Дифференциально-операторные уравнения. Примеры

Простейшее *дифференциально-операторное уравнение* — это дифференциальное уравнение первого порядка с ограниченным операторным коэффициентом $A : X \to X$ в банаховом пространстве X:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t \geq 0. \tag{29}$$

Здесь $u(t)$ при каждом t — это элемент пространства X. Например, если $X = C[a, b]$, то $u(t) = u(t, x), x \in [a, b]$ — при каждом $t \geq 0$ непрерывная по x функция. Производная $\frac{du(t)}{dt}$ определяется как производная по параметру t в пространстве X:

$$\frac{du(t)}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}.$$

Как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для такого уравнения обычно ставится задача Коши:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \tag{30}$$

Решение задачи Коши можно строить следующим образом:

$$u(t) = \left(I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \ldots \right) u_0 =: e^{tA} u_0.$$

Построенный ряд сходится абсолютно для любого $t \geq 0$, так как оператор A ограничен и сходится ряд из норм: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\|A^k\|}{k!}$.

Упражнение 3.4. *Для оператора* $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, *действующего в пространстве* $(\mathbb{R}^2, \|x\|_e)$, *постройте оператор* $e^{tA}, t \geq 0$.

Упражнение 3.5. *С помощью оператора* $e^{tA}, t \geq 0$, *найдите решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} u_1'(t) = 3u_1(t) + 2u_2(t),\ t \geq 0, & u_1(0) = 1, \\ u_2'(t) = 2u_1(t) + 3u_2(t),\ t \geq 0, & u_2(0) = -1. \end{cases}$$

Упражнение 3.6. *Запишите задачу (30) с конкретным, выбранным вами, интегральным оператором* A. *Что можно сказать о решении этой задачи?*

Упражнение 3.7. *Докажите, что с помощью оператора* e^{tA} *по формуле, обобщающей формулу Коши из теории ОДУ, можно построить решение неоднородной задачи Коши:*

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g(t),\ t \geq 0, \quad u(0) = u_0.$$

Аналогичным образом можно строить и решение задачи Коши для уравнения второго порядка с ограниченным обратимым оператором B в банаховом пространстве X:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = B^2u(t),\ t \geq 0, \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \qquad (31)$$

$$u(t) = B^{-1}\sin tB\, u_1 + \cos tB\, u_0,$$

где $\sin tB$ и $\cos tB$ определяются соответствующими степенными рядами. Задача Коши (31) для уравнения второго порядка в банаховом пространстве X заменой переменных $\overline{u}(t) = \{u(t), u'(t)\}$ может быть сведена к задаче Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве $X \times X$ с матричным оператором

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Известные задачи из курса математической физики также приводят к задачам Коши вида (30), но уже с неограниченными операторами A. Знакомым вам простым примером такой задачи является задача Коши для уравнения теплопроводности с оператором $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ в банаховом пространстве X, например, в $L_2(\mathbb{R})$, однородная:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = f(x) \tag{32}$$

и неоднородная:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x), \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = f(x),$$

где $g(t,\cdot)$ при каждом $t \geq 0$ принадлежит пространству X.

Приведем еще примеры задач Коши для уравнений с неограниченными операторами, возникающих в разных областях математики и естествознания.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения с оператором $A = \frac{\partial}{\partial x}$ в $L_2(\mathbb{R})$ или в $C_0(\mathbb{R})$ — пространстве непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности:

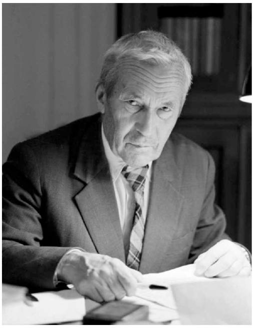
$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = f(x). \tag{33}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что при условии $f \in D(A)$ решение этой задачи имеет вид $u(x,t) = f(x+t)$. В силу конструкции решения это уравнение называют уравнением сдвига.

В квантовой механике движение частицы (системы) в потенциальном поле с потенциалом $V = V(t,x)$ описывается волновой функцией ψ, которая является решением задачи Коши для уравнения Шредингера с оператором $B = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(t,x)$, называемым оператором Гамильтона:

$$i\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = B\psi(t,x), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad \psi(0,x) = f(x).$$

Эту задачу легко привести к виду (30) с неограниченным оператором $A = i\frac{\partial^2}{\partial x^2} - iV(t,x)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что квадрат модуля волновой функции имеет вероятностную интерпретацию, а именно, $|\psi(t,x)|^2$ — плотность вероятности нахождения частицы в момент времени t в точке x.



Андрей Николаевич
Колмогоров
(12.04.1903 – 20.10.1987)

В заключение отметим еще задачу Коши для прямого уравнения Колмогорова, возникающую в теории случайных процессов при исследовании эволюции определенного класса марковских процессов. В зависимости от свойств изучаемого процесса соответствующее уравнение Колмогорова может содержать дифференциальный, интегральный или интегродифференциальный оператор A, в общем случае, неограниченный.

Упражнение 3.8. *Решите задачи Коши (32) и (33) с помощью метода преобразования Фурье (см. равенство (17)).*

3.4. Корректность абстрактной задачи Коши

Теория корректности абстрактной задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t),\ t \geq 0, \quad u(0) = f \tag{34}$$

с неограниченным оператором A носит название теории сильно непрерывных полугрупп операторов, или полугрупп класса C_0. Здесь в роли экспоненты e^{tA} служит семейство $\{U(t), t \geq 0\}$ — операторов решения задачи (34):

$$u(t) = U(t)f,\ t \geq 0.$$

Иногда эти операторы $U(t)$, как и в случае ограниченного оператора A, обозначают e^{tA}.

Определение 3.4. Семейство линейных ограниченных операторов $\{U(t),\ t \geq 0\}$, действующих в банаховом пространстве X и удовлетворяющих условиям

(U1) $U(t+h) = U(t)U(h),\ t, h \geq 0$;

(U2) $U(0) = I$;

(U3) $U(\cdot)$ — операторная функция сильно непрерывная по $t \geq 0$ для любого $x \in X$,

называется *полугруппой класса* C_0.

Здесь (U1) — это и есть полугрупповое условие относительно операции умножения ограниченных операторов, а по условию (U3) X-значная функция $Ux = U(t)x$ является непрерывной по $t \geq 0$.

Определение 3.5. Оператор, определяемый следующим образом:

$$U'(0)f := \lim_{h \to 0} h^{-1}(U(h) - I)f, \tag{35}$$

с областью определения

$$D(U'(0)) = \{f \in X :\ \exists \lim_{h\to 0} h^{-1}(U(h) - I)f\},$$

называется *генератором* семейства $\{U(t),\ t \geq 0\}$.

Определение 3.6. Задача Коши (34) называется *равномерно корректной*, если для любого $f \in D(A)$ существует единственное решение, удовлетворяющее условию устойчивости (равномерно на $[0, T]$):

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \leq M\|f\|.$$

Критерий равномерной корректности задачи Коши дает теорема, названная теоремой Миядеры — Феллера — Филлипса — Хилле — Иосиды (МФФХИ) в честь исследователей, которые внесли решающий вклад в теорию полугрупп операторов и исследование абстрактной задачи Коши.

Теорема 3.5 (теорема МФФХИ). Пусть A — линейный, замкнутый, плотно определенный в X оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача Коши (34) является равномерно корректной;

(ii) A — генератор полугруппы операторов $\{U(t), t \geq 0\}$ класса C_0;

(iii) $R(\lambda) := R_A(\lambda)$ — резольвента оператора A определена в полуплоскости $\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ Re\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ и удовлетворяет условиям МФФХИ:

$$\exists C > 0\ \exists \omega \in \mathbb{R} :\ \forall \lambda \in \Lambda_\omega\ \forall k \in \mathbb{N}_0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|R^{(k)}(\lambda)\right\|_{L(X)} \leq \frac{Ck!}{(Re\lambda - \omega)^{k+1}}.$$

При выполнении любого из условий (i)–(iii) решение задачи (34) существует и имеет вид $u(t) = U(t)f, \quad t \geq 0,\ f \in D(A)$.

Благодаря известному резольвентному тождеству:

$$R(\lambda)R(\mu) = \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu}, \quad \lambda, \mu \in \rho(A)$$

можно установить связь между степенями резольвенты и ее производными:

$$R^2(\lambda) = R'(\lambda), \ \ldots, \ n! R^{n+1}(\lambda) = R^{(n)}(\lambda).$$

Тогда условия МФФХИ можно записать следующим эквивалентным образом:

$$\exists C > 0 \ \exists \omega \in \mathbb{R} : \ \forall \lambda \in \Lambda_\omega \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\| R^k(\lambda) \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{(Re\lambda - \omega)^k}.$$

Условие с константой $C = 1$ — частный случай условий МФФХИ, называется *условием Иосиды*:

$$\exists C > 0 \ \exists \omega \in \mathbb{R} : \ \forall \lambda \in \Lambda_\omega \Rightarrow \| R(\lambda) \|_{L(X)} \leq \frac{1}{Re\lambda - \omega}.$$

В этом случае не надо проверять бесконечное число условий МФФХИ, они выполняются при одном условии Иосиды. В реальных моделях часто выполняется именно это условие, например, для резольвенты оператора дифференцирования второго порядка в уравнении теплопроводности (32) в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство теоремы МФФХИ проводится по круговой схеме:

$$\text{(i)} \implies \text{(ii)} \implies \text{(iii)} \implies \text{(i)}.$$

Вместо того, чтобы проводить доказательство этой схемы, приведем подробное доказательство свойств полугрупп класса C_0, на которые опирается, а вернее, из которых следует доказательство утверждений теоремы (см., например, [4]).

В заключение курса линейного функционального анализа, при доказательстве свойств полугрупп повторим почти всю главу, относящуюся к линейным операторам в банаховых пространствах, демонстрируя таким образом применение изученной теории при исследовании задач, отражающих реальные модели. Доказательство каждого из свойств (S1)–(S6) полугрупп класса C_0 (S от англ. *semigroup*) будем проводить сразу после формулировки этого свойства.

(S1) Полугруппа класса C_0 является невырожденной, т. е. $U(t)f = 0$ для всех $t > 0$ влечет $f = 0$.

Доказательство. Действительно, если $U(t)f = 0$ для каждого $t > 0$ и некоторого $f \in X$, то свойство сильной непрерывности (U3) влечет

$$U(0)f = \lim_{t\to 0} U(t)f = 0,$$

и в соответствии со свойством (U2) получаем $U(0)f = f = 0$. ■

(S2) Операторы полугруппы класса C_0 коммутируют с генератором на его области определения $D(U'(0))$.

Доказательство. Это свойство следует из определения генератора и свойства коммутируемости полугрупповых операторов (операторов решения задачи Коши (34)):

$$\begin{aligned}
U(t)U'(0)f &= U(t)\lim_{h\to 0} h^{-1}(U(h) - I)f = \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1}(U(h) - I)U(t)f = \\
&= U'(0)U(t)f, \qquad f \in D(U'(0)), \\
\frac{dU(t)}{dt}f &= \lim_{h\to 0} h^{-1}(U(t+h) - U(t))f = \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1}(U(h)U(t) - U(t))f = \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1}(U(h) - I))U(t)f = \\
&= U'(0)U(t)f = U(t)U'(0)f, \quad f \in D(U'(0)). \qquad ■
\end{aligned}$$

Из этого свойства следует, что $U(t)f$, где f из области определения генератора A, является решением абстрактной задачи Коши (34).

(S3) Генератор полугруппы класса C_0 является замкнутым оператором.

Доказательство. Пусть $f_n \in D(U'(0))$, $f_n \to f$ и $U'(0)f_n \to g$, тогда свойство непрерывности полугрупповых операторов по t вместе со свойством 2) влекут:

$$h^{-1}\left(U(h)-I\right)f_n = h^{-1}\int_0^h \frac{dU(s)f_n}{ds}\,ds = h^{-1}\int_0^h U(s)U'(0)f_n\,ds.$$

Здесь абстрактный интеграл Римана (называемый интегралом Бохнера) определяется, как обычно, через предел интегральных сумм в пространстве X при стремлении к нулю диаметра разбиения множества изменения аргумента. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$h^{-1}\left(U(h)-I\right)f = h^{-1}\int_0^h U(s)g\,ds.$$

Правая часть этого равенства равна g при $h \to 0$. Отсюда $f \in D(U'(0))$ и $g = U'(0)f$. ■

(S4). Генератор полугруппы класса C_0 является плотно определенным оператором.

Доказательство. Чтобы доказать это свойство, рассмотрим множество

$$Y := \left\{u_{a,\,b} = \int_a^b U(s)f\,ds, \quad f \in X,\ 0 < a < b\right\}$$

и покажем, что Y принадлежит области определения генератора $D(U'(0))$ и является плотным в X. Для любого элемента $u_{a,\,b} \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} h^{-1}(U(h)-I)u_{a,b} &= h^{-1}\int_a^b (U(h+s)-U(s))f\,ds = \\ &= h^{-1}\left(\int_{a-h}^{b-h} U(t)f\,dt - \int_a^b U(s)f\,ds\right) = \\ &= h^{-1}\left(\int_b^{b+h} U(s)f\,ds - \int_a^{a+h} U(s)f\,ds\right). \end{aligned}$$

Переход к пределу при $h \to 0$ в последнем выражении приводит к тому, что

$$h^{-1}(U(h) - I)u_{a,b} \xrightarrow[h\to 0]{} (U(b) - U(a))\, f,$$

следовательно, $f \in D(U'(0))$.

Теперь покажем, что Y плотно в X, тогда $D(U'(0)) \supset Y$ плотно в X. Покажем от противного: предположим, что $\overline{Y} \neq X$. Тогда по следствию из теоремы Хана — Банаха существует ненулевой функционал $F \in X^*$, равный нулю на подпространстве $\overline{Y}$, т. е. для всех $0 < a < b$

$$F(u_{a,b}) = \int_a^b F(U(s)f)\, ds = 0.$$

Следовательно, $F(U(s)f) = 0$, $s > 0$, для любого $f \in X$ и непрерывность функционала влечет

$$F(U(s)f) \xrightarrow[s\to 0]{} F(f) = 0 \quad \text{для любого } f \in X.$$

Это означает, что $F = 0$. Полученное противоречие доказывает равенство $\overline{Y} = X$. Следовательно, плотно в X и содержащее Y множество $D(U'(0))$, т. е. $\overline{D(U'(0))} = X$. ■

(S5). Полугруппа класса C_0 — это семейство линейных экспоненциально ограниченных операторов:

$$\exists\, C > 0\ \exists \omega \in \mathbb{R}:\ \forall\, t \geq 0 \Rightarrow \|U(t)\|_{L(X)} \leq Ce^{\omega t}.$$

Отметим, что появившиеся в этом свойстве константы C и ω являются теми константами, существование которых утверждается в условии МФФХИ.

Доказательство. Чтобы показать экспоненциальную ограниченность, возьмем $t \geq 0$ и представим его в виде $t = n + s, n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq s < 1$. Тогда из полугруппового равенства (U1) получаем представление $U(t) = U^n(1)U(s)$. Равномерную ограниченность $\|U(s)\|$ по $0 \leq s < 1$ получаем из сильной непрерывности операторов полугруппы и принципа равномерной ограниченности. Отсюда

$$\|U(t)\|_{L(X)} \le C\|U(1)\|^n_{L(X)} = Ce^{n\ln\|U(1)\|_{L(X)}},$$

где $C = \sup\limits_{0\le s<1} \|U(s)\|_{L(X)} < \infty.$

Если $\ln\|U(1)\|_{L(X)} \le 0$, то $\|U(t)\|_{L(X)} \le C$, и в этом случае полугруппа $\{U(t),\ t \ge 0\}$ просто ограничена (экспоненциально ограничена с $\omega = 0$).

Если $\ln\|U(1)\|_{L(X)} > 0$, то имеем

$$\|U(t)\|_{L(X)} \le Ce^{(n+s)\ln\|U(1)\|_{L(X)}} = Ce^{t\ln\|U(1)\|_{L(X)}} = Ce^{\omega t},$$

где $\omega = \ln\|U(1)\|_{L(X)}$. ■

(S6). Существует $\widetilde{U}(\lambda)$ — преобразование Лапласа от операторов полугруппы, и для каждого $\lambda \in \Lambda_\omega$ оно совпадает с $R_{U'(0)}(\lambda)$ — резольвентой генератора.

Доказательство. Как известно, для каждой непрерывной экспоненциально ограниченной функции существует преобразование Лапласа. Следовательно, для каждого λ из полуплоскости $Re\lambda > \omega$ существует преобразование Лапласа от операторов полугруппы $U(t)$:

$$\widetilde{U}(\lambda)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)f\,dt, \quad f \in X.$$

При этом из оценки для нормы операторов $U(\lambda)$ следует оценка для нормы операторов $\widetilde{U}(\lambda)$:

$$\|\widetilde{U}(\lambda)\|_{L(X)} \le \frac{C}{Re\lambda - \omega}, \quad Re\lambda > \omega.$$

Покажем, что преобразование Лапласа $\widetilde{U}$ совпадает с резольвентой генератора полугруппы:

$$\widetilde{U}(\lambda) = (\lambda I - U'(0))^{-1} = R_{U'(0)}(\lambda), \qquad Re\lambda > \omega.$$

Применим оператор $U'(0)$ к интегралу в равенстве, определяющем преобразование Лапласа при $f \in D(U'(0))$. Поскольку

$U'(0)$ — замкнутый оператор, мы можем внести его под знак интеграла (интеграл — это предельная операция!). Далее, используя свойство (S2), получаем интегрированием по частям:

$$
\begin{aligned}
U'(0)\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)f\,dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}U'(0)U(t)f\,dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}U'(t)f\,dt = \\
&= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)f\,dt - f,\ \ f \in D(U'(0)).
\end{aligned}
$$

Это равенство по непрерывности может быть продолжено на все X:

$$
(\lambda I - U'(0))\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)f\,dt = f, \quad f \in X.
$$

С другой стороны,

$$
\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)(\lambda I - U'(0))f\,dt = f, \qquad f \in D(U'(0)).
$$

Из полученных равенств следует, что оператор $\lambda I - U'(0)$, $Re\lambda > \omega$, обратим и имеет место следующее равенство:

$$
(\lambda I - U'(0))^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)\,dt.
$$

Из ограниченности преобразования Лапласа на множестве $\{\lambda : Re\lambda > \omega\}$ следует существование резольвенты оператора $U'(0)$ в полуплоскости $Re\lambda > \omega$ и требуемое равенство для резольвенты. ■

Из полученного равенства для резольвенты и экспоненциальной оценки для полугруппы следуют оценки МФФХИ.

Упражнение 3.9. *Постройте операторы решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, рассматривая задачу в гильбертовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$ или $H = L_2[0, l]$ с нулевыми* *граничными условиями. Проверьте, что эта задача Коши является равномерно корректной.*

Указание. Можно воспользоваться тем, что оператор $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ является самосопряженным в пространстве L_2, и в случае $L_2[0, l]$ использовать технику разложения в ряды Фурье, а в случае $L_2(\mathbb{R})$ — технику преобразования Фурье.

На этом мы заканчиваем курс, который точнее надо назвать «Основы линейного функционального анализа с приложением к решению операторных уравнений». Хочется надеяться, что вы смогли оценить красоту и важность курса.

Литературы по функциональному анализу огромное количество. Мы приводим лишь небольшую часть, которая может оказаться полезной для более подробного знакомства с отдельными разделами курса. В качестве основной литературы можно выделить [2, 3, 5].

Библиографические ссылки

[1] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. Москва : Мир, 1977. 357 с.

[2] *Треногин В. А.* Функциональный анализ. Москва : Физматлит, 2007. 488 с.

[3] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Физматлит, 2019. 576 с.

[4] *Melnikova I. V.* The Cauchy problem: three approaches. London ; New York : Chapman&Hall/CRC, 2001. 236 p.

[5] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. Санкт-Петербург : Лань, 2009. 271 с.

Библиографический список

Антоневич А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. — Минск : БГУ, 2003. — 430 с. — ISBN 985-445-835-0.

Гельфанд И. М. Обобщенные функции. Выпуск 1. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — Москва : Физматгиз, 1959. — 473 с.

Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. — Москва : Мир, 1962. — 896 с.

Иванов В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. — Москва : Наука, 1978. — 206 с.

Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — Москва : Мир, 1975. — 448 с.

Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу / А. Я. Хелемский. — Москва : МЦНМО, 2004. — 552 с. — ISBN 5-94057-065-8.

Zeidler E. Applied Functional Analysis / E. Zeidler. — New York : Springer Verlag, 1995. — 406 p. — ISBN 978-1-4612-0821-1.

Перечень электронных ресурсов, использованных при иллюстрировании

Банах С.

Польские знаменитости // Slawomirconopa.ru : [site]. URL: http://slawomirkonopa.ru/известные-поляки (дата обращения: 06.10.2022).

Гельфанд И. М.

Игры математиков и врачей // Здрав.ФОМ : [сайт]. URL: https://zdrav.fom.ru/post/igry-matematikov-i-vrachey (дата обращения: 06.10.2022).

Гильберт Д.

Математики во время Второй мировой войны: интеллект важнее грубой силы // Хабр : [сайт]. URL: https://habr.com/ru/company/macloud/blog/556302 (дата обращения: 06.10.2022).

Иванов В. К.

Российская академия наук // New.ras.ru : [сайт]. URL: https://new.ras.ru/staff/chlen-korrespondent-ran/ivanov-valentin-konstantinovich (дата обращения: 06.10.2022).

Колмогоров А. Н.

Яркипедия // Yarwiki.ru : [сайт]. URL: https://yarwiki.ru/article/2174/kolmogorov-andrej-nikolaevich (дата обращения: 06.10.2022).

Лаврентьев М. М.

Мегаэнциклопедия Кирилла и Мефодия // Megabook.ru : [сайт]. URL: https://megabook.ru/article/Лаврентьев_Михаил_Михайлович (дата обращения: 06.10.2022).

Рисс Ф.

Биографии математиков // Bibmath.net : [site]. URL: https://www.bibmath.net/bios (date of access: 06.10.2022).

Соболев С. Л.

Росатом // Rosatom.ru : [сайт]. URL: http://www.biblioatom.ru/founders/sobolev_sergey_lvovich (дата обращения: 06.10.2022).

Тихонов А. Н.

Росатом // Rosatom.ru : [сайт]. URL: http://www.biblioatom.ru/founders/tikhonov-andrey-nikolaevich (дата обращения: 06.10.2022).

Фредгольм Э. И.

7 апреля родились // Liveinternet.ru : [site]. URL: https://www.liveinternet.ru/users/kakula/post412872944 (дата обращения: 06.10.2022).

Шварц Л.-М.

Alchetron, Free Social Encyclopedia for The World // Alchetron.com : [site]. URL: https://alchetron.com/Laurent-Schwartz (date of access: 06.10.2022).

Штейнгауз Г. Д.

Математический гений из Ясло // Jasloiregion.pl : [site]. URL: http://jasloiregion.pl/2012/02/835/ (date of access: 06.10.2022).

Учебное издание

Мельникова Ирина Валерьяновна
Бовкун Вадим Андреевич

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *С. Г. Галинова*
Корректор *С. Г. Галинова*
Компьютерная верстка *В. А. Бовкун*

Подписано в печать 08.11.2022 г. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 10,7.
Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 30 экз. Заказ 71.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2020

9785799634841