Министерство образования
и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

А. Ю. Коврижных,
Е. А. Конончук, Г.Е. Лузина,
Ю.А. Меленцова

Практикум по численным методам:

задания для аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов

Учебное электронное текстовое издание

Пособие предназначено для учебно-методического обеспечения практических занятий для бакалавров, специалистов и магистрантов естественнонаучного профиля

Подготовлено: кафедрой вычислительной математики ИМКН.

Екатеринбург

2012

Оглавление

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ (ауд. 4 ч., сам. 3 ч.)

Практическое занятие №1. Абсолютная и относительная погрешности

1. Определение абсолютной и относительной погрешности.
2. Найти абсолютную погрешность с одной и двумя значащими цифрами, если точное число $\pi = 3.1415926...$, $\pi_1^* = 3.14,\quad \pi_2^* = 3.142$.
3. Найти соответствующие относительные погрешности.
4. Формула, связывающая абсолютную и относительную погрешности.
5. Абсолютная погрешность при измерении расстояния с помощью линейки равна 1мм. Найти диапазон изменения относительной погрешности при измерении расстояний от 1 до 200 мм.
6. Прибор позволяет измерять силу тока с точностью 5 %. Диапазон изменений от 1 до 50 А. Найти диапазон изменения абсолютной погрешности измерений.
7. Понятие верной цифры приближенного числа.
8. Подчеркнуть верные цифры приближенного числа $x^* = 345.012789$, если $\Delta_1 = 4,\quad \Delta_2 = 0.07,\quad \Delta_3 = 0.0005$.
9. Абсолютная погрешность суммы, разности приближенных чисел.
10. Найти относительную погрешность, возникающую при вычислении $x = \sqrt{21} - \sqrt{20}$, если в качестве приближенных значений для $\sqrt{21}, \sqrt{20}$ берутся $x_1^* = 4.583$, $x_2^* = 4.472$ (все цифры верные). Сравнить с относительной погрешностью исходных данных.
11. С каким количеством верных цифр нужно вычислить $\sqrt{11}, \sqrt{10}$, чтобы разность $x = \sqrt{11} - \sqrt{10}$ имела три верные значащие цифры.
12. Найти относительную погрешность, возникающую при вычислении $x = \sqrt{21} - \sqrt{20}$ с помощью преобразования $x = \sqrt{21} - \sqrt{20} = \dfrac{21-20}{\sqrt{21}+\sqrt{20}} = \dfrac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{20}}$.

Приближенные значения для $\sqrt{21}, \sqrt{20}$ те же. Найти относительную погрешность произведения и частного приближенных чисел.

13.Сторона квадрата равна приблизительно 1 м. С какой точностью ее нужно измерить, чтобы погрешность площади была не больше 1 см^2?

Задачи для самостоятельной работы:

1. Найти абсолютную погрешность с одной и двумя значащими цифрами, если точное число $e = 2.718281828...$, $e_1^* = 2.718, \quad e_2^* = 2.7182$.

2. Подчеркнуть верные цифры приближенного числа $x^* = 3145.0162789$, если $\Delta_1 = 40, \quad \Delta_2 = 0.0009, \quad \Delta_3 = 0.0000035$.

3. Найти относительную погрешность, возникающую при вычислении $x = \sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10}$, если в качестве приближенных значений для $\sqrt[3]{11}, \sqrt[3]{10}$ берутся $x_1^* = 2.224$, $x_2^* = 2.154$ (все цифры верные). Сравнить с относительной погрешностью исходных данных.

4. Найти относительную погрешность, возникающую при вычислении $x = \sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10}$ с помощью преобразования $x = \sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{10} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{11}\right)^2 + \sqrt[3]{11}\sqrt[3]{10} + \left(\sqrt[3]{10}\right)^2}$.

Приближенные значения для $\sqrt[3]{11}, \sqrt[3]{10}$ те же. (Использовать информацию об относительной погрешности произведения и частного приближенных чисел).

5. Сторона куба равна приблизительно 1 м. С какой точностью ее нужно измерить, чтобы погрешность объема была не больше 1 дм^3?

Пример 1.

Рассмотрим задачу 11. Цифра a_i приближенного числа $x^* = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} ... a_{-k}$ называется верной, если абсолютная погрешность Δ_{x^*} не превосходит $0.5 \cdot 10^i$. Пусть в числах x_1^*, x_2^* k верных цифр после запятой. Тогда $\Delta_{x_1^*} \le 0.5 \cdot 10^{-k}$ и $\Delta_{x_2^*} \le 0.5 \cdot 10^{-k}$. Так как абсолютная погрешность разности двух приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей этих чисел, то $\Delta_{x^*} = 10^{-k}$. Чтобы в числе $x^* = x_1^* - x_2^* = 0.1...$ было три верных значащих цифры, необходимо, чтобы $10^{-k} \le 0.5 \cdot 10^{-3}$. Поэтому $k = 4$, то есть $\sqrt{11}, \sqrt{10}$ нужно вычислять с пятью верными знаками $x_1^* = 3.3166$, $x_2^* = 3.1623$. Это гарантирует три верных значащих цифры у результата.

Пример 2.

С какой точностью следует вычислить радиус основания r и высоту h цилиндра, чтобы его объем можно было определить с точностью до 3%?

Объем цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi h r^2$. Вспомним, что относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей. Поэтому $\delta_{V^*} = \delta_{h^*} + 2\delta_{r^*}$. Но так как мы хотим вычислять радиус основания r и высоту h с одинаковой точностью, то $\delta_{h^*} = \delta_{r^*} = \delta$ и $\delta_{V^*} = 3\delta$. Чтобы определить точность в процентах, относительную погрешность умножают на 100. Поэтому $\delta_{V^*} = 3\delta = 0.03$. Следовательно, $\delta = 0.01$.

Таким образом, чтобы вычислить объем цилиндра с точностью до 3%, достаточно вычислить радиус основания r и высоту h цилиндра с точностью до 1%.

Практическое занятие №2. Погрешность машинной арифметики. Погрешность функции.

1. Числа с плавающей точкой $x = \pm\left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \ldots + \frac{d_t}{p^t}\right)p^{\alpha}$, где целые числа $p, \alpha, d_1, \ldots, d_t$ удовлетворяют неравенствам $0 \le d_i \le p-1,\ \ i = 1,\ldots,t$, $d_1 \ne 0$ и $L \le \alpha \le U$ (p — основание системы счисления, $m = \frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \ldots + \frac{d_t}{p^t}$ — мантисса, t — разрядность, длина мантиссы, α— порядок числа, [L,U] — промежуток изменения порядка).

2. Найти множество чисел с плавающей точкой, если $p = 2, t = 3, L = -1, U = 2$. Указать самое маленькое положительное число и самое большое.

3. Найти абсолютную и относительную погрешность в примере 2.

4. Можно ли непосредственными вычислениями проверить, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$ расходится?

5. Неустранимая погрешность функции одной переменной.

6. Определить неустранимую погрешность функции $y = \sin\varphi$, если φ измеряется в градусах и абсолютная погрешность аргумента не превышает половины градуса.

7. Корни уравнения $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ нужно найти с четырьмя верными знаками. С каким числом верных цифр надо взять свободный член уравнения?

8. Высота h и радиусы оснований r и R усеченного конуса измерены с точностью до 0.5 % . Какова относительная погрешность при вычислении его объема?

Задачи для самостоятельной работы.

1. Представить в форме с плавающей точкой (см. пример 2) числа $x_1 = \frac{23}{32}$, $x_2 = \frac{1}{8}$, $x_3 = 4$, $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$, $x_5 = \frac{3}{8} + \frac{5}{4}$, $x_6 = 3 + \frac{7}{2}$, $x_7 = \frac{7}{16} - \frac{3}{8}$, $x_8 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{16}$.

2. Верно ли, что всегда число с плавающей точкой, соответствующее числу $\frac{a+b}{2}$, принадлежит [a,b]?

3. Определить неустранимую погрешность функции $y = \cos^3\varphi$, если φ измеряется в градусах и абсолютная погрешность аргумента не превышает один градус.

4. Определить неустранимую погрешность в значении функции $y = \sqrt{arctgx}, x \geq 0.6$, если известно, что x задан с четырьмя верными цифрами после запятой.

5. Задано квадратное уравнение $x^2 + ax + b = 0$, коэффициенты которого известны с погрешностями $\Delta_{a^*}, \Delta_{b^*}$. Найти абсолютную погрешность корней уравнения.

Пример 1.

Найти множество чисел с плавающей точкой, если $p = 3, t = 2, L = -1, U = 2$. Указать самое маленькое положительное число и самое большое.

Так как числа представимы в виде $x = \pm\left(\frac{d_1}{3} + \frac{d_2}{3^2}\right)3^\alpha$, то множество значений мантиссы $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}$. Множество чисел $\frac{3}{27}, \frac{4}{27}, ..., \frac{8}{27}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, ..., \frac{8}{9}, 1, \frac{4}{3}, ..., \frac{8}{3}, 3, 4, ..., 8$. Самое маленькое положительное число — $\frac{1}{9}$. Самое большое положительное число — 8.

Пример 2.

Определить неустранимую погрешность в значении функции $y = \sqrt{arctg\frac{\sqrt{3}}{3}}$, если $x = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5773502691...$ $x^* = 0.578$, $\Delta_{x^*} \leq 0.0007$ (две верные цифры).

По определению неустранимой погрешности функции $y = f(x)$ для абсолютной погрешности Δ_{y^*} имеем $\Delta_{y^*} = \left| f'(x^*) \right| \Delta_{x^*}$ Так как $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}} \frac{1}{1+x^2}$, то

$$f'(0.578) \le \frac{1}{2\sqrt{arctg\frac{\sqrt{3}}{3}}} \frac{1}{1+0.578^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}} \frac{1}{1.334084} \le \frac{1}{1.447 \cdot 1.334} \le 0.5181 \text{ и } \Delta_{y^*} \le 0.0004.$$

Итак, у результата $y^* = 0.7239$ три верных цифры.

УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВОГО РЯДА. (ауд. 2 ч., сам. 3 ч.)

Практическое занятие №3. Приближенное вычисление суммы числового ряда.

1. Определение числового ряда.
2. Определение сходимости числового ряда.
3. Остаточный член ряда.
4. Приближенное вычисление суммы ряда.
5. Ряды с положительными, монотонно убывающими членами a_n. Интегральная оценка остаточного члена. Ее вывод.
6. Для ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n^2+0.35)}$ оценить погрешность при замене суммы этого ряда частичной суммой S_{100}.
7. Записать формулу для вычисления суммы этого ряда с заданной степенью точности $\varepsilon = 10^{-6}$. Оценить количество N членов ряда, которые нужно сложить, чтобы погрешность метода не превосходила $\varepsilon = 10^{-6}$.
8. Найти неустранимую погрешность суммы S_N.

9. Улучшение сходимости ряда с общим членом вида $a_n = \dfrac{p(n)}{q(n)}$, где $p(n), q(n)$ – многочлены и степень $q(n)$ не меньше, чем 2+степень $p(n)$, методом Куммера.

10. Улучшить сходимость ряда $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n^2+0.35)}$, используя эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6} = 1.6449340668...$. Оценив количество M членов улучшенного ряда, записать формулу для вычисления суммы S исходного ряда с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

11. Еще раз улучшить сходимость ряда, используя эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3} = 1.2020569032...$. И вновь, оценив количество K членов улучшенного ряда, записать формулу для вычисления суммы S исходного ряда с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Для ряда $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2(n^2+1)}$ оценить погрешность при замене суммы этого ряда частичной суммой S_{1000}.

2. Записать формулу для вычисления суммы этого ряда с заданной степенью точности $\varepsilon = 10^{-5}$. Оценить количество N членов ряда, которые нужно сложить, чтобы погрешность метода не превосходила $\varepsilon = 10^{-5}$.

3. Улучшить сходимость ряда $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2(n^2+1)}$, используя эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3} = 1.2020569032...$. Оценив количество M членов улучшенного ряда, записать формулу для вычисления суммы S исходного ряда с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

4. Еще раз улучшить сходимость ряда, используя эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90} = 1.0823232337...$. И вновь, оценив количество K членов улучшенного

ряда, записать формулу для вычисления суммы S исходного ряда с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Пример.

Пусть требуется улучшить сходимость ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n^2+0.35)}$. Поскольку общий член ряда при $n \to \infty$ ведет себя, как $\frac{1}{n^2}$, используем эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668...$. Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n(n^2+0.35)}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, то вычтем из исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и добавим его сумму $\frac{\pi^2}{6}$.

Получим $S = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n(n^2+0.35)} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-0.35}{n^2(n^2+0.35)}$. Теперь приближенно нужно вычислять ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-0.35}{n^2(n^2+0.35)}$ и для него оценивать количество членов, сложение которых гарантирует заданную точность.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. (ауд. 4ч., сам. 11ч.)

Практическое занятие№ 4. Метод половинного деления.

1. Постановка задачи решения нелинейного уравнения $f(x)=0$.
2. Задача отделения корней, способы ее решения.
3. Уточнение корня.
4. Метод половинного деления решения нелинейного уравнения и его погрешность.
5. Скорость сходимости метода половинного деления.
6. Геометрическая интерпретация метода половинного деления

Пример 1.

Отделить корни уравнения $x^2e^x - \pi = 0$.

$f'(x)=x(x+2)e^x$; $f'(x)=0$ при $x=0$, $x=-2$. $f(x)$ непрерывна, промежутки монотонности

-∞	***-2***	***0***	**+∞**
-	**-**	**-**	**+**

Следовательно, существует единственный корень на $(0, +\infty)$. $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, значит, корень лежит на [1, 2]

Пример 2.

Отделить корни уравнения x^2-$sinx$-1=0.

Заменим уравнение эквивалентным ему уравнением $x^2 - 1 = sinx$. Изобразим примерно графики левой и правой частей на $(-\pi, \pi)$ (см. рис.1).

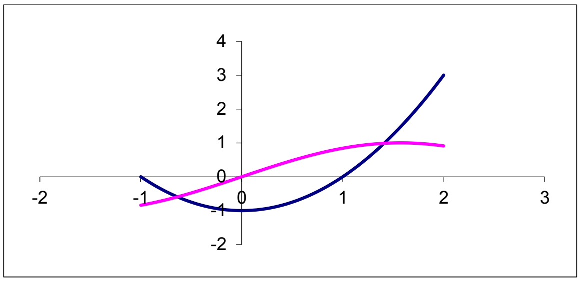


Рис. 1

Видно, что уравнение имеет два корня: на (-1, 0) и на (1, 2).

Задачи для самостоятельной работы.

1) Отделить корни уравнения x^3-x^2-9x+9=0
2) Отделить корни уравнения $x^2 - e^{-x/2} = 0$.
3) Оценить количество итераций, которое потребуется для нахождения с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ методом половинного деления корней следующих уравнений:
   a) $tg(1{,}9x) - 2{,}8x = 0$;
   b) $ln(8x) = 9x - 3$;
   c) $sin(2{,}2x) - x = 0$;

4) Выполнить два шага метода половинного деления для нахождения с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ корней следующих уравнений:
   a) $\mathrm{e}^{-0,8\mathrm{x}} - 4\mathrm{x} = 0$;
   $b)$ $0{,}89\mathrm{x}^3 - 2{,}8\mathrm{x}^2 - 3{,}7\mathrm{x} + 11{,}2 = 0$

Практическое занятие№ 5. Метод Ньютона, модифицированный метод Ньютона, метод хорд, метод подвижных хорд.

1. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений, его скорость сходимости и геометрическая интерпретация.
2. Модифицированный метод Ньютона, решения нелинейных уравнений, его скорость сходимости и геометрическая интерпретация.
3. Метод хорд решения нелинейных уравнений, его скорость сходимости и геометрическая интерпретация.
4. Метод подвижных хорд решения нелинейных уравнений, его скорость сходимости и геометрическая интерпретация.
5. Вопрос выбора начальной точки.
6. Теорема о достаточных условиях сходимости методов.

Пример.

Рассмотрим вычисление $\sqrt{a}$ как задачу решения уравнения

$x^2 - a = 0$

в области x>0 . Напишем для вычисления корня этого уравнения итерационную последовательность по методу Ньютона. Найдем с ее помощью $\sqrt{2}$.

Рекуррентная формула метода Ньютона для нашего уравнения принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Она определяет монотонно убывающую последовательность, сходящуюся к $\sqrt{a}$ сверху.

Выберем для вычисления $\sqrt{2}$ $x_0 = 2$.Тогда получим:

$x_1 = \quad 1{,}5;$

$x_2 = 1{,}41666;$

$x_3 = 1{,}414216;$ и т.д.

Третья итерация определяет $\sqrt{2}$ с точностью 0.000002.

Задачи для самостоятельной работы:

1) Методом Ньютона найти второе приближение к корню для уравнения $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ на отрезке [0,5; 2].
2) Методом Ньютона найти второе приближение к корню для уравнения $x^3 - x + 1 = 0$ на отрезке $[-2; -1]$.
3) Построить метод Ньютона для вычисления $1/a$, $a > 0$, так, чтобы расчетная формула не содержала операций деления. Найти область сходимости (для выбора x_0).
4) Построить метод Ньютона для вычисления a^5, $a > 0$. Найти область сходимости (для выбора x_0).
5) Методом хорд найти третье приближение x_3 к корню уравнения $x^3 - x + 1 = 0$, если известно, что корень лежит на отрезке $[-2; -1]$.
6) Методом хорд найти второе приближение к корню для уравнения $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ на отрезке [0,5; 2].
7) Рассматривается уравнение $\sin(x) = 0$ на $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Почему не для всякого x_0 метод Ньютона сходится? Найти все те x_0, для которых метод Ньютона сходится.
8) Привести пример функции, для которой зацикливается метод Ньютона.
9) Как оценить погрешность приближения x_n при решении уравнения $f(x) = 0$, если значения функции вычисляются с абсолютной погрешностью A_f? Предполагается, что $|f'(x)| \geq m > 0$.

Практическое занятие№ 6. Метод простой итерации.

1. Метод простых итераций решения нелинейных уравнений.
2. Скорость сходимости метода простых итераций.

3. Геометрическая интерпретация метода.
4. Критерий сходимости метода простых итераций.

Пример.

Представить уравнение $x^3 - x + 1 = 0$ в виде, допускающем применение метода простых итераций.

Решение: Сначала нужно отделить корни, т.е. найти такой отрезок $[a; b]$, на котором существует единственный корень. Преобразуем уравнение к равносильному виду: $x^3 = x - 1$ и найдем точки пересечения графиков $y = x^3$ и $y = x - 1$ (см. рис.2).

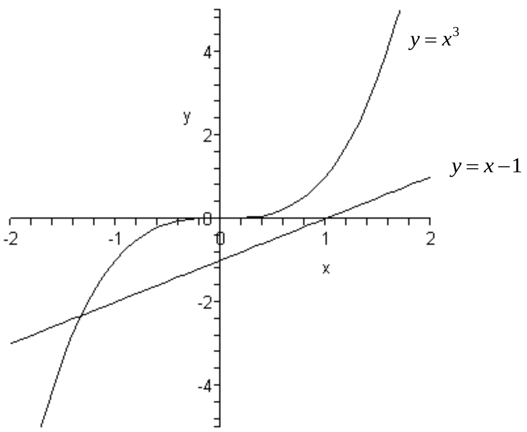


Рис. 2

Очевидно, корень уравнения $\xi \in [-2; -1]$.

Чтобы можно было применять метод простых итераций, преобразуем исходное уравнение к виду $x = \varphi(x)$. Для сходимости метода простых итераций необходимо обеспечить выполнение условия $|\varphi'(x)| \le q < 1$ на $[a; b]$.

Запишем исходное уравнение сначала в виде: $x = x^3 + 1$. Легко показать, что функция $\varphi(x) = x^3 + 1$ не удовлетворяет условию сходимости, поскольку $\varphi'(x) = 3x^2$, убывает на $[-2; -1]$ и $\varphi'(-1) = 3 > 1$. Поэтому воспользуемся другим преобразованием.

$x = \sqrt[3]{x-1}$. $\varphi(x) = \sqrt[3]{x-1}$. $\varphi'(x) = \dfrac{1}{3(x-1)^{2/3}}$. Легко проверить, что $|\varphi'(x)| < 1$ на $[-2; -1]$, , т.е. выполняются достаточные условия сходимости метода простых итераций.

Расчетная формула метода простых итераций: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Зададим начальное приближение $x_0 = -1$.

$$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt[3]{-1-1} \approx -1{,}2599.$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt[3]{-1{,}2599-1} \approx -1{,}3123.$$

Задачи для самостоятельной работы:

1) Рассматривается уравнение $x^3 + x = 1000$. Какой из следующих методов:

   $x_{n+1} = 1000 - x_n^3,\qquad x_{n+1} = \frac{1000}{x_n^2} - \frac{1}{x_n},\qquad x_{n+1} = (1000 - x_n)^{1/3}$

   сходится?
2) Выяснить, сходится ли метод простых итераций для уравнения $x + ln(x) = 0$, если итерационный процесс имеет вид $x_{n+1} = -ln(x_n)$.
3) Пусть ξ – корень уравнения $x = \varphi(x)$, и функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$. Выполнить следующие задания:
   a) Доказать, что условие $|\varphi'(\xi)| < 1$ является достаточным для сходимости метода простых итераций, если x_0 принадлежит достаточно малой окрестности точки ξ;
   b) Условие $|\varphi'(\xi)| \le 1$ является необходимым;
   c) Показать на примерах (графически), что метод простых итераций при $|\varphi'(\xi)| = 1$ может как сходиться, так и расходиться;
   d) Показать, что условие $|\varphi'(x)| \le q < 1$ на $[a; b]$ не гарантирует сходимости на $[a; b]$ метода простых итераций;
   e) Какие дополнительные к d) условия будут гарантировать сходимость;
   f) Пусть q в d) известно, и все x_n лежат в отрезке $[a; b]$. Как найти число итераций для достижения требуемой точности?
4) Для уравнения $x = sin2x$ исследовать сходимость метода простых итераций в окрестности наименьшего положительного корня.
5) Для уравнения $x = cos2x$ исследовать сходимость метода простых итераций в окрестности наименьшего положительного корня.
6) Применить метод простых итераций для решения уравнения $sinx = 2x - 0{,}5$.

7) Выяснить, сходится ли метод простых итераций в окрестности наименьшего положительного корня уравнения $x = 0{,}1 + x^3$.
8) Выяснить, сходится ли метод простых итераций в окрестности наименьшего положительного корня уравнения $x = (1 + x)^{1/2}$.
9) Представить метод Ньютона как метод простых итераций. Подсчитать $\varphi'(\xi)$.
10) Представить метод хорд как метод простых итераций. Подсчитать $\varphi'(\xi)$. Доказать, что $\varphi'(\xi)$ стремится к нулю при $x_0 \to \xi$.

Практическое занятие№7 . Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Для вычисления наибольшего из корней уравнения

$x^3 + 3x^2 – 1 = 0$

построить сходящийся итерационный процесс вида

$x_n+1=\varphi(x_n)$

2.Найти первое приближение к одному из корней уравнения

$x^3 – x + 1 = 0$

по методу Ньютона.

Вариант 2

1. Выяснить, сходится ли метод простой итерации для вычисления корня уравнения $x+ \ln(x) = 0$, если итерационный процесс имеет вид

$x_n + 1 = -\ln(x_n)$

2. Найти второе приближение к корню уравнения

$x^3 – x + 2 = 0$

по методу хорд.

Вариант 3

1. Выяснить, сходится ли метод простой итерации для уравнения $x + \ln(x) = 0$, если итерационный процесс имеет вид

$x_{n+1} = e^{x_n}$

2. Найти третье приближение к корню уравнения

$x^3 – x + 3 = 0$

по методу подвижных хорд.

Вариант 4

1.Выяснить, сходится ли метод простой итерации для уравнения $x + \ln(x) = 0$, если итерационный процесс имеет вид $x_{n+1}= (x_n + e^{-x_n})/2$

2. Найти второе приближение к корню уравнения

$x^3 – x + 5 = 0$

по методу хорд.

Вариант 5

1.Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс

$x_{n+1}=(x_n^3+1)/20$

сходится .

2. Найти первое приближение к корню уравнения

$x^3 – x + 4 = 0$

по модифицированному методу Ньютона.

Вариант 6

1. Для вычисления наименьшего из корней уравнения

$x^3 + 3x^2 – 1 = 0$

построить сходящийся итерационный процесс вида

$x_{n+1}=\varphi(x_n)$

2. Найти первое приближение к корню уравнения

$x^3 – x + 6 = 0$

по методу Ньютона.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. (ауд. 8 ч., сам. 12ч.)

Практическое занятие№8. Точные методы решения системы линейных алгебраических уравнений.

1. Система линейных алгебраических уравнений. Условие существования и единственности решения.
2. Метод Крамера. Метод Гаусса.
3. Решить систему, используя компактную схему Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 0.5x_3 = 8.5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases}$$

4. Недостатки компактной схемы Гаусса.
5. Применить компактную схемы Гаусса к системе $\begin{cases} 0.01x_1 + 10x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ с округлениями на втором и третьем знаке после запятой.
6. Метод Гаусса с выбором главного элемента.
7. Решить систему $\begin{cases} 0.01x_1 + 10x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ методом Гаусса и методом Гаусса с выбором главного элемента.
8. Пользуясь компактной схемой Гаусса, получить метод прогонки для трехдиагональной системы. Оценить число операций.
9. Неустранимая погрешность при решении системы линейных алгебраических уравнений.
10. Найти неустранимую погрешность при решении системы $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 0.5x_3 = 8.5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases}$, если все исходные данные имеют погрешность 0.05.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Сравнить число арифметических действий при решении системы методом Крамера и методом Гаусса.

2. Найти число операций при решении системы n-го порядка по компактной схеме Гаусса.

3. Применить компактную схемы Гаусса к системе $\begin{cases} 0.01x_1 + 10x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$, если «машина» имеет мантиссу с двумя, тремя, четырьмя десятичными знаками.

4. Пользуясь компактной схемой Гаусса, получить метод прогонки для пятидиагональной системы. Оценить число операций.

5. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4.5x_2 - 2x_3 = 0.5 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$, используя компактную схему Гаусса и метод Гаусса с выбором главного элемента.

6. Найти неустранимую погрешность при решении системы $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4.5x_2 - 2x_3 = 0.5 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$, если все исходные данные имеют погрешность 0.01.

Пример 1.

Рассмотрим задачу 10.

Пусть ΔA— матрица погрешностей элементов матрицы А исходной системы, Δb — вектор погрешностей правых частей системы, Δx— вектор погрешностей решений системы, возникающих из за погрешностей исходных данных. Известно, что

$$A\Delta x = \Delta b - \Delta A \cdot x .$$

По условию $\Delta A = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}$, $\Delta b = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix}$, решение системы найдено — $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Выпишем систему $A\Delta x = \Delta b - \Delta A \cdot x$ и решим ее по компактной схеме Гаусса

$$\begin{cases} 2\Delta x_1 + 4\Delta x_2 + 5\Delta x_3 = 0.05 - 2 \cdot 0.05 \\ \Delta x_1 + 4\Delta x_2 + 0.5\Delta x_3 = 0.05 - 2 \cdot 0.05 \\ 2\Delta x_1 + 3\Delta x_2 + 9\Delta x_3 = 0.05 - 2 \cdot 0.05 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\Delta x_1 + 4\Delta x_2 + 5\Delta x_3 = -0.05 \\ \Delta x_1 + 4\Delta x_2 + 0.5\Delta x_3 = -0.05 \\ 2\Delta x_1 + 3\Delta x_2 + 9\Delta x_3 = -0.05 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \underline{2} & 2.5 & -0.025 \\ 1 & 2 & \underline{-1} & -0.0125 \\ 2 & -1 & 3 & -\dfrac{0.0125}{3} = -0.00417 \end{array}\right) \quad \Delta x_3 = -0.0042,\ \Delta x_2 = -0.0167,\ \Delta x_1 = 0.0184$$

Пример 2.

Пользуясь компактной схемой Гаусса, получить метод прогонки для пятидиагональной системы.

Рассмотрим систему с пятидиагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 & \mu_1 & 0 & 0 & \dots & \nu_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \mu_2 & 0 & \dots & \nu_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \mu_3 & \dots & \nu_3 \\ 0 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \dots & \nu_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \dots & \nu_5 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \dots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

Выпишем матрицу системы, введя дополнительные обозначения A_i, B_i, C_i, D_i, F_i, получаемую по компактной схеме Гаусса.

$$\begin{pmatrix} A_1 & C_1 & D_1 & 0 & 0 & \dots & F_1 \\ B_2 & A_2 & C_2 & D_2 & 0 & \dots & F_2 \\ \alpha_3 & B_3 & A_3 & C_3 & D_3 & \dots & F_3 \\ 0 & \alpha_4 & B_4 & A_4 & C_4 & \dots & F_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & B_5 & A_5 & \dots & F_5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & B_6 & \dots & F_6 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \text{ где } A_1 = \gamma_1, \quad C_1 = \frac{\delta_1}{\gamma_1}, \quad D_1 = \frac{\mu_1}{\gamma_1}, \quad F_1 = \frac{\nu_1}{\gamma_1},$$

$$B_2 = \beta_2, \quad A_2 = \gamma_2 - B_2 C_1, \quad C_2 = \frac{\delta_2 - B_2 D_1}{A_2}, \quad D_2 = \frac{\mu_2}{A_2}, \quad F_2 = \frac{\nu_2 - B_2 F_1}{A_2},$$

$$B_3 = \beta_3 - \alpha_3 C_1, \quad A_3 = \gamma_3 - B_3 C_2 - \alpha_3 D_1, \quad C_3 = \frac{\delta_3 - B_3 D_2}{A_3}, \quad D_3 = \frac{\mu_3}{A_3}, \quad F_3 = \frac{\nu_3 - \alpha_3 F_1 - B_3 F_2}{A_3}.$$

Заметим закономерность:

$$B_i = \beta_i - \alpha_i C_{i-2}, A_i = \gamma_i - B_i C_{i-1} - \alpha_i D_{i-2}, C_i = \frac{\delta_i - B_i D_{i-1}}{A_i}, D_i = \frac{\mu_i}{A_i}, F_i = \frac{\nu_i - \alpha_i F_{i-2} - B_i F_{i-1}}{A_i},$$

$i = 3, \dots, n-2$,

$$B_{n-1}=\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}C_{n-3},\quad A_{n-1}=\gamma_{n-1}-B_{n-1}C_{n-2}-\alpha_{n-1}D_{n-3},\quad C_{n-1}=\frac{\delta_{n-1}-B_{n-1}D_{n-2}}{A_{n-1}},$$

$$F_{n-1}=\frac{\nu_{n-1}-\alpha_{n-1}F_{n-3}-B_{n-1}F_{n-2}}{A_{n-1}}$$

$$B_n=\beta_n-\alpha_nC_n,\qquad A_n=\gamma_n-B_nC_{n-1}-\alpha_nD_{n-2},\quad F_n=\frac{\nu_n-\alpha_nF_{n-2}-B_nF_{n-1}}{A_n}.$$

Обратный ход:

$$x_n=F_n,\quad x_{n-1}=F_{n-1}-x_nC_{n-1},\quad x_i=F_i-x_{i+1}C_i-x_{i+2}D_i,\quad i=n-2,...,1.$$

Теперь мы видим, что

$x_n=F_n,\quad x_{n-1}=F_{n-1}-x_nC_{n-1},\quad x_i=F_i-x_{i+1}C_i-x_{i+2}D_i,\quad i=n-2,...,1$, где

$$C_1=\frac{\delta_1}{\gamma_1},\quad D_1=\frac{\mu_1}{\gamma_1},\quad F_1=\frac{\nu_1}{\gamma_1},$$

$$C_2=\frac{\delta_2-\beta_2D_1}{\gamma_2-\beta_2C_1},\quad D_2=\frac{\mu_2}{\gamma_2-\beta_2C_1},\quad F_2=\frac{\nu_2-\beta_2F_1}{\gamma_2-\beta_2C_1},$$

$$\begin{aligned}C_i&=\frac{\delta_i-(\beta_i-\alpha_iC_{i-2})D_{i-1}}{\gamma_i-(\beta_i-\alpha_iC_{i-2})C_{i-1}-\alpha_iD_{i-2}},\quad D_i=\frac{\mu_i}{\gamma_i-(\beta_i-\alpha_iC_{i-2})C_{i-1}-\alpha_iD_{i-2}},\\ F_i&=\frac{\nu_i-\alpha_iF_{i-2}-(\beta_i-\alpha_iC_{i-2})F_{i-1}}{\gamma_i-(\beta_i-\alpha_iC_{i-2})C_{i-1}-\alpha_iD_{i-2}},\qquad i=3,...,n-2\end{aligned}.$$

$$C_{n-1}=\frac{\delta_{n-1}-(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}C_{n-3})D_{n-2}}{\gamma_{n-1}-(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}C_{n-3})C_{n-2}-\alpha_{n-1}D_{n-3}},\quad F_{n-1}=\frac{\nu_{n-1}-\alpha_{n-1}F_{n-3}-(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}C_{n-3})F_{n-2}}{\gamma_{n-1}-(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}C_{n-3})C_{n-2}-\alpha_{n-1}D_{n-3}}$$

$$F_n=\frac{\nu_n-\alpha_nF_{n-2}-(\beta_n-\alpha_nC_n)F_{n-1}}{\gamma_n-(\beta_n-\alpha_nC_n)C_{n-1}-\alpha_nD_{n-2}}.$$

Практическое занятие №9. Норма. Оценки погрешности при решении системы линейных алгебраических уравнений. Определение нормы матрицы. Аксиомы.

1. Норма вектора.
2. Подчиненная норма матрицы.
3. Найти нормы $\|A\|_1,\quad \|A\|_\infty$ для матрицы $A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

4. Найти норму $\|A\|_2$ для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Доказать, что для подчиненной нормы справедливы неравенства $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$, $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.
6. Доказать следующие свойства собственных значений $\lambda(A)$ невырожденной матрицы A:
   a. A — симметрическая, $\lambda(A)$ — действительное.
   b. A —положительно определенная, $\lambda(A)$— положительно.
   c. $(\lambda(A))^2$ — собственное значение матрицы A^2.
   d. Пусть $\mu(A^2)$— собственное значение матрицы A^2, тогда либо $\sqrt{\mu(A^2)}$, либо $-\sqrt{\mu(A^2)}$ является собственным значением матрицы A.
   e. Пусть $\lambda(A)$ — собственное значение матрицы A, тогда $\dfrac{1}{\lambda(A)}$ — собственное значение матрицы A^{-1}.
7. Пусть $\rho(A)=\max\limits_{\lambda}|\lambda(A)|$. Доказать, что
   a. $\rho(A) \le \|A\|$.
   b. $\rho(A) \ge \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$.
   c. Если A — симметрическая, $\rho(A)=\|A\|_2$
8. Найти норму $\|A\|_2$ для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
9. Найти норму $\|A\|_2$ для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
10. Пусть величина $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ мала. Означает ли это, что для всех координат x_i величины $\dfrac{|\Delta x_i|}{|x_i|}$ малы? Верно ли обратное утверждение?

11. Оценка для относительной ошибки решения системы линейных алгебраических уравнений в случае, когда погрешность имеют только правые части системы. Число обусловленности $cond(A)$ матрицы A.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Найти нормы $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 3 \\ -4 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
2. Найти норму $\|A\|_2$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Пусть $\|x\|_T = \|Tx\|$, где Т невырожденная матрица. Доказать, что $\|A\|_T = \|TAT^{-1}\|$.
4. Найти норму $\|A\|_2$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
5. Найти норму $\|A\|_2$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 1.

Найти нормы $\|A\|_1$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Норма $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. Поэтому фиксируем j и находим сумму модулей элементов j-го столбца. Получим числа 9,5,7. Норма $\|A\|_1$ равна максимальному из них., то есть $\|A\|_1 = 9$.

Пример 2.

Найти норму $\|A\|_2$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Норма $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda(A^T A)}$. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 17 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$. Чтобы найти собственные значения матрицы $A^T A$, запишем определитель матрицы $A^T A - \lambda E$ и приравняем его нулю. Получим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 26\lambda + 9 = 0$. Откуда $\lambda_{1,2} = 13 \pm \sqrt{160}$. Поэтому норма $\|A\|_2 = 13 + \sqrt{160} \approx 25.65$

Пример 3.

Рассмотрим пример 8c. Запишем $\|A\|_2$. $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda\left(A^T A\right)}$. Так как A — симметрическая, $A^T A = A^2$. Поэтому $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda\left(A^2\right)}$.Знаем, что если $\lambda(A^2)$— собственное значение матрицы A^2, то либо $\sqrt{\lambda(A^2)}$, либо $-\sqrt{\lambda(A^2)}$ является собственным значением матрицы A, то есть для любого собственного значения $\lambda(A^2)$ найдется такое собственное значение $\lambda(A)$, что $\lambda(A^2) = \lambda(A)^2$. Поэтому $\|A\|_2 = \sqrt{\max\left(\lambda(A)^2\right)} = \max \sqrt{\lambda(A)^2} = \max\left|\lambda(A)\right| = \rho(A)$.

Практическое занятие №10. Число обусловленности матрицы.

1. Найти число обусловленности $cond_1(A)$ и $cond_\infty(A)$ для $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Доказать, что $cond_2(A) = \sqrt{\dfrac{\max \lambda(A^T A)}{\min \lambda(A^T A)}}$.
3. Найти число обусловленности $cond_2(A)$ для $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Доказать, что для симметрической, положительно определенной матрицы A $cond_2(A) = \dfrac{\max \lambda(A)}{\min \lambda(A)}$. Что изменится в формуле, если отказаться от требования положительной определенности матрицы A?
5. Найти число обусловленности $cond_2(A)$ для $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
6. Рассмотреть пример, разобранный на лекции: сравнить погрешности решений двух систем $A_1 x = b$ и $A_2 x = b$, если матрицы A_1 и A_2 заданы

точно, а правая часть с абсолютной погрешностью Δb, $|\Delta b_i| < \varepsilon$. Сравнить число обусловленности матриц A_1 и A_2 — $cond_2(A_1)$ и $cond_2(A_2)$.
$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. В матрице B размерности $n \times n$ на главной диагонали стоят единицы, а ниже диагонали (-1), а вектор правой части $b = (-1,-1,...,-1,1)^T$. Выяснить, как влияет на решение этой системы возмущение правой части $\Delta b = (0,0,...,0,\varepsilon)$. Найти определитель B, $\|B\|_1$, оценить снизу $cond_1(B)$.
8. Пусть A симметрическая, положительно определенная матрица. Доказать, что $cond_2(A + \alpha E)$ есть монотонно убывающая функция от α при $\alpha > 0$.
9. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти зависимость числа обусловленности от ν, рассматривая $\|A\|_2$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Найти число обусловленности $cond_1(A)$, $cond_\infty(A)$ и $cond_2(A)$ для $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Найти число обусловленности $cond_2(A)$ для $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Найти число обусловленности $cond_2(A)$ для $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
4. Показать, что у ортогональной матрицы $cond_2(A) = 1$.
5. Можно ли подобрать ортогональную матрицу B так, чтобы $cond_2(BA) < cond_2(A)$?
6. В матрице A размерности $n \times n$ на главной диагонали стоят единицы, а выше диагонали (-1), а вектор правой части $b = (-1,-1,...,-1,1)^T$. Выяснить,

как влияет на решение этой системы возмущение правой части $\Delta b = (0,0,...,0,\varepsilon)^T$. Найти определитель A, $\|A\|_1$, оценить снизу $cond_1(A)$.

7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти зависимость числа обусловленности от ν, рассматривая $\|A\|_1$.

Пример 1.

Найти число обусловленности $cond_1(A)$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Так как $cond_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$, $\|A\|_1 = 7$ и $\|A^{-1}\|_1 = \frac{8}{11}$, то $cond_1(A) = \frac{56}{11} \approx 5$.

Пример 2.

Найти число обусловленности $cond_2(A)$ для $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Норма $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda(A^T A)}$. Норма $\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\max \lambda(\left(A^{-1}\right)^T A^{-1})} = \sqrt{\max \lambda\left((AA^T)^{-1}\right)} = \sqrt{\max \frac{1}{\lambda(AA^T)}} = \sqrt{\frac{1}{\min \lambda(AA^T)}}$. Но так как $\lambda(A^T A) = \lambda(AA^T)$, достаточно найти собственные значения матрицы $A^T A = \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -13 & 29 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 39\lambda + 121 = 0$. Откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{1037}}{2}. \quad cond_2(A) = \sqrt{\frac{39+\sqrt{1037}}{39-\sqrt{1037}}} = \frac{39+\sqrt{1037}}{22} \approx \frac{71.16}{22} = 3.23$$

Пример 3.

Найти число обусловленности $cond_2(A)$ для $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Так как матрица Асимметрическая, то $cond_2(A) = \frac{\max|\lambda(A)|}{\min|\lambda(A)|} = \frac{3}{2}$.

Пример 4.

Рассмотрим пример 8. Пусть $\lambda(A)$ собственное значение матрицы A. Тогда $Ah = \lambda(A)h$. Отсюда $(A + \alpha E)h = (\lambda(A) + \alpha)h$. Следовательно,

$\lambda(A+\alpha E)=\lambda(A)+\alpha$. По условию A симметрическая, положительно определенная матрица и $\alpha>0$. Поэтому $((A+\alpha E)x,x)=(Ax,x)+\alpha(x,x)>0$, то есть $A+\alpha E$ — симметрическая, положительно определенная матрица. Следовательно, $cond_2(A+\alpha E)=\dfrac{\max\lambda(A)+\alpha}{\min\lambda(A)+\alpha}$. Производная равна $\dfrac{\min\lambda(A)-\max\lambda(A)}{(\min\lambda(A)+\alpha)^2}\le 0$.

Практическое занятие№ 11. Итерационные методы решения систем линейных уравнений.

1. Метод простой итерации.
2. Критерий сходимости.
3. Метод Якоби, достаточные условия сходимости.
4. Метод Гаусса – Зейделя, достаточные условия сходимости.
5. Геометрическая интерпретация методов Якоби и Гаусса – Зейделя.
6. Пример1.

Исследовать сходимость метода Якоби для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными и в случае сходимости получить для нее приближенное решение этим методом.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = -21 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 15 \end{cases}$$

(Точное решение $x^*=(2, 4, 3)$).

Имеет место диагональное преобладание (достаточное условие сходимости метода Якоби), поэтому метод сходится для любого начального приближения.

Итерационный процесс имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{7 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{8} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{5} \end{cases}$$

Подставим $x^{(0)} =$ (1, 2, 2) в правую часть каждого уравнения, чтобы получить новые значения:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{7 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{4} = \dfrac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(0)} + x_3^{(0)}}{8} = \dfrac{21 + 4 \cdot 1 + 2}{8} = 3.375 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{5} = \dfrac{15 + 2 \cdot 1 - 2}{5} = 3 \end{cases}$$

Полученные результаты поместим в таблицу:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.375	3.0
2	1.84375	3.875	3.025
3	1.9625	3.925	2.9625
4	1.990625	3.9765625	3.0
5	1.99414063	3.9953125	3.0009375
…	…	…	…
15	1.99999993	3.99999985	3.0009375

Видно, что 15 – я итерация дает достаточно точный результат.

7. Пример2**.**

Применим к этой системе метод Гаусса – Зейделя. Итерационный процесс будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{7 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{8} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{5} \end{cases}$$

Результаты заносим в таблицу:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.75	2.95
2	1.95	3.96875	2.98625
3	1.995625	3.99609375	2.99903125
…	…	…	…
8	1.99999983	3.99999988	2.99999996

Высокая точность получена уже на 8 –й итерации.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Доказать, что неравенства $|tr(B)| < n$, $|\det(B)| < 1$ являются необходимыми условиями сходимости метода простой итерации.
2. Для системы

   $2x_1 - x_2 + x_3 = -3$

   $3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$

   $x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0$

   исследовать сходимость следующих методов:

   a) метода $x^{k+1} = (E - HA)\cdot x^k + Hb,\ H = E;$

   b) метода Якоби;

   c) метода Гаусса – Зейделя

3. Пусть $\|B\| < 1$. Доказать, что:

   a) $(E - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k;$

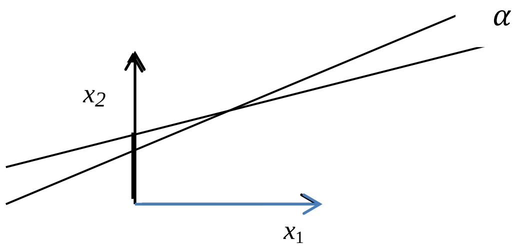
   b) $\|(E - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|};$

   c) $cond(E - B) \leq \frac{1 + \|B\|}{1 - \|B\|}.$

4. Пусть x − точное решение системы $x = B\cdot x + c$. Доказать, что для погрешности метода $x^{(k+1)} = B\cdot x^{(k)} + c$ при $\|B\| < 1$ справедливо неравенство:

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{\|\boldsymbol{c}\|\ \|B\|^k}{1 - \|B\|}$$

5. Для элементов матрицы A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ системы $Ax = b$ получить необходимые и достаточные условия сходимости методов Якоби и Гаусса – Зейделя .
6. Решение системы $Ax = b$ двух уравнений на плоскости x_1 , x_2 есть точка пересечения прямых, задаваемых уравнениями этой системы.



Изобразить графически несколько первых итераций методов Якоби и Гаусса – Зейделя.

Показать, как влияет на сходимость :

a) выбор начальной точки;
b) перестановка уравнений;
c) уменьшение угла α между прямыми.

7. Показать, что метод последовательной релаксации можно представить в виде
$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$, где $B = (D + \tau L)^{-1}[(1-\tau)D - \tau B]$.

Доказать, что:

a) $det(B) = 1 - \tau$;
b) неравенство $0 < \tau < 2$ является необходимым условием сходимости этого метода.

8. Доказать, что метод $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau(A x^{(k)} - b)$ сходится при $\tau = \frac{1}{\|A\|}$.

Практическое занятие №12. Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Методом Гаусса решить систему уравнений

$5x_1+0x_2+x_3=11$

$2x_1+6x_2-2x_3=8$

$-3x_1+2x_2+10x_3=6$

2. Пусть в системе Ax=b матрица A — симметрическая положительно определенная (A>0). Доказать сходимость при $\tau > 0$ метода

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau(Ax^{(k+1)} - b).$$

Вариант 2

1. Методом Гаусса с выбором главного элемента по строке решить систему уравнений

$$1x_1+3x_2+3x_3=16$$
$$2x_1+1x_2+4x_3=16$$
$$3x_1+2x_2-1x_3=10$$

2.Преобразовать систему

$$2x_1+2x_2+10x_3=14$$
$$10x_1+1x_2-1x_3=12$$
$$2x_1+10x_2+x_3=13$$

так, чтобы сходился метод Якоби. Оценить количество итераций, обеспечивающее точность ε=0,001 , если x^0 совпадает со столбцом свободных членов .

Вариант 3

1. Методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу решить систему уравнений

$-3x_1+2{,}099x_2+6x_3=3{,}901$

$10x_1-7x_2+0x_3=7$

$5x_1-1x_2-+5x_3=6$

2. Дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 13 & -17 \\ 13 & 29 & -38 \\ -17 & -38 & 50 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа λ(A) приближенно равны: λ_1=0,0588, λ_2=0,2007, λ_3=84,74.
Найти cond_2(A).

Вариант 4

1. Методом Гаусса решить систему уравнений
$2x_1+1x_2+4x_3=16$
$3x_1+2x_2-1x_3=10$
$1x_1+3x_2+3x_3=16$

2. Исследовать сходимость метода Гаусса – Зейделя для системы

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Вариант 5

1. Методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу решить систему уравнений

$2x_1+6x_2-2x_3=8$
$-3x_1+2x_2+10x_3=6$
$5x_1+0x_2+x_3=11$

2. Исследовать сходимость метода Якоби для системы Ax=b, если

$$A=\begin{bmatrix} 2.0 & -0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -3.0 & 1.0 & -1.4 \\ 0.4 & 0.8 & 4.0 & 2.4 \\ -0.5 & 1.2 & -2.5 & -5.0 \end{bmatrix}.$$

Вариант 6

1. Методом Гаусса с выбором главного элемента по строке решить систему уравнений

$2x_1+6x_2-2x_3=8$
$5x_1+0x_2+x_3=11$
$-3x_1+2x_2+10x_3=6$

2. Для системы x = Bx + c, где

$$B = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 \\ -0.1 & 0.0 & 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.15 & 0.0 & 0.05 \\ -0.15 & -0.1 & -0.05 & 0.0 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

вычислить количество итераций, необходимых для достижения точности 10^{-4} для $\|\cdot\|_1$, x^0=c.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

(ауд. 2 ч., сам. 1ч.)

Практическое занятие№ 13. Метод Ньютона и метод простой итерации решения систем нелинейных уравнений.

1. Постановка задачи решения систем нелинейных уравнений.
2. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений.
3. Условие сходимости метода Ньютона.
4. Метод простых итераций решения систем нелинейных уравнений.
5. Условие сходимости метода простых итераций.

Пример.

Найти два приближения по методу Ньютона для решения системы $\begin{cases} y(x-1)-1=0 \\ x^2-y^2-1=0 \end{cases}$ с известным начальным приближением $\begin{matrix} x_0=2 \\ y_0=1 \end{matrix}$.

Решение.

Здесь $F(x)=\begin{pmatrix} y(x-1)-1 \\ x^2-y^2-1 \end{pmatrix}$, $J(x)=\begin{pmatrix} y & x-1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$.

Первый шаг:

$x^{(0)}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Delta x^{(0)}=\begin{pmatrix} x_1-2 \\ y_1-1 \end{pmatrix}$, $J\left(x^{(0)}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $F\left(x^{(0)}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-2 \\ y_1-1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\begin{cases} x_1+y_1=3 \\ 4x_1-2y_1=4 \end{cases}$. Отсюда $x^{(1)}=\begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

Второй шаг.

$\Delta x^{(1)}=\begin{pmatrix} x_2-5/3 \\ y_2-4/3 \end{pmatrix}$, $J\left(x^{(1)}\right)=\begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 10/3 & -8/3 \end{pmatrix}$, $F\left(x^{(1)}\right)=\begin{pmatrix} -1/9 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 10/3 & -8/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2-5/3 \\ y_2-4/3 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1/9 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{cases} 4x_2+2y_2=29/3 \\ 10x_2-8y_2=6 \end{cases}$. Отсюда $x^{(2)}=\begin{pmatrix} 1{,}7179 \\ 1{,}3974 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы.

1) Выяснить, сходится ли метод простых итераций для системы $\begin{cases} x = cosy \\ y = sinx \end{cases}$.

2) В каких случаях нельзя применять метод Ньютона?

3) Найти два приближения по методу Ньютона для решения системы $\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases}$ с известным начальным приближением $\begin{matrix} x_0 = 1{,}2 \\ y_0 = 1{,}5 \end{matrix}$.

4) Методом простых итераций решить систему уравнений с точностью $\varepsilon=10^{-2}$:

   $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - cosy = 3 \end{cases}$.

5) Обратная матрица X для A является решением уравнения $X^{-1} - A = 0$. Имея для X приближение $X^{(n)}$, найти методом Ньютона $X^{(n+1)}$.

ЧИСЛЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. (ауд. 8 ч., сам. 8ч.)

Практическое занятие №14-15. Интерполяционный многочлен Лагранжа, Ньютона, Эрмита.

1. Постановка задачи.
2. Определение интерполяционного многочлена.
3. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
4. Линейная и квадратичная интерполяции.
5. Погрешность интерполяции.

Пример1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным: x_0=100, y_0=10; x_1=121, y_1=11 ($y=\sqrt{x}$), найти его значение в точке x = 110,25 и оценить погрешность интерполяции.

При n = 1 имеем:

$$L_1(x) = f_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = 10\frac{x-121}{-21} + 11\frac{x-100}{21}.\ L_1(110{,}25) = \frac{107{,}5+112{,}75}{21} \approx 10{,}48$$

(сравните с точным значением $\sqrt{110{,}25} = 10{,}5$)

$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}\omega_1(x) = -\frac{1}{8\xi\sqrt{\xi}}(x-100)(x-121)$ $|R_1(x)| \le \frac{1}{8000}\left(\frac{21}{2}\right)^2 \le 0{,}014$ для x из отрезка [100; 121].

6. Разделенные разности и их свойства.
7. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона, его погрешность.
8. Производные от разделенной разности.
9. Интерполяционный многочлен Эрмита.

Пример2. Дана таблица значений некоторой функции:

x	-0,5	0	0.5	1	2
y	1	0	-0.7	-0.2	0.8

Построить таблицу разделенных разностей и интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Строим таблицу разделенных разностей:

x_i	f_i	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}; x_{i+4})$
-0.5	**1**	**-2**	**0,6**	**1,2**	**-0,96**
0	0	-1,4	2,4	-1,2	
0,5	-0,7	1	0		
1	-0,2	1			
2	0,8				

Выделенные значения (первая строка таблицы) будут коэффициентами многочлена в форме Ньютона:

$L_4(x) = 1 - 2(x + 0.5) + 0.6(x + 0.5)x + 1.2(x + 0.5)x(x - 0.5) + 0.96(x + 0.5)x(x\ \ 0.5)(x - 1).$

Пример 2.

Построить интерполяционный многочлен Эрмита по данным:

x_o = -1, $f_0 = 1$, $f'_0 = -1$,

$x_1 = 0$, $f_1 = 0$, $f'_1 = 0$, $f''_1 = 2$

$x_2 = 1$, $f_2 = 1$, $f'_0 = 0$.

Выписать остаточный член.

Имеем кратные узлы: x_o , x_1 – кратность 2; x_2 – кратность 3, следовательно, строим многочлен 6 – й степени.

$f(x_0;\ x_0)= -1$; $f(x_1;\ x_1)=0$; $f(x_1;\ x_1;\ x_1)= 1$; $f(x_2;\ x_2)=1$

Построим таблицу разделенных разностей:

-1	**1**	**-1**	**0**	**1**	**-1**	**0.5**	**-0.5**
-1	1	-1	1	0	0	-0.5	
0	0	0	1	0	-1		
0	0	0	1	-1			
0	0	1	0				
1	1	1					
1	1						

Интерполяционный многочлен Эрмита:

$H_6(x) = 1 - 1(x+1) + 0(x+1)^2 + 1(x+1)^2(x-0) - 1(x+1)^2(x)^2 + 0.5(x+1)^2(x)^3 - 0.5(x+1)^2(x)^3(x-1)$

$R_6(x) = f(x;\ x_0;\ x_0;\ x_1;\ x_1;\ x_1;\ x_2;\ x_2)\ (x+1)^2(x)^3(x-1)^2$

Задачи для самостоятельной работы.

1.Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным($y=\sqrt{x}$):

$x_0=100,\ y_0=10;\ x_1=121,\ y_1=11\ x_2=144,\ y_2=12,$

найти его значение в точке x = 110,25 и оценить погрешность интерполяции, используя узлы:

а) $x_1,\ x_2$; б) $x_0,\ x_1,\ x_2$;

2. Выписать интерполяционный многочлен Лагранжа для функции f(x), значения которой заданы таблицей:

i	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,3	0,5
f_i	–0,5	0	0,2	1

3. Значения $lg(x)$ для $1 \le x \le 10$ приведены в пятизначной таблице (шаг по $x =$ 0,001). Допустима ли линейная интерполяция по этой таблице.

4. С какой точностью можно извлечь корень кубический из 1300, интерполируя функцию $y = \sqrt[3]{x}$ по узлам 10^3, 11^3,12^3?

5. Зная значения $cosx$ при x = 0, π/4, π/3, π/2 найти $cosx$ при x = π/6, и оценить погрешность.

6. Зная значения $sinx$ при x = 0, π/6, π/3, π/2 найти $sinx$ при x = π/4 и оценить погрешность.

7. Построить интерполяционный многочлен и оценить погрешность по данным:

x	cos(x)
0,29	0,9582
0,30	0,9553
0,31	0,9523

8. Построить интерполяционный многочлен и оценить погрешность для функции $y = sinx$ и узлов $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, если:

a)x0 – двукратный узел, x1 –однократный узел; *b*)*x0* – однократный узел, *x1* – двукратный.

9. Построить интерполяционный многочлен для функции *f(x)* по следующим данным:

i	x_i	f_i	f'_i	f''_i
0	-1	0	-2	
1	0	1	0	-4
2	1	0	2	

10. Построить интерполяционный многочлен для функции *f(x)* по следующим данным:

i	x_i	f_i	f'_i	f''_i
0	-1	15	-14	-2
1	0	4	-7	
2	2	18	2	

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. (ауд. 2 ч., сам. 1ч.)

Практическое занятие №16. Простейшие формулы численного дифференцирования. Выбор оптимального шага.

1. Постановка задачи.
2. Построение простейших формул численного дифференцирования. Их погрешности.
3. Выбор оптимального шага.

Пример.

Дана пятизначная таблица функции *sin(x).* Шаг таблицы равен 10^{-3}. Каким следует выбрать шаг при дифференцировании на середину и какова полная погрешность?

Решение.

Воспользуемся формулой: $f'(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h} - h^2 \frac{f'''(\xi)}{6}$. Полная погрешность $A_f = \frac{2\alpha}{2h} + h^2 \frac{M_3}{6}$.

Из условия минимизации A_f получаем: $-\frac{\alpha}{h^2} + h\frac{M_3}{3} = 0$, отсюда, $h = \sqrt[3]{\frac{3\alpha}{M_3}}$, где α – погрешность значения табличной функции, а $|f'''(x)| \leq M_3$.

Получим: $h = \sqrt[3]{\frac{1.5\cdot 10^{-5}}{1}} = \sqrt[3]{\frac{15\cdot 10^{-6}}{1}} \approx 2.5\cdot 10^{-2} = 0.025$.

Тогда $A_f \approx 2{,}04 \cdot 10^{-4} < 0.5\cdot 10^{-3}$ и в результате имеем 3 верных знака после запятой.

Задачи для самостоятельной работы.

1. В условиях рассмотренной задачи определить оптимальный шаг при дифференцировании в узле, полную погрешность и количество верных знаков после запятой в результате.
2. Пусть аргумент в предыдущей задаче взят из отрезка $[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}]$. За счет более точной оценки M_3 улучшить результат задачи.
3. Выписать формулы численного дифференцирования с погрешностью для первых и вторых производных, если:
   a. x_0 – двукратный узел, x_1 – однократный узел;
   b. x_0 и x_1 - двукратные узлы.
4. Найти оптимальный шаг численного дифференцирования по трем равноотстоящим узлам.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. (ауд. 10 ч., сам. 13ч.)

Практическое занятие №17. Интерполяционные квадратурные формулы и их погрешности.

1. Формулы прямоугольников. Геометрическая интерпретация.
2. Вывод погрешности для формулы левых прямоугольников по определению.
3. Интерполяционные квадратурные формулы и их погрешность.
4. Вывод формулы трапеций и ее погрешности.
5. Интегралы с весом.
6. Для интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx$ с весом $p(x) = \sqrt{x}$ получить интерполяционную квадратурную формулу по узлу $x_0 = 0$ и найти ее погрешность.
7. Для интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx$ с весом $p(x) = \sqrt{x}$ получить интерполяционную квадратурную формулу по узлам $x_0 = 0, x_1 = 1$ и найти ее погрешность.

8. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы.
9. Найти алгебраическую степень точности формулы $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Указать порядок погрешности.

Пример1.

Для интеграла $\int_0^1 e^x f(x)dx$ с весом $p(x) = e^x$ получить интерполяционную квадратурную формулу по узлам $x_0 = 0, x_1 = 1$ и найти ее погрешность.

Заменим функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом, построенным по узлам $x_0 = 0, x_1 = 1$. Получим $f(x) \approx f(0)(1-x) + f(1)x$. Подставим интерполяционный многочлен под интеграл. $\int_0^1 e^x f(x)dx \approx \int_0^1 e^x \big(f(0)(1-x) + f(1)x\big)dx$. Вычислим интеграл $\int_0^1 e^x dx = e - 1$. Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим, что $\int_0^1 xe^x dx = \left(xe^x - e^x\right)\Big|_0^1 = 1$. Теперь можем выписать квадратурную формулу $\int_0^1 e^x f(x)dx \approx (e-2)f(0) + f(1)$.

Чтобы найти погрешность квадратурной формулы $R[f]$, запишем погрешность интерполирования $R_1 = f(x,0,1)x(x-1)$, где $f(x,0,1)$ – разделенная разность, построенная по узлам $x_0 = 0, x_1 = 1$. Тогда $R[f] = \int_0^1 e^x R_1 dx = \int_0^1 e^x f(x,0,1)x(x-1)dx$. Воспользовавшись теоремой о среднем и свойством разделенной разности $f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f''(\xi)}{2}$, получим $R[f] = f(c,0,1)\int_0^1 e^x x(x-1)dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_0^1 e^x x(x-1)dx$. Вычислим интеграл

$\int_0^1 x^2e^x dx = \left(x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right)\right)\Big|_0^1 = e-2$. Подставим найденные значения интегралов и найдем $R[f] = \frac{f''(\xi)}{2}(e-3)$.

Пример2.

Найдем алгебраическую степень точности квадратурной формулы $\int_0^1 e^x f(x)dx \approx (e-2)f(0) + f(1)$.

Вспомним, что алгебраическую степень точности квадратурной формулы равна N, если формула точна для всех многочленов степени не выше N и существует многочлен степени N+1, для которого формула не точна. Так как интерполяционный многочленом, построенный по двум узлам, совпадает с $f(x)$, если $f(x)$ это многочлен нулевой или первой степени, то проверку нужно начинать с многочлена второй степени, а именно $f(x) = x^2$. Подставим x^2 в левую часть квадратурной формулы. Получим $\int_0^1 e^x x^2 dx = e-3$. В правой части, так как $f(0)=0$, $f(1)=1$, получим 1. Таким образом, алгебраическая степень точности рассматриваемой квадратурной формулы равна 1.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Для интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx$ с весом $p(x) = \sqrt{x}$ получить интерполяционную квадратурную формулу по узлу $x_0 = 1$ и найти ее погрешность. Указать алгебраическую степень точности формулы.
2. Для интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx$ с весом $p(x) = \sqrt{x}$ получить интерполяционную квадратурную формулу по узлу $x_0 = 0.6$ и найти ее погрешность. Указать алгебраическую степень точности формулы.

3. Для интеграла $\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)dx$ с весом $p(x)=\sqrt{x}$ получить интерполяционную квадратурную формулу по узлам $x_0=0, x_1=0.5, x_2=1$. Найти алгебраическую степень точности формулы.

Практическое занятие №18. Численное интегрирование. Метод неопределенных коэффициентов. Формулы с кратными узлами.

1. Алгебраическая степень точности формулы средних прямоугольников. Вывод погрешности для формулы средних прямоугольников. Сравнить с погрешностью формулы трапеций.
2. Метод неопределенных коэффициентов.
3. Методом неопределенных коэффициентов вывести формулу «трех восьмых». Найти ее алгебраическую степень точности.
4. Формулы с кратными узлами и их погрешности.
5. Построить интерполяционную квадратурную формулу и найти ее погрешность для интеграла $\int_a^b f(x)dx$, a — двукратный узел.
6. Построить интерполяционную квадратурную формулу и найти ее погрешность для интеграла $\int_a^b f(x)dx$, a — двукратный узел, b — однократный.

Пример1.

Для интеграла $\int_{-1}^1 f(x)dx$ методом неопределенных коэффициентов построить интерполяционную квадратурную формулу с трехкратным узлом $x_0=0$.

Так как узел $x_0=0$ является трехкратным, то интерполяционный многочлен зависит от $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$, поэтому квадратурная формула имеет вид $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(0) + A_2 f'(0) + A_3 f''(0)$. Чтобы найти неизвестные коэффициенты, нужно потребовать, чтобы она была точной для $f(x)=1,\ f(x)=x,\ f(x)=x^2$. При $f(x)=1$ имеем $2=A_1$, при $f(x)=x$ имеем $0=A_2$, при $f(x)=x^2$ имеем $\int\limits_{-1}^{1} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = 2A_3$. Поэтому $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0) + \frac{1}{3}f''(0)$.

Пример2.

Для квадратурной формулы $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0) + \frac{1}{3}f''(0)$ найти алгебраическую степень точности и погрешность $R[f]$.

По построению формулы она точна для многочленов степени ≤ 2. Проверим, будет ли формула точной для $f(x)=x^3$. Получим 0 = 0, т. е. $N \ge 3$. А будет ли формула точной для $f(x)=x^4$? Получим $\frac{2}{5} \ne 0$. Итак, $N=3$.

Обозначим $P_3 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$. Очевидно, $S[f]=S[P_3]$. Для погрешности $R[f]$ имеем $R[f] = I[f] - S[f] = I[f] - S[P_3] = I[f] - I[P_3]$. Последнее равенство получается потому, что квадратурная формула точна для многочленов степени 3, следовательно, $S[P_3]=I[P_3]$. Итак,

$$R[f] = I[f-P_3] = I[R_3] = \int\limits_a^b f(x, x_0, x_0, x_0, x_0)(x-x_0)^4dx = \int\limits_{-1}^{1} f(x,0,0,0,0)x^4dx = \frac{f^{(4)}(\eta)}{60}.$$

Задачи для самостоятельной работы.

1. Подобрать узлы x_0, x_1, x_2 и вес А квадратурной формулы $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx A\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_0)\right]$ так, чтобы она имела наиболее высокую алгебраическую степень точности.
2. Построить интерполяционную квадратурную формулу и найти ее погрешность для интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, если b — двукратный узел.

3. Построить интерполяционную квадратурную формулу и найти ее погрешность для интеграла $\int_a^b f(x)dx$, если a — однократный узел, b — двукратный.
4. Построить интерполяционную квадратурную формулу и найти ее погрешность для интеграла $\int_a^b f(x)dx$, если a — двукратный узел и b — двукратный узел (формула Эйлера).

Практическое занятие №19. Составные формулы и их погрешности.

1. Вывод формулы Эйлера.
2. Составная формула левых прямоугольников, ее погрешность. Геометрическая интерпретация формулы.
3. Составная формула Эйлера, ее погрешность.
4. Формула Симпсона, ее погрешность. Составная формула Симпсона, ее погрешность.
5. Какой шаг интегрирования h следует взять, чтобы вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{2+x}$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}$ по составным формулам трапеций и Симпсона.
6. Оценка погрешности по Рунге.

Пример1.

Какой шаг интегрирования h следует взять, чтобы вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+5x}$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ по составной формуле трапеций.

Погрешность составной формулы трапеций оценивается сверху величиной $\frac{|f''(\xi)|}{12}(b-a)h^2$, где $a<\xi<b$. Найдем $f''(x)$. $f''(x)=\frac{50}{(1+5x)^3}$. В нашем примере $\frac{|f''(\xi)|}{12}(b-a)h^2 \le \frac{50}{12}h^2 \le 10^{-4}$. Отсюда $h \le \frac{10^{-2}}{5}\sqrt{6} \le 0.005$.

Пример2.

Какой шаг интегрирования h следует взять, чтобы вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+5x}$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ по составной формуле Симпсона.

Погрешность составной формулы Симпсона оценивается сверху величиной $\frac{|f^{(4)}(\xi)|}{2880}(b-a)h^4$, где $a<\xi<b$. Найдем $f^{(4)}(x)$. $f^{(4)}(x)=\frac{15000}{(1+5x)^5}$. В нашем примере $\frac{|f^{(4)}(\xi)|}{2880}(b-a)h^4 \le \frac{15000}{2880}h^4 \le 10^{-4}$. Отсюда $h \le 10^{-1}\cdot\sqrt[4]{0.192} \approx 0.066$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Получить формулу Эйлера-Грегори.
2. Какой шаг интегрирования h следует взять, чтобы вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}$ по составным формулам трапеций, средних прямоугольников и Симпсона.

Практическое занятие №20. Квадратурные формулы Гаусса.

1. Квадратурные формулы Гаусса.
2. Построить для интеграла $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx$ квадратурную формулу Гаусса с одним узлом.
3. Построить для интеграла $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx$ квадратурную формулу Гаусса с тремя узлами.

4. Построить квадратурную формулу Гаусса с одним и двумя узлами для интеграла $\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx$.

Пример1.

Построить квадратурную формулу Гаусса с одним узлом для интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx$.

Квадратурные формулы Гаусса имеют вид $\int_a^b p(x) f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$. Многочлен $\omega_n(x) = (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_n)$, построенный по узлам интерполирования $x_0,..., x_n$, ортогонален с весом $p(x)$ всем многочленам степени $\le n$. Поэтому коэффициенты многочлена $\omega_n(x)$ можно найти, решив систему линейных алгебраических уравнений $\int_a^b p(x)\omega_n(x)x^k dx = 0, \quad k = 0,...,n$. Далее находятся корни многочлена $\omega_n(x)$, т.е. узлы $x_0,..., x_n$. Потом методом неопределенных коэффициентов отыскиваются коэффициенты $A_i, i = 0,...,n$.

У нас $\omega_0(x) = x - x_0$. Условие ортогональности $\int_0^1 \sqrt{x}(x - x_0)dx = 0$, $\frac{2}{5} - \frac{2}{3}x_0 = 0$. Отсюда $x_0 = \frac{3}{5}$. Квадратурная формула Гаусса имеет вид $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{3}{5}\right)$. Она точна для многочленов нулевой степени. Поэтому $A_0 = \frac{2}{3}$ и окончательно $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx \frac{2}{3} f\left(\frac{3}{5}\right)$.

Пример2.

Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx$.

У нас $\omega_1(x)=(x-x_0)(x-x_1)=x^2+b_1x+b_2$. Условия ортогональности

$$\int_0^1\sqrt{x}(x^2+b_1x+b_2)dx=0$$
$$\int_0^1\sqrt{x}(x^3+b_1x^2+b_2x)dx=0$$

. Получим систему $\begin{cases}\frac{2}{5}b_1+\frac{2}{3}b_2=-\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7}b_1+\frac{2}{5}b_2=-\frac{2}{9}\end{cases}$. Ее решение $b_1=-\frac{10}{9}$, $b_2=\frac{5}{21}$. Таким образом, $\omega_1(x)==x^2-\frac{10}{9}x+\frac{5}{21}$. Решаем квадратное уравнение. $x_{1,2}=\frac{5}{9}\pm\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}$. Квадратурная формула Гаусса имеет вид $\int_0^1\sqrt{x}f(x)dx\approx A_0f\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right)+A_1f\left(\frac{5}{9}+\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right)$. Она точна для многочленов нулевой и первой степени. Поэтому $\frac{2}{3}=A_0+A_1$, $\frac{2}{5}=A_0\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right)+A_1\left(\frac{5}{9}+\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right)$. Отсюда $A_0=\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{15\sqrt{10}}\right)$ $A_1=\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{15\sqrt{10}}\right)$

. И окончательно квадратурная формула Гаусса имеет вид

$$\int_0^1\sqrt{x}f(x)dx\approx\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{15\sqrt{10}}\right)f\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{15\sqrt{10}}\right)f\left(\frac{5}{9}+\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}\right)$$

Задачи для самостоятельной работы.

Построить квадратурную формулу Гаусса с одним и двумя узлами для интеграла $\int_0^\infty xe^{-x}dx$.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. (ауд. 12ч., сам. 12ч.)

Практическое занятие №21. Методы, основанные на разложении в ряд Тейлора. Погрешность метода.

1. Постановка задачи.

2. Методы, основанные на разложении в ряд Тейлора.
3. Методы Рунге – Кутты.
4. Одношаговая погрешность метода.
5. Метод неопределенных коэффициентов.

Пример 1.

Дана задача Коши:

$$y' = -\frac{3y}{x+1}, y(0) = 2$$

Найти приближенные значения решения в точках 0,1; 0,2; 0,3 по методу Эйлера с пересчетом и по методу Коши; сравнить с точным решением. Проиллюстрировать графически.

Найдем точное решение этой задачи:

$$\frac{dy}{y} = -3\frac{dx}{x+1}$$

$$y = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$y(0) = y_0 = 2$ для каждого метода .

Вычислим приближенные значения решения по методу Эйлера в точках 0,1; 0,2; 0,3.

$$y(0{,}1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0{,}1(-\frac{3\cdot 2}{0+1}) = 1{,}4$$

$$y(0{,}2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}4 + 0{,}1(-\frac{3\cdot 1{,}4}{0{,}1+1}) \approx 1{,}0182$$

$$y(0{,}3) \approx y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}0182 + 0{,}1(-\frac{3\cdot 1{,}0182}{0{,}2+1}) \approx 0{,}7636$$

Вычислим приближенные значения решения по методу Эйлера с пересчетом в точках 0,1; 0,2; 0,3.

$y(0{,}1) \approx y_1 = y_0 + h\,[f(x_{0,}\,y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_{0,}\,y_0)]/2 =$ $2 + 0{,}05(-6 - \frac{3\cdot 1{,}4}{0{,}1+1}) \approx 1{,}5091$

$$y(0{,}2) \approx y_2 = y_1 + h[f(x_{1,}\,y_1) + f(x_2, y_1 + hf(x_{1,}\,y_1)]/2 =$$

$$1{,}5091 + 0.05(-\frac{3\cdot 1{,}5091}{0{,}1+1} - \frac{3(1{,}5091 + \frac{-3\cdot 1{,}5091}{1{,}1})}{0{,}2+1}) \approx 1{,}1661$$

$y(0{,}3) \approx y_3 = y_2 + h[f(x_{2,}\,y_2) + f(x_3, y_2 + hf(x_2, y_2)]/2 =$

$$1{,}1661+0.05\left(-\frac{3\cdot 1{,}1661}{0{,}2+1}-\frac{3\left(1{,}1661+\frac{-3\cdot 1{,}1661}{1{,}2}\right)}{0{,}3+1}\right)\approx 0{,}9194$$

Вычислим приближенные значения решения по методу Коши в тех же точках.

$$y(0{,}1)\approx y_1=y_0+hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{h}{2}f(x_0,y_0)\right)=$$

$$=2+0{,}1\left(-\frac{3\left(2+0{,}05\left(-\frac{3\cdot 2}{0+1}\right)\right)}{0{,}05+1}\right)\approx 1{,}5143$$

$$y(0{,}2)\approx y_2=y_1+hf\left(x_1+\frac{h}{2},y_1+\frac{h}{2}f(x_1,y_1)\right)=$$

$$=1{,}5143+0{,}1\left(-\frac{3\left(1{,}5143+0{,}05\left(-\frac{3\cdot 1{,}5143}{0{,}1+1}\right)\right)}{0{,}15+1}\right)\approx 1{,}1731$$

$$y(0{,}3)\approx y_3=y_2+hf\left(x_2+\frac{h}{2},y_2+\frac{h}{2}f(x_2,y_2)\right)=$$

$$=1{,}1731+0{,}1\left(-\frac{3\left(1{,}1731+0{,}05\left(-\frac{3\cdot 1{,}1731}{0{,}2+1}\right)\right)}{0{,}25+1}\right)\approx 0.926$$

Результаты занесем в таблицу:

x	Точное	Метод Эйлера	Метод Эйлера с пересчетом	Метод Коши
0	2,000	2,000	2,000	2,000
0,1	1,503	1,400	1,509	1,514
0,2	1,157	1,018	1,166	1,173
0,3	0,910	0,764	0,919	0,927

Пример 2. Построить метод вида $y_m = a_1\, y_{m-1} + a_2 y_{m-2}$,

имеющий максимальную алгебраическую степень точности.

Потребуем, чтобы метод был точен для $y = (x - x_{m-1})^k$, k = 0, 1, 2, . . .

$k = 0;\ y \equiv 1;\ \rightarrow 1 = a_1 + a_2;$

$k = 1;\ y = x - x_{m-1};\ h = -h\, a_2 \rightarrow a_2 = -1;\ a_1 = 2;\ y_m = 2\, y_{m-1} - y_{m-2}$

$k = 2;\ y = (x - x_{m-1})^2 \rightarrow h^2 \neq - h^2;$

→ алгебраическая степень точности равна 1.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Пользуясь разложением в ряд Тейлора, построить методы с одношаговой погрешностью второго и третьего порядка для уравнений:

   $y' = -y^3 + 1$; b) $y' = -y^3 + x$; c) $y' = \sin(x) + x^2$.

   Представить геометрическую интерпретацию методов:

   a)Эйлера; b) Эйлера с пересчетом; c)Коши.

2. Выписать метод Эйлера и метод Эйлера с пересчетом для системы дифференциальных уравнений.
3. В каждом из следующих семейств разностных методов:
   a) явные одношаговые;
   b) неявные одношаговые;
   c) неявные двушаговые;
   d) $y_m = a_1 y_{m-1} + a_2 y_{m-2}$
4. найти метод, имеющий максимальную алгебраическую степень точности и указать порядок его точности на одном шаге.
5. Найти порядок точности методов:
6. a)$y_m = y_{m-2} + 2hf_{m-1}$;b) $y_m = \frac{4}{3}y_{m-1} - \frac{1}{3}y_{m-2} + \frac{2}{3}hf_m$; c) $y_m = y_{m-1} + h(f_m + f_{m-1})/2$;
   $y_m = y_{m-2} + h(f_m + 4f_{m-1} + f_{m-2})/3$.
7. Построить метод вида
   $y_{m+1} = a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + h(b_0 f_m + b_1 f_{m-2})$, имеющий максимальную точность.
8. Построить метод вида
9. $y_{m+1} = a_0 y_m + h(b_{-1} f_{m+1} + b_0 fm + b_1 f_{m-1})$, имеющий максимальную точность.
10. Построить метод вида
11. $y_{m+1} = a_0 y_m + h(b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + b_2 f_{m-2})$, имеющий максимальную точность.

Практическое занятие №22 . Устойчивость разностных методов.

1. Нуль – устойчивость метода.
2. Область устойчивости.
3. Жесткие системы, А – устойчивость

Пример.

Исследовать метод $y_{m+1} = -4y_m + 5y_{m-1} + h(4f_m + 2f_{m-1})$.
на нуль – устойчивость.
При h=0 он примет вид:

$$y_{m+1} = -4y_m + 5y_{m-1}$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$\rho^2 = -4\rho^1 + 5\rho^0$$

имеет корни:

$$\rho_1 = 1$$
$$\rho_2 = -5,$$

Следовательно, он не является нуль - устойчивым.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Исследовать методы из 3,4,5,6,7 на 0-устойчивость.
2. Показать, что все явные методы Адамса 0-устойчивы.
3. Доказать, что все явные методы Рунге – Кутты второго порядка точности имеют одну и ту же область устойчивости.
4. Построить однопараметрическое семейство явных 0-устойчивых методов, порядок точности которых на одном шаге равен (h^3).
5. Доказать А- устойчивость метода трапеций.
6. Доказать, что метод
   $y_{k+1}=y_k+(k_1+4k_2+k_3)/6$,
   где $k_1=hf(x_k,y_k)$; $k_2=hf(x_k+h/2,y_k+k_1/2)$
   $k_3=hf(x_k+h,y_k-k_1+2k_2)$ не является А устойчивым.
7. Доказать, что метод
   $y_{k+1}=y_k+hf(x_k+h/2,\ y_k-hf(x_{k+1},y_{k+1})/2)$
   не является А устойчивым.
8. Доказать, что метод
   $y_{k+1}=y_k+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$,
   где $k_1=hf(x_k,y_k)$; $k_2=hf(x_k+h/2,y_k+k_1/2)$; $k_3=hf(x_k+h/2,y_k+k_2/2)$
   $k_4=hf(x_k+h,y_k+k_3)$ не является А устойчивым.
9. Найти множество действительных значений $h\lambda$принадлежащих области устойчивости методов:
   a)$y_{m+1}=y_m+\frac{1}{2}h\,(3f_m - f_{m-1})$;b) $y_{m+1}=y_m+\frac{1}{12}h\,(5f_{m+1}+8f_m - f_{m-1})$;
   c) $y_{m+1}= y_{m-1}+ 2hf_m$;d) $y_{m+1}= y_{m-1}+h(f_{m+1}+ 4f_m + f_{m-1})/3$;
   e) $y_{m+1}=\frac{4}{3}y_m - \frac{1}{3}y_{m-1} + \frac{2}{3}h\,f_{m+1}$.
10. Найти множество действительных значений $h\lambda$принадлежащих области устойчивости метода Рунге – Кутты второго порядка точности.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. (ауд. 10ч., сам. 9ч.)

Практическое занятие №23. Метод стрельбы.

1. Постановка задачи для уравнения второго порядка. Краевые условия первого, второго и смешанного типа.

2. Доказать, что решение краевой задачи $y''-y=0,\quad y(0)=\alpha,\quad y(l)=\beta$ существует и единственно.
3. Выяснить, когда решение краевой задачи $y''-y=0,\quad y(0)=\alpha,\quad y(l)=\beta$ существует и единственно, когда задача не имеет решения и когда имеет неединственное решение.
4. Метод стрельбы для уравнения $y''=f(x,y,y')$ и первых краевых условий.
5. Выписать алгоритм решения краевой задачи $y''=f(x,y,y'),\quad y'(a)-\alpha_0 y(a)=\alpha_1,\quad y'(b)+\beta_0 y(b)=\beta_1,\quad \alpha_0\ge 0,\quad \beta_0\ge 0$ методом стрельбы с применением метода Ньютона.

Пример1.

Доказать, что задача $\frac{d}{dx}\left(k(x)y'\right)+q(x)=0,\quad y'(a)=0,\quad y(b)=0$ при $k(x)\ne 0$ имеет единственное решение.

Найдем общее решение уравнения $\frac{d}{dx}\left(k(x)y'\right)+q(x)=0$. Проинтегрируем его по x. Получим $k(x)y'=-\int\limits_a^x q(x)dx+C_1$. Из условия $y'(a)=0$ следует, что $C_1=0$. Еще раз интегрируем, поделив обе части уравнения на $k(x)$. Получим $y=-\int\limits_a^x\left(\frac{1}{k(x)}\int\limits_a^x q(x)dx\right)dx+C_2$. Из условия $y(b)=0$ найдем константу C_2, которая определяется единственным образом $C_2=\int\limits_a^b\left(\frac{1}{k(x)}\int\limits_a^x q(x)dx\right)dx$. Итак, краевая задача имеет единственное решение.

Пример2.

Выписать алгоритм решения краевой задачи для уравнения $y''=f(x,y,y')$ и вторых краевых условий $y'(a)=\alpha,\quad y'(b)=\beta$ методом стрельбы.

Введя еще одну функцию $z=y'(x)$, сведем уравнение $y''=f(x,y,y')$ к системе $\begin{matrix} y'=z \\ z'=f(x,y,z)\end{matrix}$. Тогда краевые условия запишутся так $\begin{matrix} z(a)=\alpha \\ z(b)=\beta\end{matrix}$.

Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} y' = z & y(a) = \mu \\ z' = f(x, y, z)' & z(a) = \alpha \end{cases}$, где μ является параметром, который надо подобрать так, чтобы выполнялось краевое условие на конце b. Решив задачу Коши, найдем $y(x, \mu)$ *и* $z(x, \mu)$ и потребуем, чтобы $z(b, \mu) - \beta = 0$. Таким образом, решение краевой задачи свелось к многократному решению задачи Коши каким-нибудь численным методом, например, методом Эйлера, и численному решению нелинейного уравнения, например, методом хорд $\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{(z(b, \mu_k) - \beta)(\mu_k - \mu_0)}{z(b, \mu_k) - z(b, \mu_0)}$, где μ_0 *и* μ_1 нужно задать так, чтобы искомый корень $\bar{\mu}$ нелинейного уравнения принадлежал (μ_0, μ_1). Отыскав решение задачи Коши при $\mu = \bar{\mu}$, получим приближенное решение поставленной краевой задачи.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Доказать, что задача $\frac{d}{dx}(k(x)y') + q(x) = 0, \quad y'(a) = y'(b) = 0$ при $q(x) > 0$ не имеет решения.
2. Выписать алгоритм решения краевой задачи $x' = f(t, x, y), \quad y' = g(t, x, y), \quad A_0 x(a) + A_1 y(a) = \alpha, \quad B_0 x(b) + B_1 y(b) = \beta,$ $A_0^2 + A_1^2 \neq 0, \quad B_0^2 + B_1^2 \neq 0$ методом стрельбы с применением метода Ньютона.

Практическое занятие №24. Метод разностной прогонки.

1. Метод разностной_прогонки для уравнения $y'' = p(x)y + q(x)$ и краевых условий первого типа $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$. Трехдиагональность матрицы и условие диагонального преобладания.
2. Порядок аппроксимации. Погрешность приближенного решения.
3. Метод разностной_прогонки для уравнения $y'' = p(x)y + q(x)$ с краевыми условиями смешанного типа $y'(a) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 \quad y'(b) = -\beta_0 y(b) + \beta_1$.

3.1. Аппроксимация краевых условий с использованием формул численного дифференцирования по двум узлам. Порядок аппроксимации. Погрешность приближенного решения.

3.2. Аппроксимация краевых условий с использованием формул численного дифференцирования по двум узлам на середину. Приведение матрицы к трехдиагональному виду. Порядок аппроксимации. Погрешность приближенного решения.

3.3. Аппроксимация краевых условий с использованием формул численного дифференцирования по трем узлам на середину. Приведение матрицы к трехдиагональному виду. Порядок аппроксимации. Погрешность приближенного решения.

4. Формулы прогонки.

Пример1.

Для краевой задачи $y''-2xy'-2y=-4x, \quad y'(0)=y(0), \quad y(1)=1+e$ построить разностную схему, используя для аппроксимации краевых условий формулу численного дифференцирования по двум узлам.

Разобьем отрезок [0,1] на n равных частей точками $x_0, x_1, ..., x_n$ с шагом $h=\frac{1}{n}$. Рассмотрим уравнение $y''-2xy'-2y=-4x$ в точках x_i и заменим производные по формулам численного дифференцирования $y''(x_i)=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+O(h^2)$, $y'(x_i)=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+O(h^2)$. Получим $\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}-2x_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-2y_i=-4x_i, \quad i=1,...,n-1$. Запишем $(n-1)$ уравнений системы линейных алгебраических уравнений $\left(\frac{1}{h^2}+x_i\frac{1}{h}\right)y_{i-1}-2y_i\left(\frac{1}{h^2}+1\right)+\left(\frac{1}{h^2}-x_i\frac{1}{h}\right)y_{i+1}=-4x_i, \quad i=1,...,n-1$ с неизвестными $y_0,...,y_n$. Чтобы найти нулевое уравнение системы, в краевом условии заменим производную по формуле $y'(x_0)=\frac{y_1-y_0}{h}+O(h)$. Получим уравнение

$-\left(\frac{1}{h}+1\right)y_0+\frac{1}{h}y_1=0$. Последнее уравнение системы найдем из второго краевого условия $y_n=1+e$. Система имеет трехдиагональную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{h}+1\right) & \frac{1}{h} & 0 & \ldots & 0 \\ \left(\frac{1}{h^2}+x_1\frac{1}{h}\right) & -2\left(\frac{1}{h^2}+1\right) & \left(\frac{1}{h^2}-x_1\frac{1}{h}\right) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \left(\frac{1}{h^2}-x_{n-1}\frac{1}{h}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

обладающую диагональным преобладанием, если $\frac{1}{h}>|x_i|, i=1,\ldots n-1$. Порядок аппроксимации построенной разностной схемы $O(h)$.

Пример2.

Для краевой задачи $y''-2xy'-2y=-4x,\quad y'(0)=y(0),\quad y(1)=1+e$ построить разностную схему, используя для аппроксимации краевых условий формулу численного дифференцирования по двум узлам на середину (метод фиктивного узла).

В примере 1 плохой порядок аппроксимации получился из-за замены производной в краевом условии недостаточно точной формулой численного дифференцирования. Воспользуемся формулой с погрешностью $O(h^2)$ $y'(x_0)=\frac{y_1-y_{-1}}{2h}+O(h^2)$. Получим $\frac{y_1-y_{-1}}{2h}-y_0=0$. Но y_{-1} нам не известно. Чтобы исключить его, запишем уравнение системы при $i=0$. $\left(\frac{1}{h^2}+x_0\frac{1}{h}\right)y_{-1}-2y_0\left(\frac{1}{h^2}+1\right)+\left(\frac{1}{h^2}-x_0\frac{1}{h}\right)y_1=-4x_0$. Так как $x_0=0$, то $y_{-1}-2y_0+y_1=0$. После исключения y_{-1} получим нулевое уравнение системы $-y_0\left(\frac{1}{h}+1\right)+\frac{y_1}{h}=0$.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Построить конечно-разностные аппроксимации для уравнения $y''=r(x)y'+p(x)y+q(x)$ с краевыми условиями первого типа $y(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta$. Для полученной линейной системы найти условия диагонального преобладания. Выяснить порядок аппроксимации.
2. Построить конечно-разностные аппроксимации для уравнения $y''=r(x)y'+p(x)y+q(x)$ с краевыми условиями смешанного типа $y'(a)=\alpha_0 y(a)+\alpha_1 \quad y'(b)=-\beta_0 y(b)+\beta_1$. Для полученной линейной системы найти условия диагонального преобладания. Выяснить порядок аппроксимации.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ.(ауд. 4ч., сам. 3ч.)

Практическое занятие №25. Интерполяция сплайнами. Кубические сплайны.

1. Вывести соотношения (2)-(5), приведенные для сплайна $S_3(x)$ из лекционного курса.
2. Получить систему относительно величин M_i в случае краевых условий типа I (см. Лекции).
3. Получить систему относительно величин M_i в случае краевых условий типа IV (см. Лекции).
4. Получить систему относительно величин M_i в случае краевых условий типа III (см. Лекции) для периодического сплайна $S_3(x)$.
5. Используя соотношение (2) выразить величины M_i через величины m_j и вывести уравнение (7).
6. Получить систему относительно m_i в случае краевых условий типа II, III, IV.

7. Построить однозвенные и двухзвенные интерполяционные кубические сплайны $S_{3,1}(x)$ при $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$ с различными краевыми условиями, используя представление через величины M_i и m_i.
8. Построить трехзвенный сплайн с краевыми условиями типа IV.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. (ауд. 4ч., сам. 3ч.)

Практическое занятие №26. МНК - решение линейных систем, приближение функции по методу наименьших квадратов.

1. МНК - решение линейных систем.
2. Геометрический смысл метода.
3. Нормальная система.
4. Постановка задачи приближения функций, заданных таблично.
5. Ортогональные многочлены.

***Пример 1*.**

Найти МНК – решение системы

$x_1 + x_2 \approx 1$

$x_1 \approx 1$

$x_2 \approx 1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$(h1,h1) = 2 = (h2,h2)$; $(h1,h2) = (h2,h1) = 1$; $(h1,y) = 2 = (h2,y)$;

Нормальная система имеет вид:

$2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2$

$\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 = 2$

Ее решение: $\dot{x}_1 = 2/3$; $\dot{x}_2 = 2/3$;

***Пример 2*.**

Сеточная функция задана таблицей.

i	x_i	y_i
1	0	0
2	0,5	0,25
3	1	1

Построить линейную функцию $\Phi(x) = a_1 + a_2x$, которая даст наилучшее приближение по методу наименьших квадратов.

В рассматриваемом случае имеем: $n = 2$, $m = 1$, $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$.

Здесь $(\varphi_1, \varphi_1) = 3$; $(\varphi_2, \varphi_2) = 1{,}25$; $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = 1{,}5$.

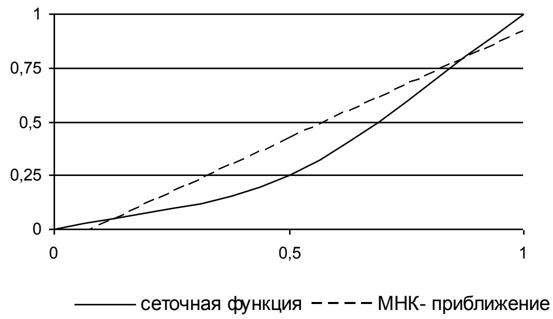
Таким образом, для определения коэффициентов имеем нормальную систему уравнений:

$3a_1 + 1{,}5a_2 = 1{,}25$

$1{,}5a_1 + 1{,}25a_2 = 1{,}125$

В результате ее решения $a_1 = -\dfrac{1}{12}$, $a_2 = 1$, тогда $\Phi(x) = x - \dfrac{1}{12}$ получим:

Погрешности в узлах сетки: $\delta_1 \cong -0{,}08(3)$; $\delta_2 = -0{,}1(6)$;$\delta_3 = 0{,}08(3)$; здесь $\delta_i = y_i - \Phi(x_i)$. Проиллюстрируем полученный результат графически.



Задачи для самостоятельного решения.

1) Найти МНК – решение системы

$x \approx y_1$

. . .

$x \approx y_m$

2) Найти МНК – решение систем:

a) $x_1 \approx 1$, $x_1 \approx 0$, $x_1 + x_2 \approx 1$

b) $x_1 \approx 0$, $x_2 \approx 1$, $x_1 + x_2 \approx 1$

3) Найти МНК – решение системы

$x_1 \approx y_1$

. . .

$x_m \approx y_m$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \approx z$

4) Измерение углов плоского треугольника привели к значениям: $A \approx 54^0 5'$; $B \approx 50^0 1'$; $C \approx 76^0 6'$. При помощи МНК найти значения этих углов, удовлетворяющих точному равенству: $A + B + C = 180^0$

5) Найти линейную функцию, задающую МНК – приближение для данных:

x_i	0	1	3	4
y_i	1	2	0	4

6) В классе функций $p(x) = c_0 + c_1 x$ найти МНК – приближение для функции $y = x^2$, заданной:

   а) в узлах $x_0 = 0$, $x_1 = 1$;
   б) в узлах $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$;
   в) в узлах $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1$;
   г) на всем промежутке [0, 1]
   Построить графики полученных приближений.

7) В задаче приближения заданной на [0, 1] функции $y(x)$ при помощи функций вида

   $p(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x) = 1$, а $\varphi_2(x) = x - \alpha$
   найти как функцию от α:
   а) матрицу G МНК – системы
   b) определитель G, собственные числа G,
   число обусловленности $cond$(G) = k(α).

   Доказать, что МНК – приближение не зависит от α. Вычислить значения k(α) при α = 0, 0.5, 1, 10, 100. Доказать, что k(α) $= O(\alpha^4)$ при больших α.

8) Пусть известны $P_0(x)$, $P_1(x)$ – ортогональные многочлены нулевой и первой степени. Доказать, что многочлены степени второй и выше можно конструировать, используя рекуррентную формулу

   $P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\, P_n(x) - \beta_n\, P_{n-1}(x)$
   Указать правила вычисления α_n и β_n.

9) Построить ортогональную систему многочленов $P_n(x)$ для n = 0, 1, 2, . . .

   для узлов
   a) $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$;
   b) для отрезка [-1, 1]